COMPUTAÇÃO GRÁFICA – MODELAGEM GEOMÉTRICA

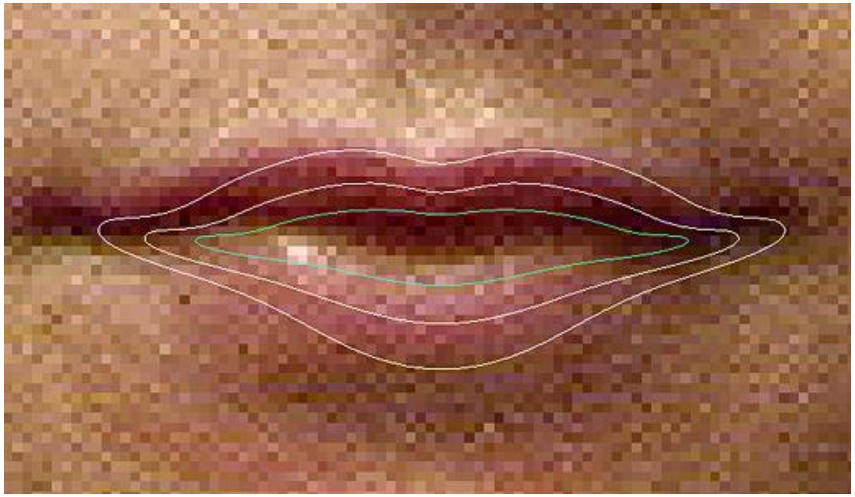
Profa. Mercedes Gonzales Márquez

Tópicos

- Curvas
- Superfícies
- Técnicas principais de Modelagem Geométrica

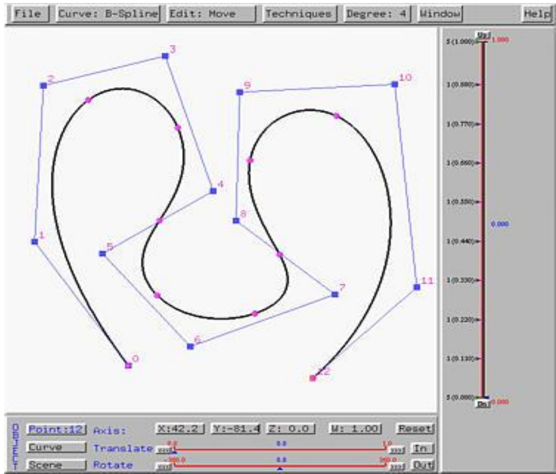
Curvas e Superfícies - Introdução

- Curvas são a base, tanto da geração de formas simples, como círculos e elipses, quanto na criação de projetos complexos como automóveis, navios, aeronaves ou até mesmo faces e corpos humanos.



Curvas e Superfícies - Introdução

- Desempenham um papel importante em várias áreas, como criação de objetos e visualização de fenômenos científicos.
- Uma curva pode ser representada:
  - Por uma sucessão de linhas retas que ligam pontos específicos.
  - Por um conjunto de pontos de controle que determina através de uma equação uma curva que passe por eles.



Representação de Curvas

- A representação analítica de curvas pode usar ou não parâmetros, se subdividindo então em:

  B.1. paramétricas

  B.2. não-paramétricas

- As formas não-paramétricas podem ser, ainda,

  B.2.1. explícitas

  B.2.2. implícitas.

Representação de Curvas

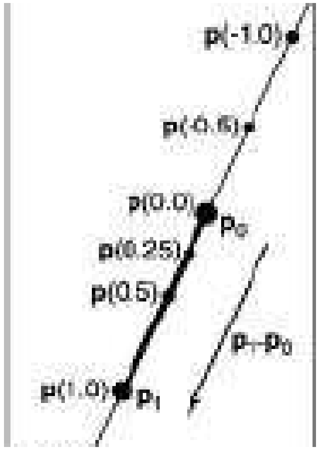
B.1 Formas paramétricas

- As coordenadas são dadas em termos de um ou um conjunto de parâmetros (t, θ, etc.).

  Exemplo de curvas no plano: P(t) = (x(t), y(t))

➢ Segmentos

$$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$$



Representação de Curvas

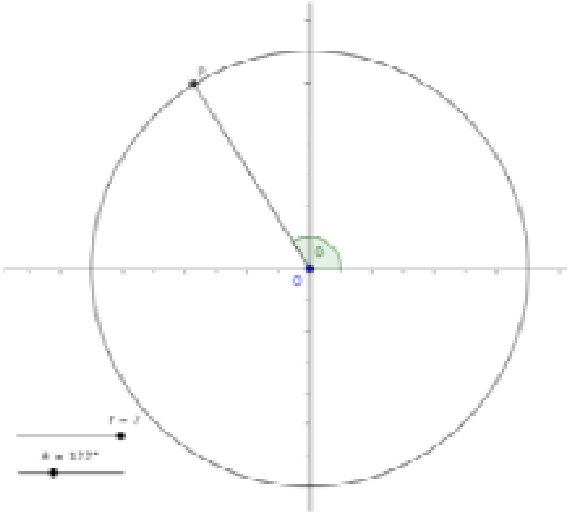
B.1 Formas paramétricas

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

Exemplos:

Circuferências

$$p(t) = (r \cos t,\ r \operatorname{sen} t)$$



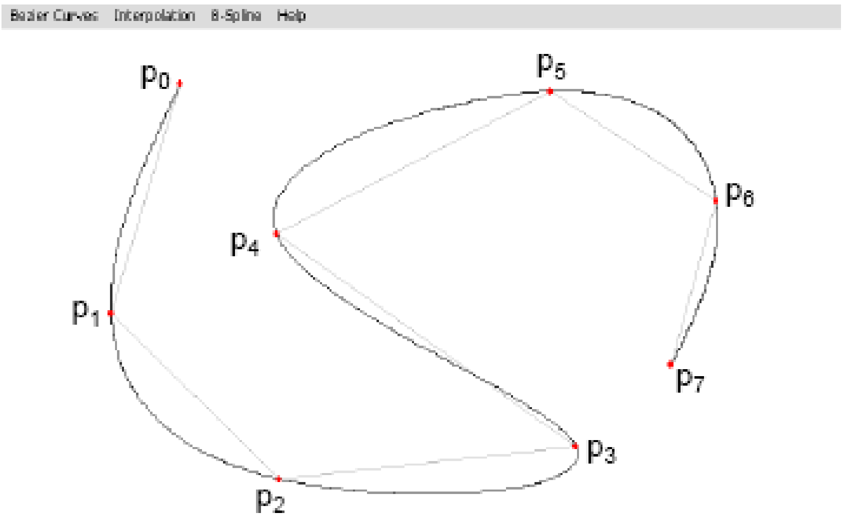
Representação de Curvas

B.1. Formas paramétricas

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

Exemplos:

Curvas de Bézier



$$P(t) = \Sigma\, B_{n,i}(t)\, p_i \quad \text{onde } B_{n,i}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i - (1-t)^{n-i}$$

Combinação convexa de p_i

Representação de Curvas

B.2. Formas não-paramétricas

Não há parâmetros e *uma coordenada* da curva é dada em função da outra, ou seja

$y = f(x)$ ou $x = f(y)$

- Exemplos:

1) Equação de um semi-círculo de raio 2

$$y = \sqrt{2^2 - x^2} \qquad ou \qquad x = \sqrt{2^2 - y^2}$$

2) Equação de uma reta

$y = 2x - 1$ ou $x = \frac{1}{2}(y + 1)$

Representação de Curvas

B.2.1 Forma *não-paramétrica explícita* : É dada por uma equação do tipo $y = f(x)$, ou seja uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras. Exemplos:

