COMPUTAÇÃO GRÁFICA – MODELAGEM GEOMÉTRICA

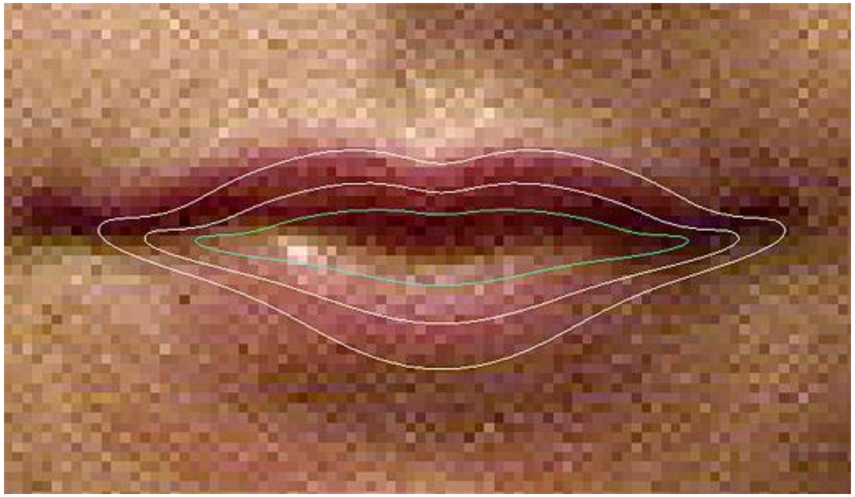
Profa. Mercedes Gonzales Márquez

Tópicos

- Curvas
- Superfícies
- Técnicas principais de Modelagem Geométrica

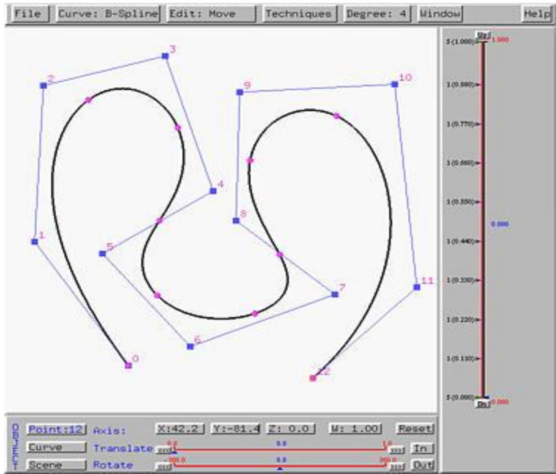
Curvas e Superfícies - Introdução

- Curvas são a base, tanto da geração de formas simples, como círculos e elipses, quanto na criação de projetos complexos como automóveis, navios, aeronaves ou até mesmo faces e corpos humanos.



Curvas e Superfícies - Introdução

- Desempenham um papel importante em várias áreas, como criação de objetos e visualização de fenômenos científicos.
- Uma curva pode ser representada:
  - Por uma sucessão de linhas retas que ligam pontos específicos.
  - Por um conjunto de pontos de controle que determina através de uma equação uma curva passe próximo deles.



Representação de Curvas

- A representação analítica de curvas pode usar ou não parâmetros, se subdividindo então em:

1. paramétricas
2. não-paramétricas
    2.1. explícitas
    2.2. implícitas.

Representação de Curvas

.1 Formas paramétricas

- As coordenadas são dadas em termos de um ou um conjunto de parâmetros (t, θ, etc.).

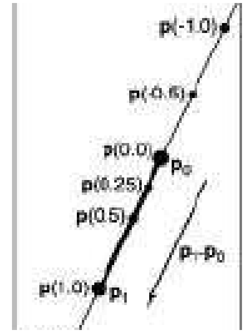
  Exemplo de curvas no plano: $P(t) = (x(t), y(t))$