1) Equação genérica explícita de uma parábola:

$$y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$$

2) Equação de uma reta

$$y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$$

3) Polinômios:

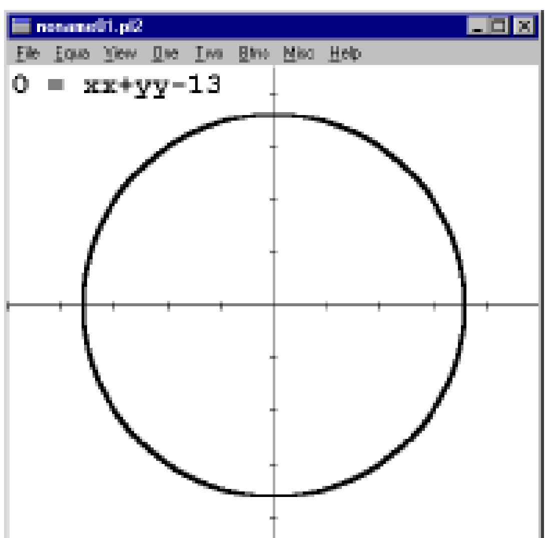
$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{a}_n x^n + \mathrm{a}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \mathrm{a}_2 x^2 + \mathrm{a}_1 x^1 + \mathrm{a}_0$$

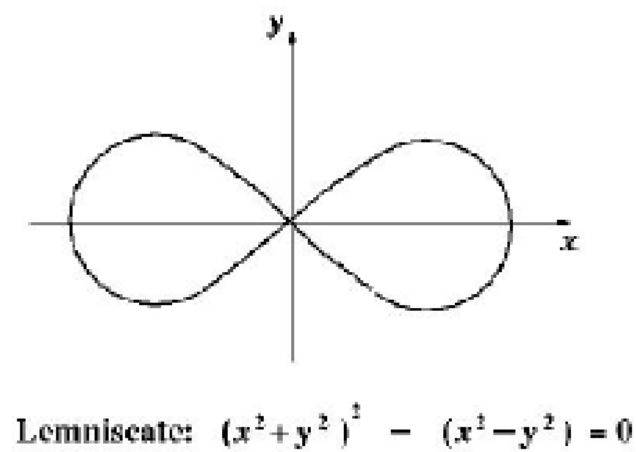
Representação de Curvas

- Obtém-se um valor de *y* para cada valor de *x* dado.

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad z = f(x,y)$$

Não permite representar correspondências sobrejetivas!





Representação de Curvas

- B.2.2. A Forma *não-paramétrica implícita* não tem essa limitação. Nela as coordenadas são relacionadas por uma função. A sua forma é f(x,y)=0 ou f(x,y,z)=0.
- Exemplo: $x^2 + y^2 = R^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$

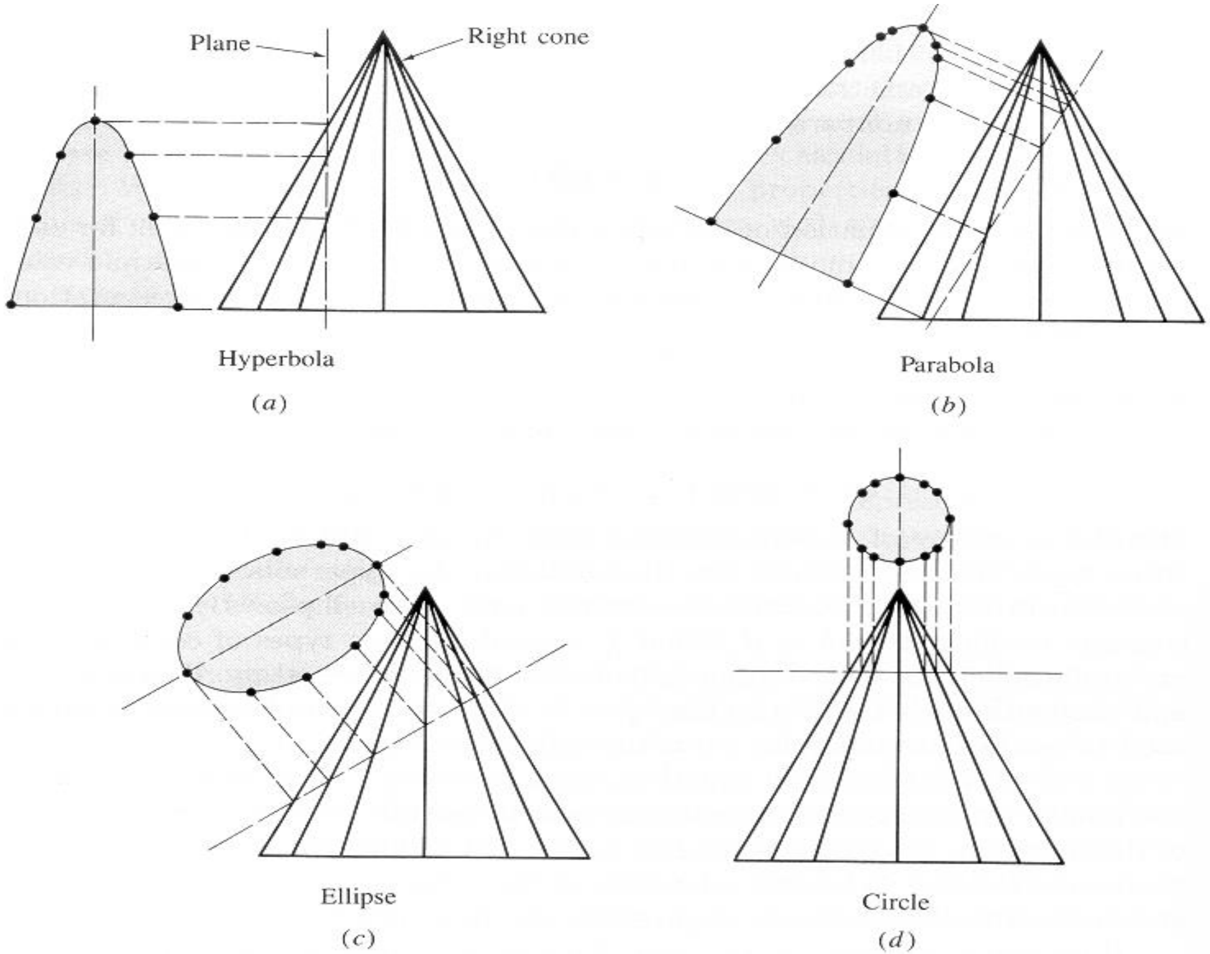
Representação de Curvas

- Exemplo: seções cônicas.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

- Essa expressão representa a variedade de curvas planas denominadas seções cônicas. Essas curvas (cinco) são obtidas pelo corte de um cone por um plano, resultando em: círculo, elipse, parábola, hipérbole, reta.

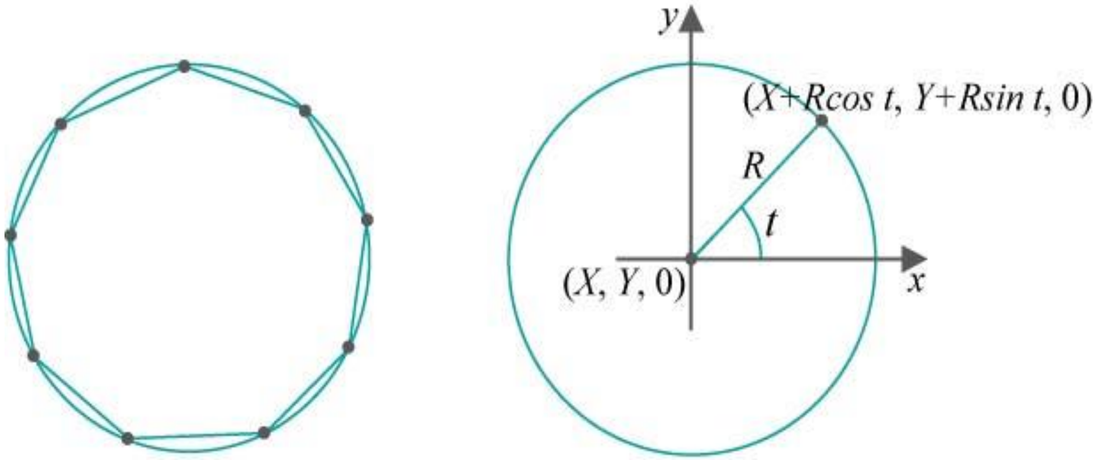
Representação de Curvas



Representação de Curvas

Cônica	**Forma Paramétrica**	**Forma Implícita**
Elipse	x = a $\cos\ \theta$ y = b $sen\ \theta$	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$
Parábola	$x = at^2$, $y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	x = a $\cosh\ \theta$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ y = b $senh\ \theta$	

Aproximando Objetos Uni-dimensionais



(a) (b)

A equação paramétrica do circulo implementado é:

x=X+Rcost, y=Y+Rsint, z=0, 0<=t<=2pi

Onde (X,Y,0) é o centro e R é o raio do círculo.

Programa: circle.cpp (Capítulo 2)

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

- Explicando a implementação da equação do círculo

- Suponha N=4t=2*PI*i/N
- Para i=0 => t= 2*PI*0/4 = 0 = 0
- Para i=1 => t=2*PI*1/4 = PI/2 = 90
- Para i=2 => t=2*PI*2/4 = PI = 180
- Para i=3 => t=2*PI*3/4 = 3*PI/2 = 270

Curvas com OpenGL

Exercícios: Desenhe uma curva senoidal entre x=-2*pi e x=2*pi. Siga a estratégia do programa circle.cpp.

Equação paramétrica   (x,y)=(t,sen t)

Equação explícita   y=sen x;

Resolva a lista de exercícios no site da disciplina.

Curvas de Bézier

- É uma técnica de aproximação de curvas.
- Uma curva de Bézier pode ser gerada por 3, 4, até $n + 1$ pontos de controle (ajuste para um polinômio de grau n).
- Geralmente utiliza-se quatro pontos de controle (*forma cúbica*).
- A curva passa pelo primeiro e pelo último ponto de controle.

Curvas de Bézier

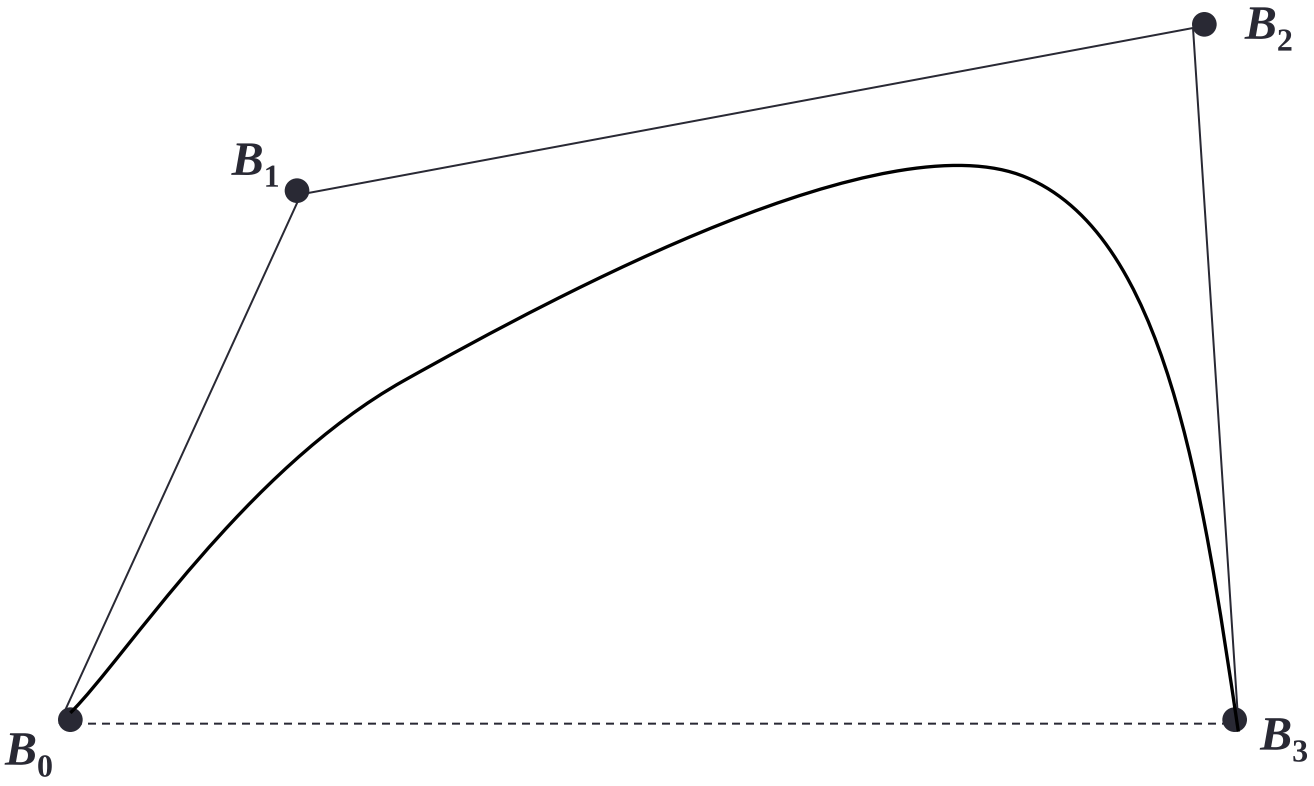


Figura 1

Curvas de Bézier

- A curva paramétrica de Bézier é definida como:

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

- Onde B_i são n+1 pontos de controle da curva e $J_{n,i}$ (*t*) são funções peso (*blending functions*). Essas funções foram escolhidas de forma que

(1) Sejam funções polinomiais

(2) Constituam pesos de forma que P(t) seja uma função polinomial obtida pela média ponderada que combina a influência de todos os pontos de controle.

Curvas de Bézier

- Para que os $J_{n,i}(t), \quad 0 <= i <= n$

Sejam os n+1 pesos de P(t) eles devem satisfazer

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t) = 1, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

E para eles serem funções polinomiais de grau n, pensou-se na seguinte decomposição e o fato da potencia de 1 sempre ser 1. $1 = (1-t) + t$

$$1 = 1^2 = ((1-t)+t)^2$$

$$1 = 1^3 = ((1-t)+t)^3$$

$$1 = 1^n = ((1-t)+t)^n$$

Curvas de Bézier

- E pelo conhecido binômio de Newton

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Temos então que

$$1 = ((1-t)+t)^2 = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2$$

$$1 = ((1-t)+t)^3 = t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3$$

$$1 = ((1-t)+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

Curvas de Bézier

- Dessa forma as curvas de Bézier são definidas por

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0\le t\le 1$$

Onde os $J_{n,i}(t)$

são descritos pelos polinômios de Bernstein como:

$$J_{n,i}(t)=\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^{i}$$

onde n é o grau dos polinômios e: $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$

(i = 0, 1, ..., n) são os coeficientes binomiais.