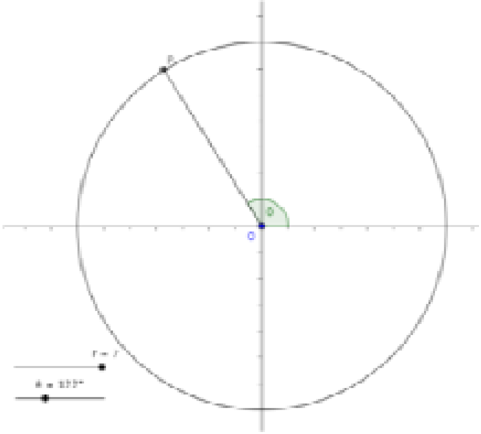
Circuferências

$p(t) = (r \cos t, r \text{ sen } t)$

➢Segmentos

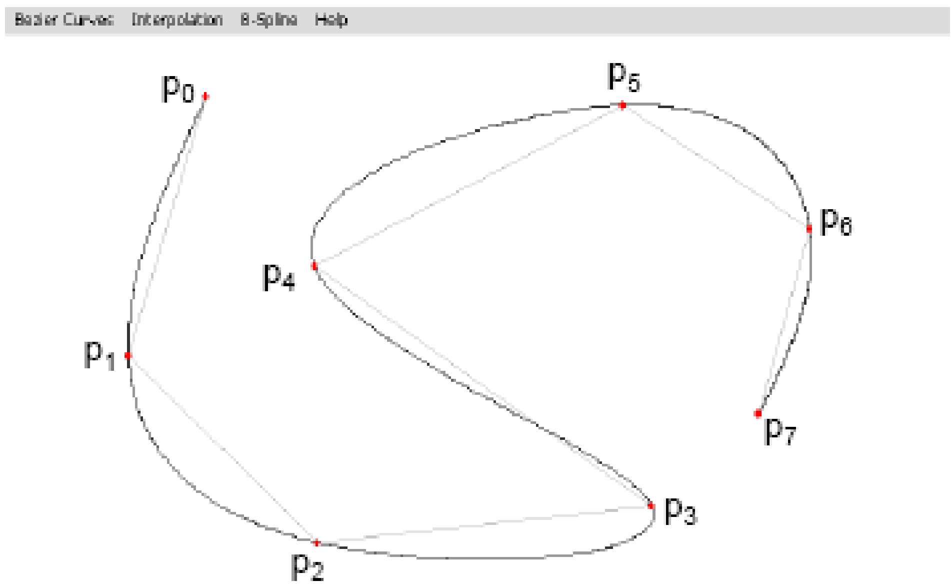
$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$





Representação de Curvas

Curvas de Bézier



$$P(t) = \Sigma B_{n,i}(t)\, p_i \quad \text{onde } B_{n,i}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i - (1-t)^{n-i}$$

Combinação convexa de p_i

Representação de Curvas

2. Formas não-paramétricas

Não há parâmetros na representação

$$y = f(x) \text{ ou } x = f(y) \text{ ou } \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$$

Representação de Curvas

2.1 Forma *não-paramétrica explícita* : É dada por uma equação do tipo $y = f(x)$, ou seja uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras. Exemplos:

1. Equação genérica explícita de uma parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. Equação de uma reta

$$y = mx + b$$

$$y = 2x – 1 \text{ ou } x = ½ (y + 1)$$

3. Equação de um semi-círculo de raio 2

$$y = \sqrt{2^2 - x^2} \qquad ou \qquad x = \sqrt{2^2 - y^2}$$

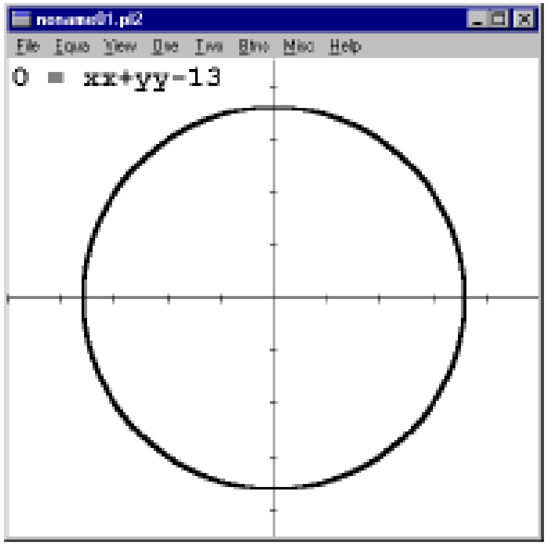
4. Polinômios:

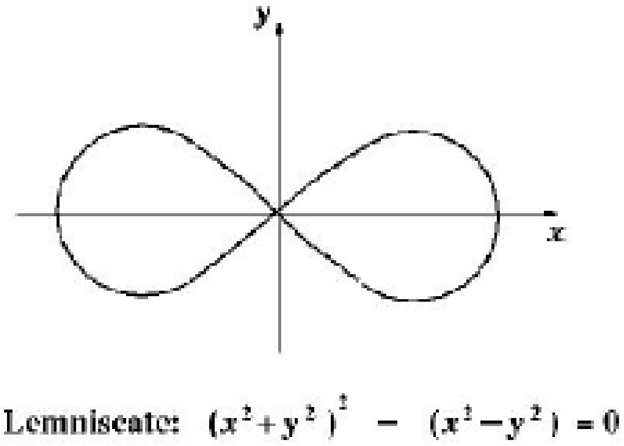
$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Representação de Curvas

- Obtém-se um valor de *y* para cada valor de *x* dado.

Não permite representar correspondências sobrejetivas!





Representação de Curvas

2.2. A Forma *não-paramétrica implícita* não tem essa limitação. Nela as coordenadas são relacionadas por uma função. A sua forma é f(x,y)=0 ou f(x,y,z)=0 (em 3D).