- Essas funções $J_{n,i}$ (t) satisfazem as condições:

$J_{n,i}$ (t) ≥ 0 para todo i entre 0 e 1, e também:

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t)=1, \qquad 0\le t\le 1$$

Curvas de Bézier

- Para n=2

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$$

$$J_{2,0}(t) = \binom{2}{0}(1-t)^2 t^0 = (1-t)^2$$

$$J_{2,1}(t) = \binom{2}{1}(1-t)^1 t^1 = 2t(1-t)$$

$$J_{2,2}(t) = \binom{2}{2}(1-t)^0 t^2 = t^2$$

Curvas de Bézier

- Exemplo da definição de uma curva de Bézier a partir de 3 pontos de controle

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$P(t) = (1 - t)^2 B_0 + 2t (1 - t) B_1 + t^2 B_2,$
$P(t) = (x(t), y(t)) = (1 - t)^2 (x0,y0) + 2t (1 - t) (x1,y1) + t^2(x2,y2)$

Para B0=(-4,0), B1=(0,5), B2=(7,0)

$x(t) = (1 - t)^2 x0 + 2t (1 - t) x1 + t^2 x2$
$x(t) = -4(1 - t)^2 + 7t^2 = -4+8t-4t^2 + 7t^2 = -4+8t+3t^2$

$y(t) = (1 - t)^2 y0 + 2t (1 - t) y1 + t^2 y2$
$y(t) = 10t (1 - t) = 10t-10t^2$

$P(t) = (-4+8t+3t^2, 10t-10t^2)$

Curvas de Bézier

n=2

$P(t) = (1 - t)^2 B_0 + 2t(1 - t) B_1 + t^2 B_2,$

$$P(t) = [t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

n=3

$P(t) = (1 - t)^3 B_0 + 3t(1 - t)^2 B_1 + 3t^2 (1 - t) B_2 + t^3 B_3,$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier - Algoritmo

Exercício:

(1) O programa superficies.cpp permite o ingresso interativo (pelo cliques do mouse) de n+1 pontos de controle e constrói a curva de Bézier de grau n, correspondente. Responda as seguintes questões:

a. Qual trecho de código constrói as funções de Bernstein (Jni)
b. Qual trecho de código constrói a curva de Bézier.
c. Em qual trecho de código a curva é desenhada
d. O programa funciona, mas pode ser melhorado. Identifique quais melhoras podem ser feitas.

Curvas de Bézier - Algoritmo

Exercício:

(2) Rode e entenda os programas bezierCurves.cpp e bezierCurveWithEvalMesh.cpp que desenham curvas de Bézier usando comandos de OpenGL. Responda as seguintes questões:

a. Qual trecho de código constrói as funções de Bernstein (Jni)
b. Qual trecho de código constrói a curva de Bézier.
c. Em qual trecho de código a curva é desenhada
d. O programa apresenta uma proposta de interação, você teria outra proposta.

Curvas de Bézier - Problemas

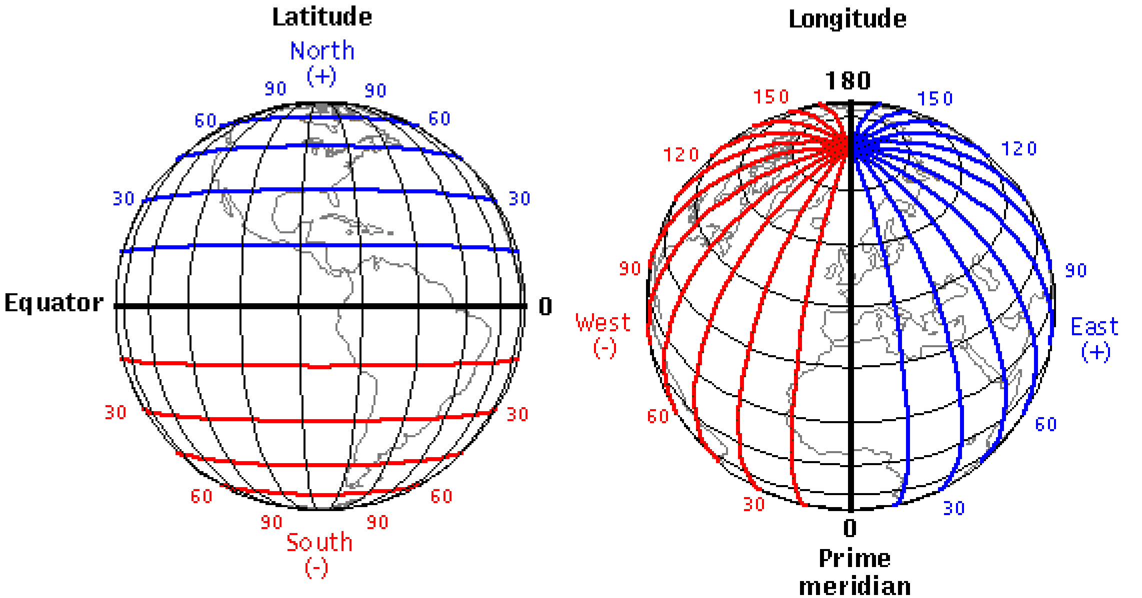
1. Falta de controle local : Uma alteração em um ponto no polígono de Bézier acarreta alterações em toda a curva de Bézier. Indesejável quando desejamos fazer ajustes finos.
2. O grau do polinômio cresce com o número de pontos de controle do polígono de controle.

Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Uma circunferência ou uma hélice são objetos unidimensionais pois são topologicamente equivalentes a uma linha. Agora veremos como aproximar objetos bi-dimensionais como uma esfera ou um cilindro.

A representação paramétrica de uma esfera segue o modelo de coordenadas geográficas do globo terrestre (latitude e longitude).