- Exemplo: $x^2 + y^2 = R^{2,}$ $f(x,y)= x^2 + y^2 - R^2= 0$

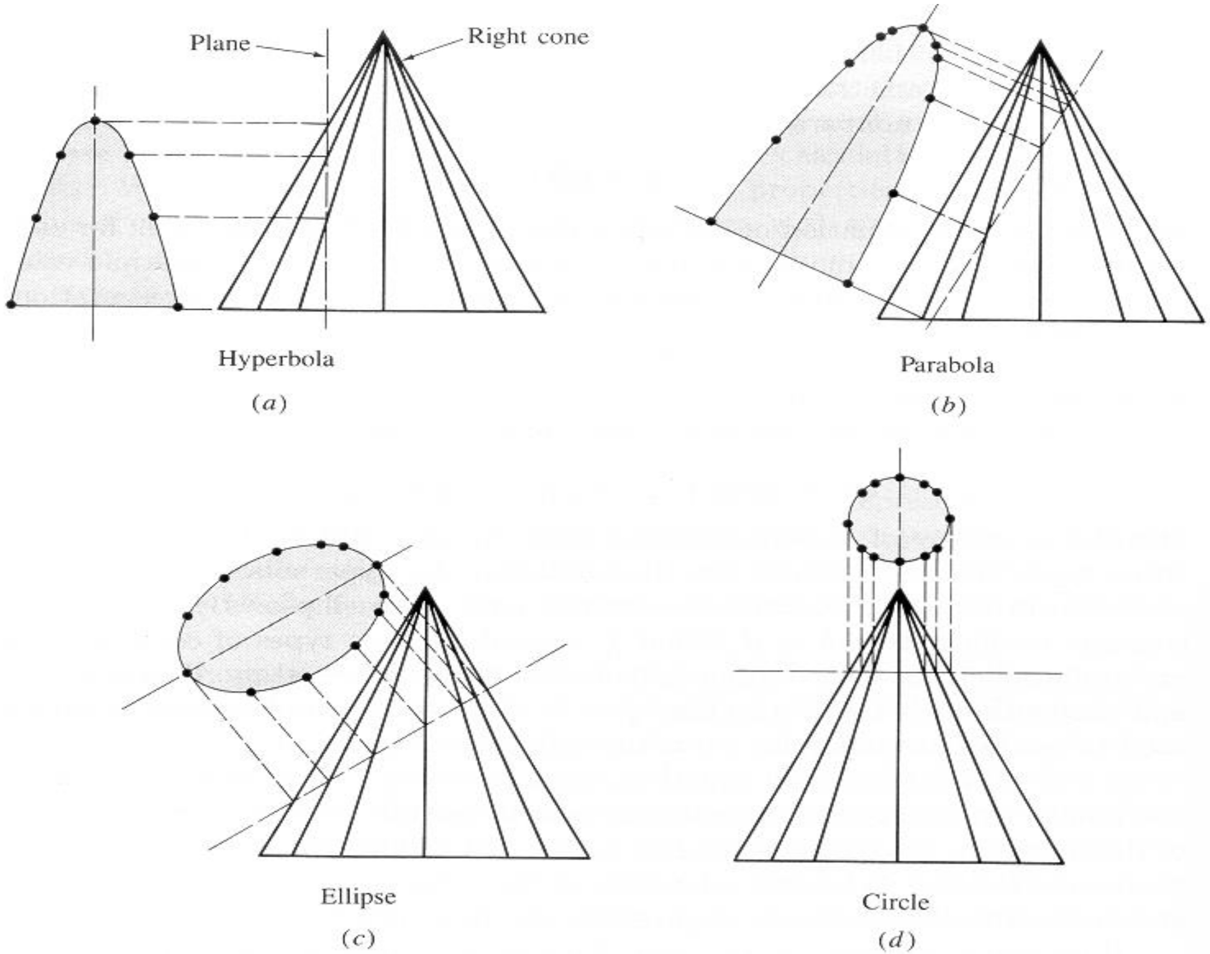
Representação de Curvas

- Exemplo: seções cônicas.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

- Essa expressão representa a variedade de curvas planas denominadas seções cônicas. Essas curvas (cinco) são obtidas pelo corte de um cone por um plano, resultando em: círculo, elipse, parábola, hipérbole, reta.

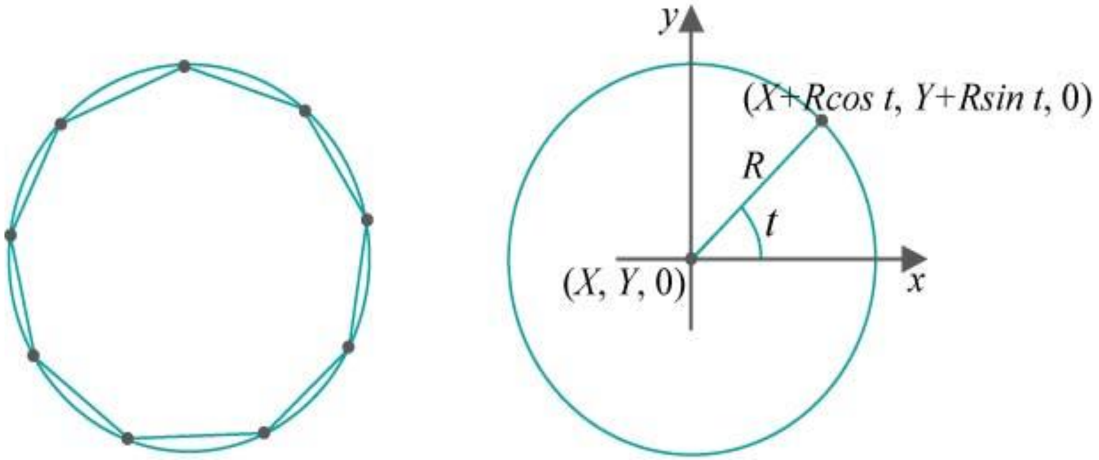
Representação de Curvas



Representação de Curvas

Cônica	Forma Paramétrica	Forma Implícita
Elipse	$x = a \cos \theta$ $y = b \,sen\, \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola	$x = at^2$, $y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	$x = a \cosh \theta$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $y = b \,senh\, \theta$	

Aproximando Objetos Uni-dimensionais



(a) (b)

Suponha que existe uma função que imprime um ponto na tela dadas suas coordenadas (x,y,z), como vc implementaria o círculo a partir da sua equação paramétrica x=X+Rcost, y=Y+Rsint, z=0, 0<=t<=2pi

Onde (X,Y,0) é o centro e R é o raio do círculo.

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

- Considere N=4 e t=2*PI*i/N

- Para i=0 => t= 2*PI*0/4 = 0 = 0
- Para i=1 => t=2*PI*1/4 = PI/2 = 90
- Para i=2 => t=2*PI*2/4 = PI = 180
- Para i=3 => t=2*PI*3/4 = 3*PI/2 = 270

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

Exercícios:

1. Como você implementaria o círculo a partir da sua equação explícita
2. Usando a equação implícita como você pintaria de cores diferentes os pontos do círculo, os pontos dentro do círculo e os pontos fora do círculo.
3. Como vc desenharia uma curva senoidal entre x=-2*pi e x=2*pi, com a equação paramêtrica (x,y)=(t,sen t) e com a equação explícita y=sen x;
4. Como vc deduziria a equação de uma hélice (espiral) a partir da equação do círculo.

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

Exercícios:

5. Como você implementaria um cone a partir da equação do círculo.

6. Como você implementaria um anel a partir da equação de um círculo.

Curvas de Bézier

- É uma técnica de aproximação de curvas.
- Uma curva de Bézier pode ser gerada por 3, 4, até $n + 1$ pontos de controle (ajuste para um polinômio de grau n).
- Geralmente utiliza-se quatro pontos de controle (*forma cúbica*).
- A curva passa pelo primeiro e pelo último ponto de controle.

Curvas de Bézier

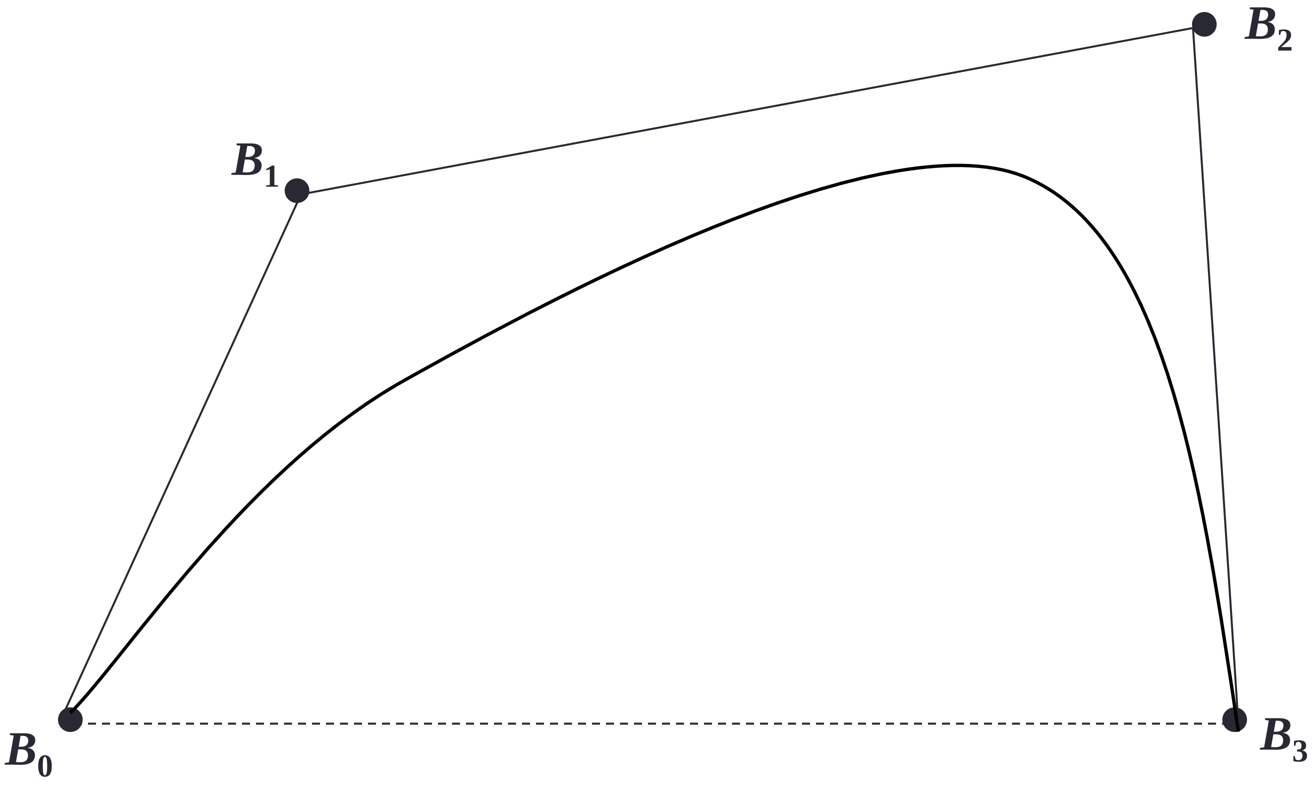


Figura 1

Curvas de Bézier

- A curva paramétrica de Bézier é definida como:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

- Onde B_i são n+1 pontos de controle da curva e $J_{n,i}$ (*t*) são funções peso (*blending functions*). Essas funções foram escolhidas de maneira que

(1) Sejam funções polinomiais

(2) Constituam pesos de forma que P(t) seja uma função polinomial obtida pela média ponderada que combina a influência de todos os pontos de controle.