https://www.geogebra.org/m/HJs4kEtb



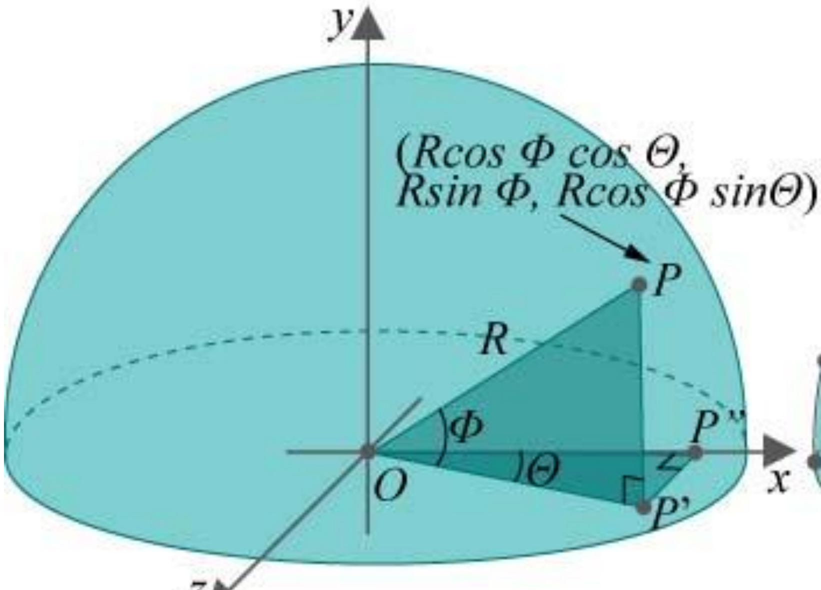
Aproximando Objetos Bi-dimensionais

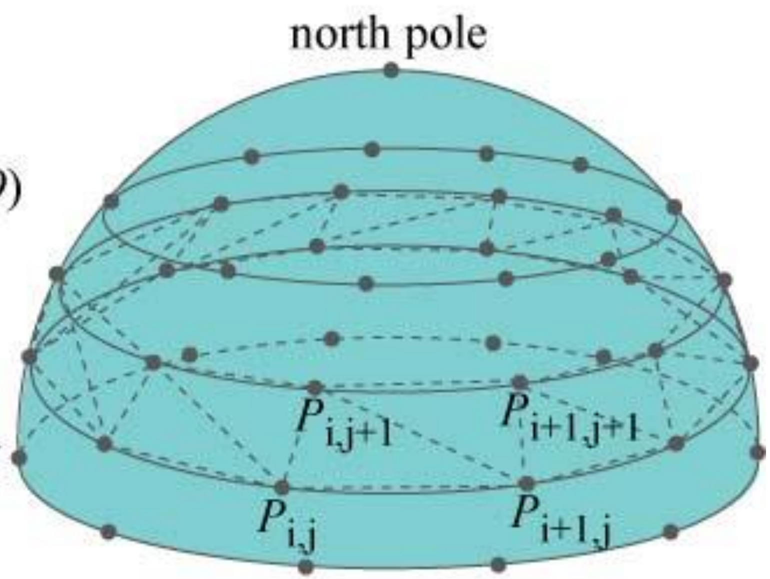
Considere um hemisfério de raio R, centralizado na origem O e com sua base circular sobre o plano xz. Suponha que as coordenadas esféricas de um ponto P sobre o hemisfério são a longitude theta e a latitude phi.

As coordenadas cartesianas são:

$$(RCos\emptyset Cos\theta, RSin\emptyset, RCos\emptyset Sin\theta),$$

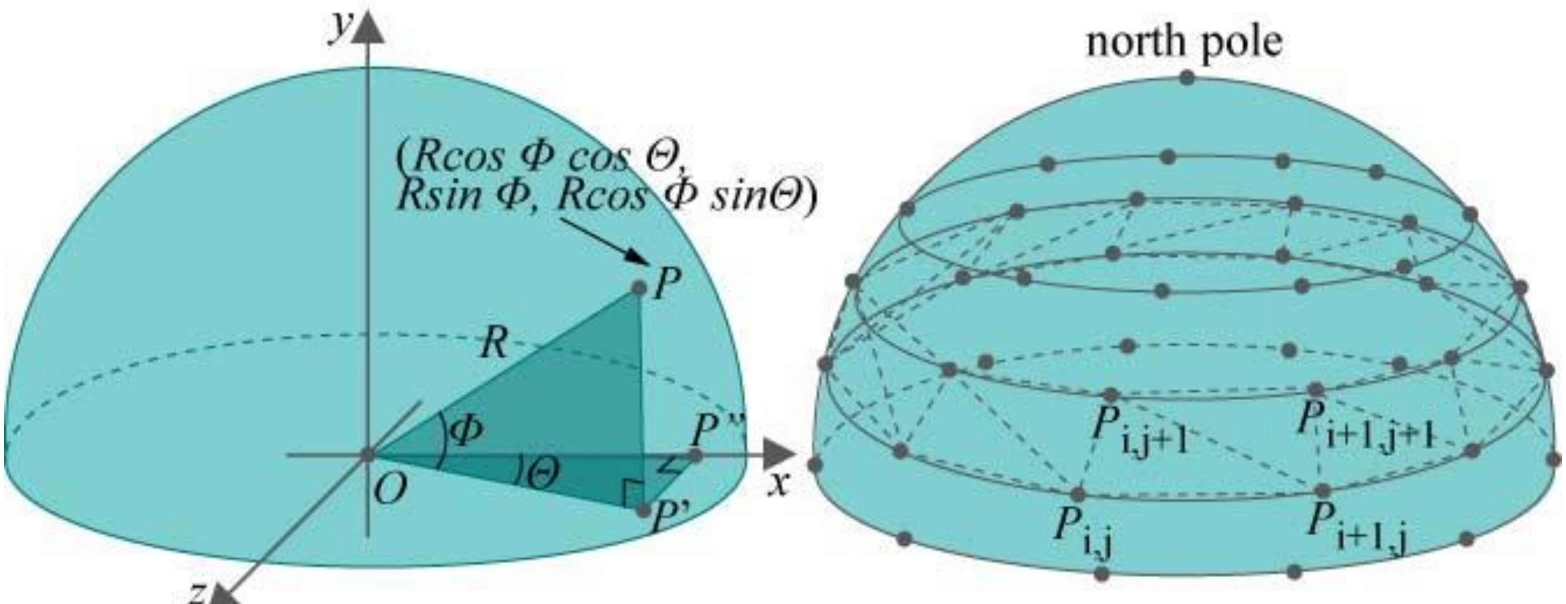
$$0 \leq \theta \leq 2\pi \ e \ 0 \leq \emptyset \leq \pi/2$$





Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Amostramos o hemisfério em uma malha de (p+1)(q+1) pontos Pij, 0<=i<=p, 0<=j<=q, onde a longitude de Pij é (i/p)*2PI e sua latitude (j/q)*PI/2. Em outros palavras (p+1) pontos longitudinalmente igualmente espaçados são escolhidos entre cada uma das q+1 latitudes igualmente espaçadas. Na figura p=10 e q=4.

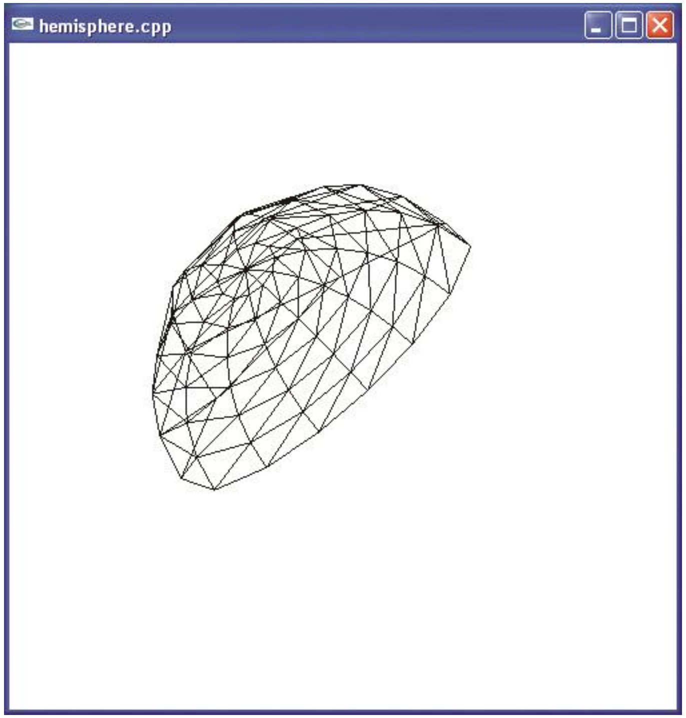


(a) (b)

Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Experimento 2.26. Rode hemisphere.cpp que implementa exatamente a estratégia descrita.

Experimento 2.27.



Aproximando Objetos Bi-dimensionais

... as the syntax is fairly intuitive. The set of three `glRotatef()`s, particularly, comes in handy to re-align a scene.

Exercise 2.31. (Programming) Modify `hemisphere.cpp` to draw:

(a) the bottom half of a hemisphere (Figure 2.35(a)).

(b) a 30° slice of a hemisphere (Figure 2.35(b)).

Make sure the 'P/p/Q/q' keys still work.

Exercise 2.32. (Programming) Just to get you thinking about animation, which we'll be studying in depth soon enough, guess the effect of replacing `glTranslatef(0.0, 0.0, -10.0)` with `glTranslatef(0.0, 0.0, -20.0)` in `hemisphere.cpp`. Verify.

And, here are some more things to draw.

Exercise 2.33. (Programming) Draw the objects shown in Figure 2.36. Give the user an option to toggle between filled and wireframe renderings.

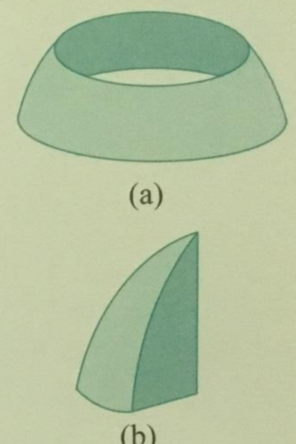


Figure 2.35: (a) Half a hemisphere (b) Slice of a hemisphere.

a

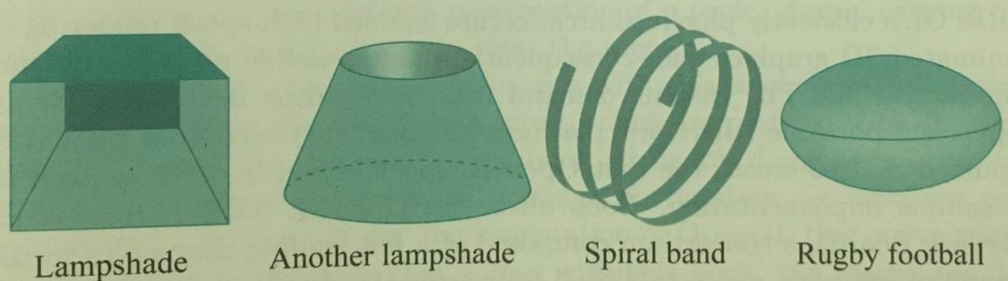


Figure 2.36: More things to draw.

A suggestion for the football, or ellipsoid, is to modify `hemisphere.cpp` to make half of an ellipsoid (a hemi-ellipsoid?). Two hemi-ellipsoids back to back would then give a whole ellipsoid.

... Filled renderings of 3D scenes, even with color, rarely look

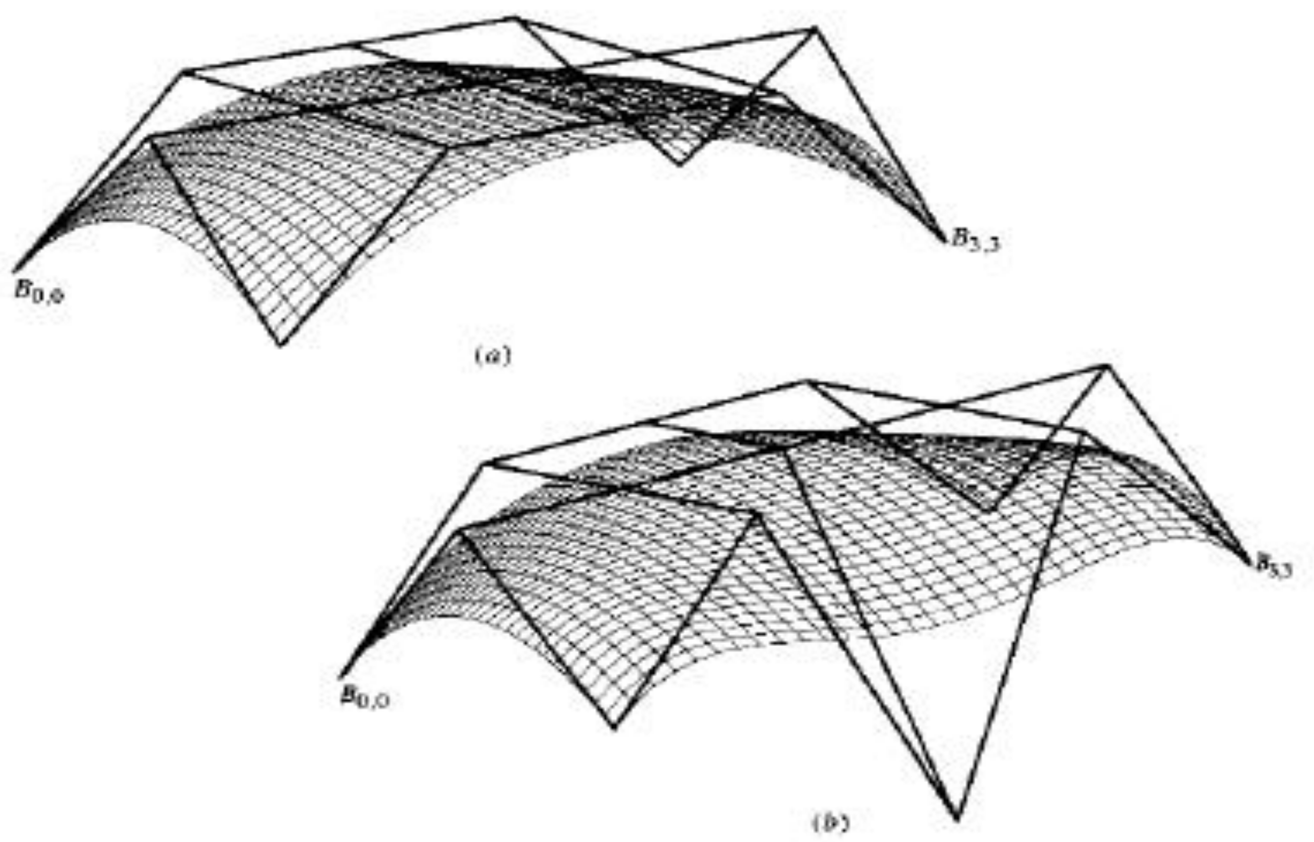
Superfícies Bézier

- Generalização da idéia de curva de Bézier.
- Sejam B_{ij}, *i=0,...,m, j=0,...,n*, um conjunto de pontos no R^3 de tal forma que sua projeção no plano *x0y* seja formada pelos vértices de *mn* retângulos de mesmas dimensões. A superfície de Bézier definida no domínio [0,1]x[0,1] é

$$\boldsymbol{Q(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_{ij}J_{ni}(u)K_{mj}(v)}$$

Onde J_{ni} e K_{mj} são os polinômios de Bernstein.

Superfícies Bézier



Curvas e Superfícies Bézier em OpenGL

1. Leia e entenda os programas bezierSurface.cpp e bezierCanoe.cpp que desenham superfícies de Bézier usando comandos de OpenGL. Explique os comandos que geram as superfícies em ambos programas.

Quádricas da GLU

A biblioteca GLU provê a renderização automática de objetos tridimensionais como esferas, cilindros e discos.

- Esferas:

gluSphere(GLUquadricObj *obj, GLdouble radius, GLint slices, Glint stacks)

- Cilindros:

gluCylinder(GLUquadricObj *obj, GLdouble baseRadius, Gldouble topRadius, GLdouble height, GLint slices, GLint stacks)

topRadius == zero, permite criar cone.

- Discos:

gluDisk(GLUquadricObj *obj, GLdouble innerRadius, GLdouble outerRadius, GLint slices, GLint loops)

innerRadius != zero, permite criar discos com furos.