Curvas de Bézier

- Para que os $J_{n,i}(t), \quad 0 <= i <= n$

Sejam os n+1 pesos de P(t) eles devem satisfazer

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t) = 1, \qquad 0 \le t \le 1$$

E para eles serem funções polinomiais de grau n, pensou-se na seguinte decomposição e o fato da potencia de 1 sempre ser 1. $1 = (1-t) + t$

$$1 = 1^2 = ((1-t) + t)^2$$

$$1 = 1^3 = ((1-t) + t)^3$$

$$1 = 1^n = ((1-t) + t)^n$$

Curvas de Bézier

- E pelo conhecido binômio de Newton

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Temos então que

$$1 = ((1-t)+t)^2 = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2$$

$$1 = ((1-t)+t)^3 = t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3$$

$$1 = ((1-t)+t)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

Curvas de Bézier

- Dessa forma as curvas de Bézier são definidas por

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

Onde os $J_{n,i}(t)$

são descritos pelos polinômios de Bernstein como:

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i} t^i$$

onde n é o grau dos polinômios e: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

(i = 0, 1, ..., n) são os coeficientes binomiais.

- Essas funções $J_{n,i}$ (*t*) satisfazem as condições:

$J_{n,i}$ (*t*) ≥ 0 para todo i entre 0 e 1, e também:

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t) = 1, \qquad 0 \le t \le 1$$

Curvas de Bézier

- Para n=2

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^{i}$$

$$J_{2,0}(t) = \binom{2}{0}(1-t)^{2}t^{0} = (1-t)^{2}$$

$$J_{2,1}(t) = \binom{2}{1}(1-t)^{1}t^{1} = 2t(1-t)$$

$$J_{2,2}(t) = \binom{2}{2}(1-t)^{0}t^{2} = t^{2}$$

Curvas de Bézier

- Exemplo da definição de uma curva de Bézier a partir de 3 pontos de controle

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

$P(t) = (1 - t)^2 B_0 + 2t (1 - t) B_1 + t^2 B_2,$
$P(t) = (x(t), y(t)) = (1 - t)^2 (x0,y0) + 2t (1 - t) (x1,y1) + t^2(x2,y2)$

Para B0=(-4,0), B1=(0,5), B2=(7,0)

$x(t)= (1 - t)^2 x0 + 2t (1 - t) x1 + t^2 x2$
$x(t)=-4(1 - t)^2 + 7t^2=-4+8t-4t^2+ 7t^2=-4+8t+3t^2$