Veja e rode o programa gluQuadrics.cpp da pasta SumantaGuha

Modelagem usando Superfícies Bézier e primitivas

1. Leia e entenda o programa torpedo.cpp que desenha um torpedo composto de diferentes pedaços:

(i) Corpo: cilindro da GLU

(ii) Nariz: hemisferio

(iii) Três barbatanas: discos parciais da GLU

(iv) Disco traseiro : disco da GLU

(v) Haste da hélice: cilindro da GLU

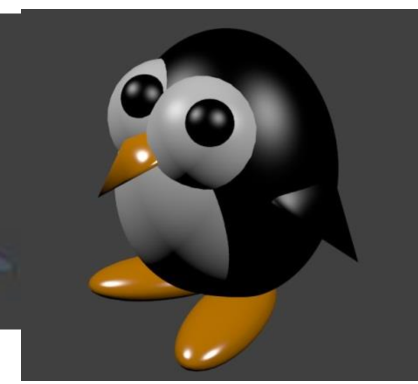
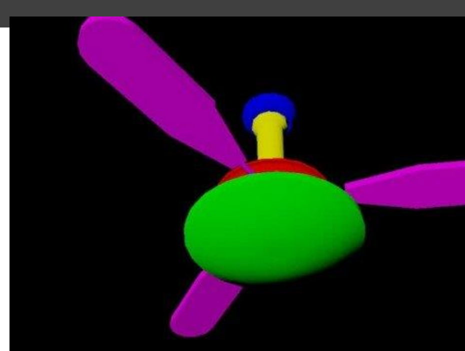
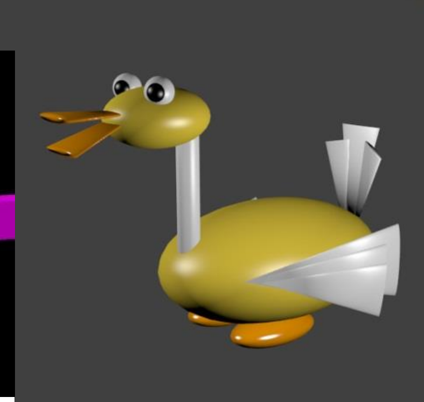
(vi) Três pás da hélice: pedaços bicúbicos Bezier

2. Desenhe um avião composto de vários pedaços. Use superfícies de Bézier e quádricas.

Superfícies Bézier e quádricas em OpenGL

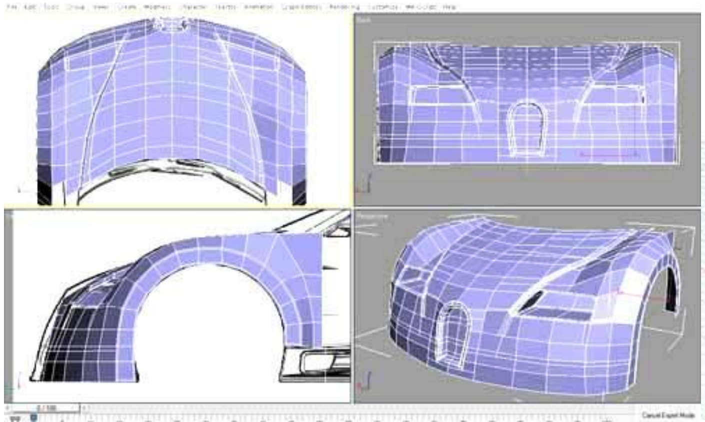
3. Modele os seguintes objetos.

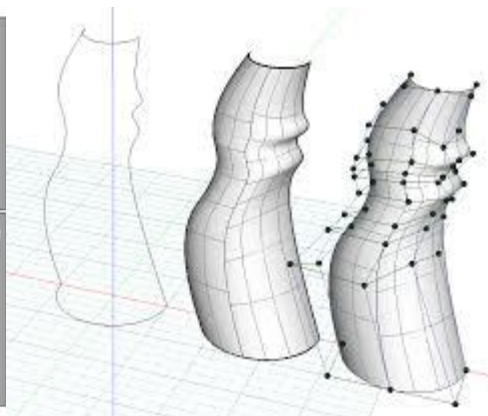


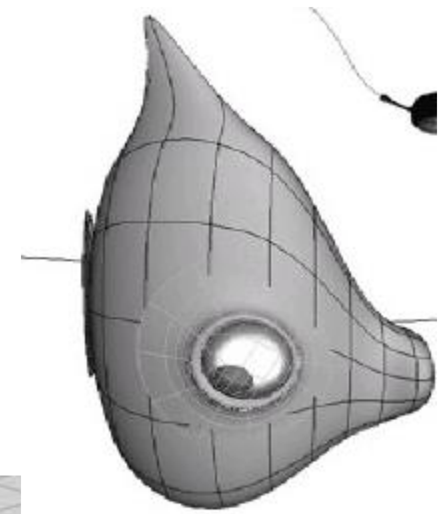




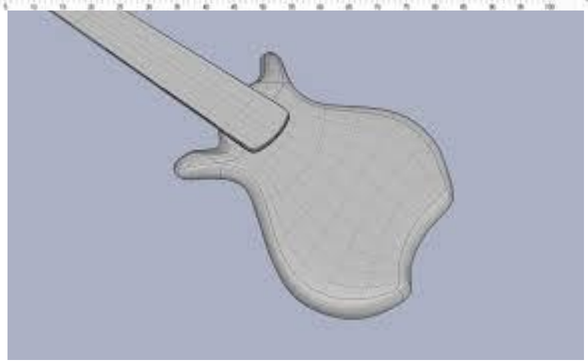
Superfícies Bézier em OpenGL

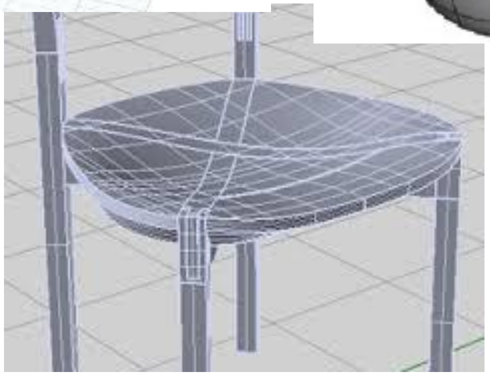
4. Modele os seguintes objetos: carro, vestido, peixe, violão, cadeira com uso de superfícies de Bézier.







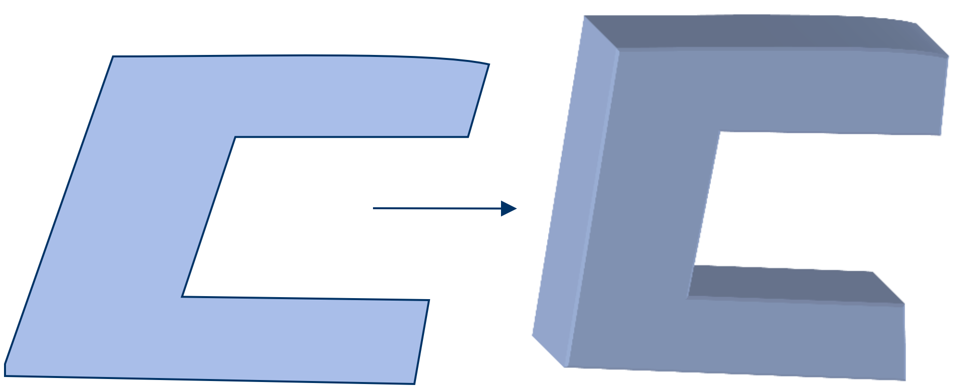


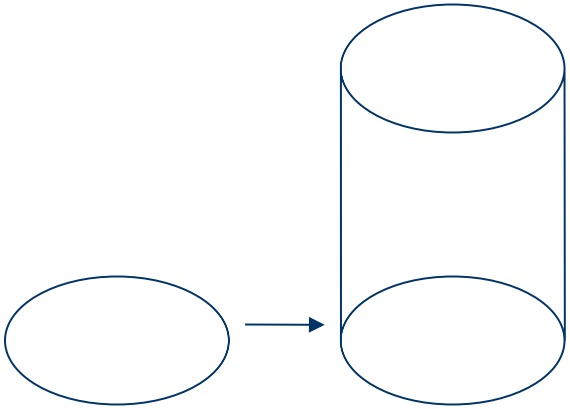


Varredura (*Sweeping*)

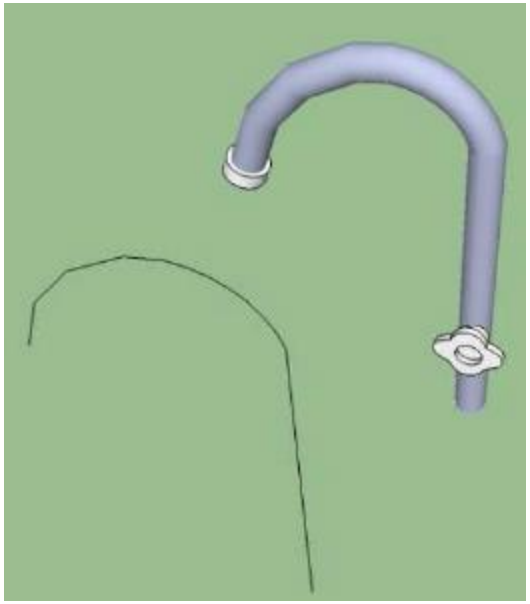
- Uma superfície é descrita quando uma curva C1 (curva geratriz) é deslocada no espaço, ao longo de uma trajetória dada por uma outra curva C2 (caminho ou diretriz).

  - Varredura translacional (Extrusão ou superfícies geradas por deslocamento)



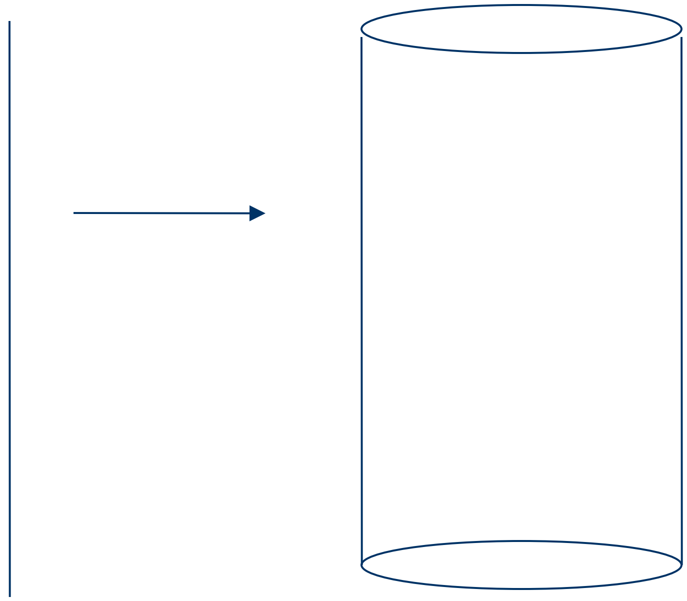


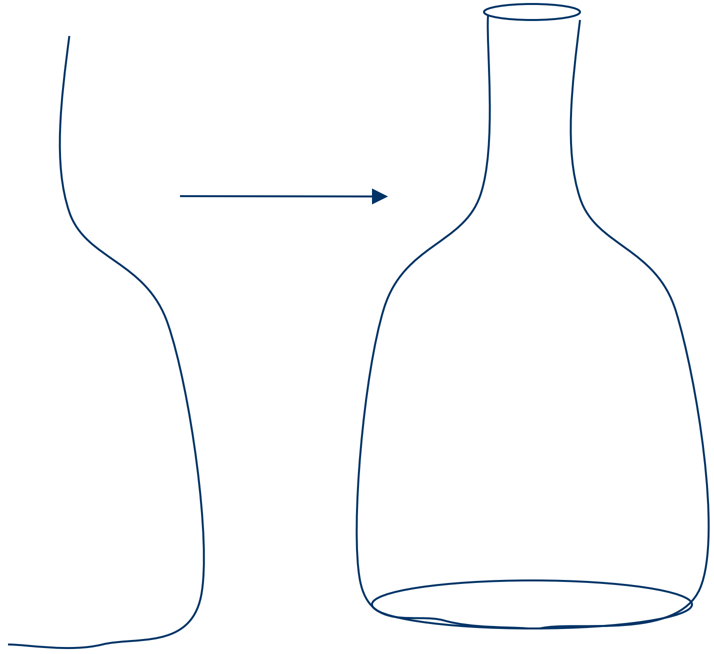
Varredura (*Sweeping*)



Varredura (*Sweeping*)

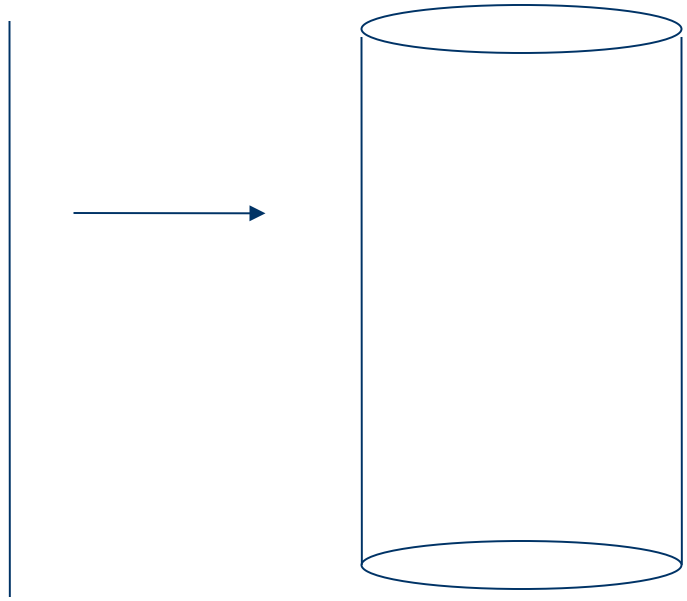
- - Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)
-

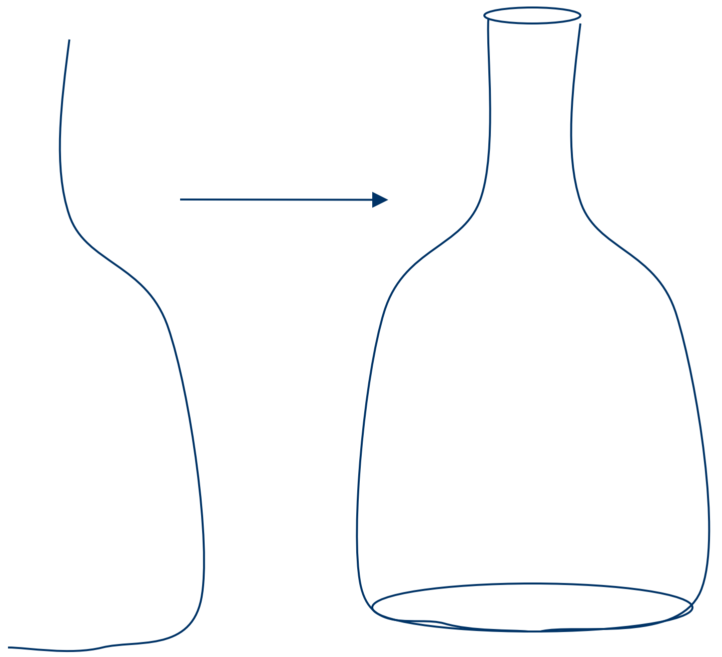




Varredura (*Sweeping*)

- \- Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)
-





Varredura (*Sweeping*)