$y(t)= (1 - t)^2 y0 + 2t (1 - t) y1 + t^2 y2$
$y(t)=10t (1 - t)=10t-10t^2$

$P(t)=(-4+8t+3t^2,10t-10t^2)$

Curvas de Bézier

n=2

P(t) = $(1 - t)^2 B_0 + 2t(1 - t) B_1 + t^2 B_2$,

$$P(t) = [t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

n=3

P(t) = $(1 - t)^3 B_0 + 3t(1 - t)^2 B_1 + 3t^2(1 - t) B_2 + t^3 B_3$,

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier - Problemas

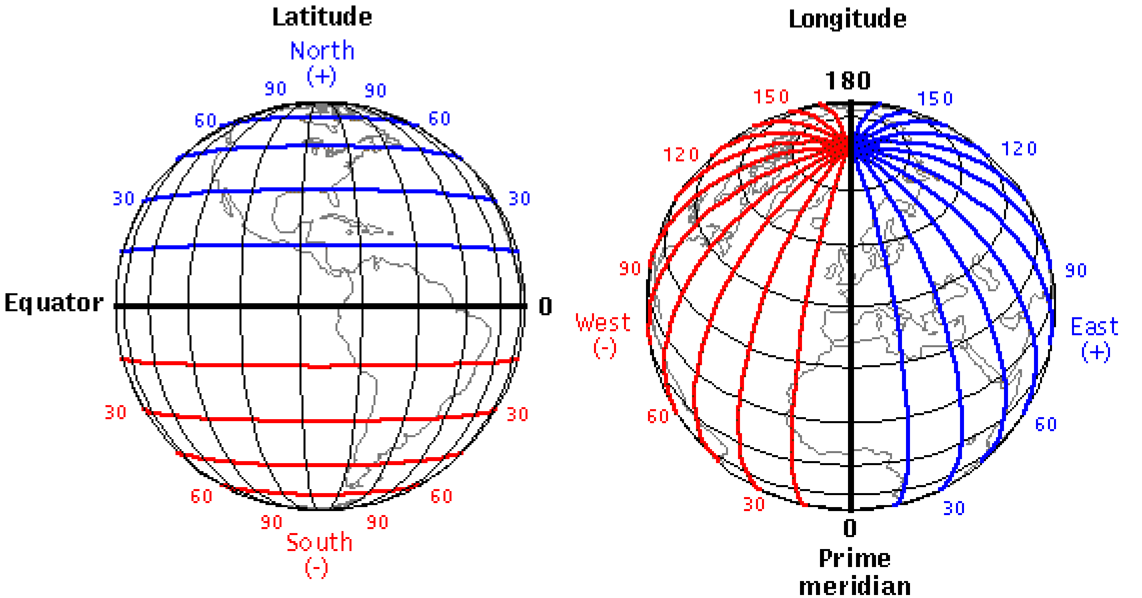
1. Falta de controle local : Uma alteração em um ponto no polígono de Bézier acarreta alterações em toda a curva de Bézier. Indesejável quando desejamos fazer ajustes finos.
2. O grau do polinômio cresce com o número de pontos de controle do polígono de controle.

Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Uma circunferência ou uma hélice são objetos unidimensionais pois são topologicamente equivalentes a uma linha. Agora veremos como aproximar objetos bi-dimensionais como uma esfera ou um cilindro.

A representação paramétrica de uma esfera segue o modelo de coordenadas geográficas do globo terrestre (latitude e longitude).

https://www.geogebra.org/m/HJs4kEtb



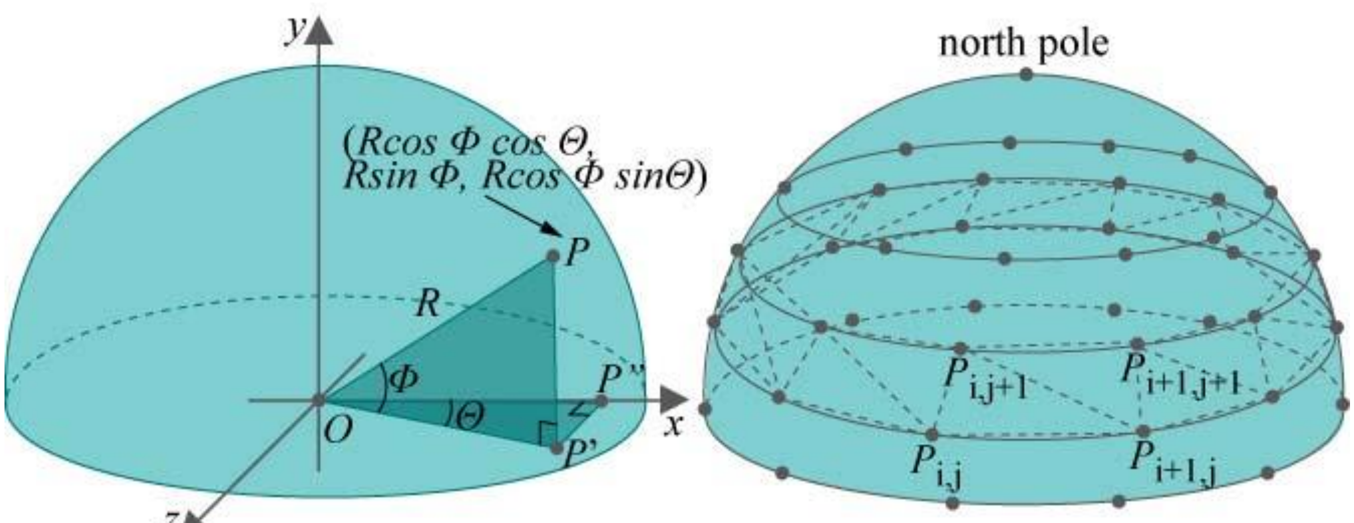
Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Considere um hemisfério de raio R, centralizado na origem O e com sua base circular sobre o plano xz. Suponha que as coordenadas esféricas de um ponto P sobre o hemisfério são a longitude theta e a latitude phi.

As coordenadas cartesianas são:

$$(RCos\emptyset Cos\theta, RSin\emptyset, RCos\emptyset Sin\theta),$$

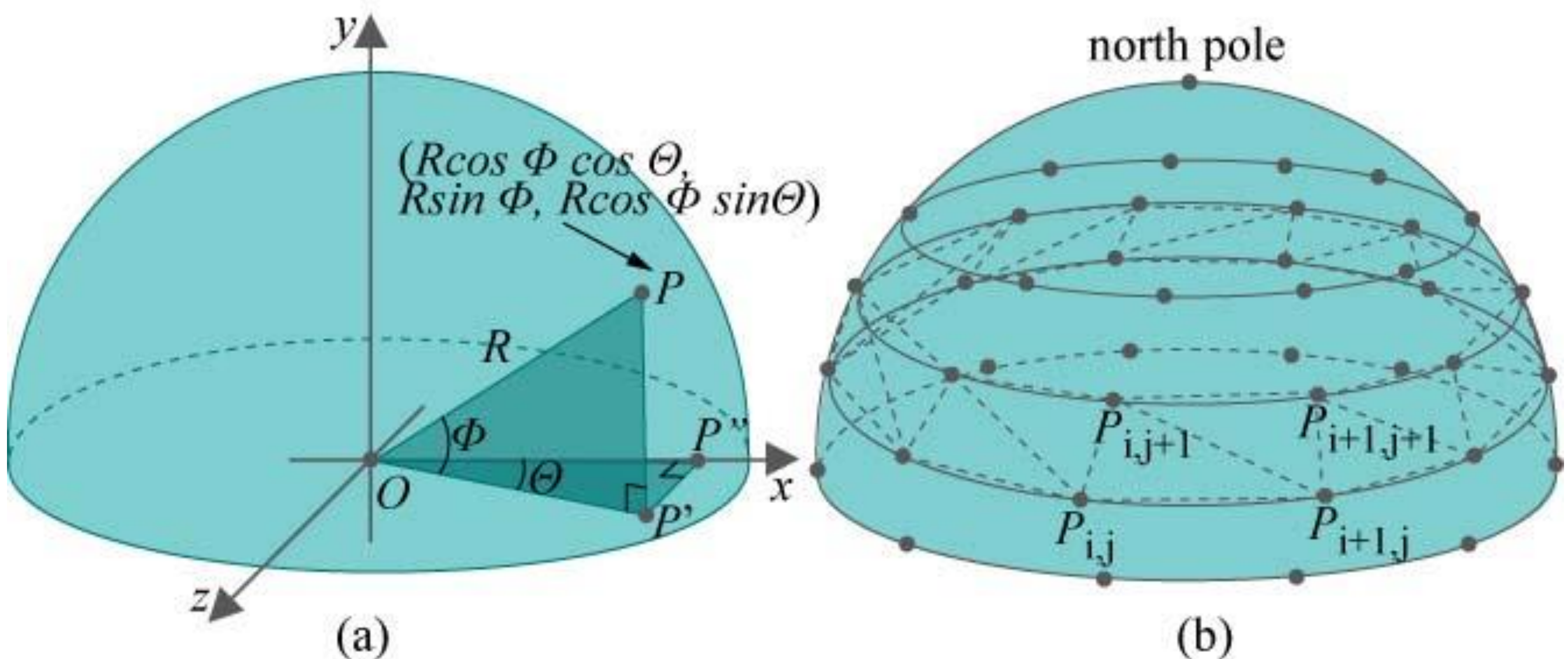
$$0 \leq \theta \leq 2\pi \ e \ 0 \leq \emptyset \leq \pi/2$$



(a) (b)

Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Amostramos o hemisfério em uma malha de (p+1)(q+1) pontos Pij, 0<=i<=p, 0<=j<=q, onde a longitude de Pij é (i/p)*2PI e sua latitude (j/q)*PI/2. Em outros palavras (p+1) pontos longitudinalmente igualmente espaçados são escolhidos entre cada uma das q+1 latitudes igualmente espaçadas. Na figura p=10 e q=4.



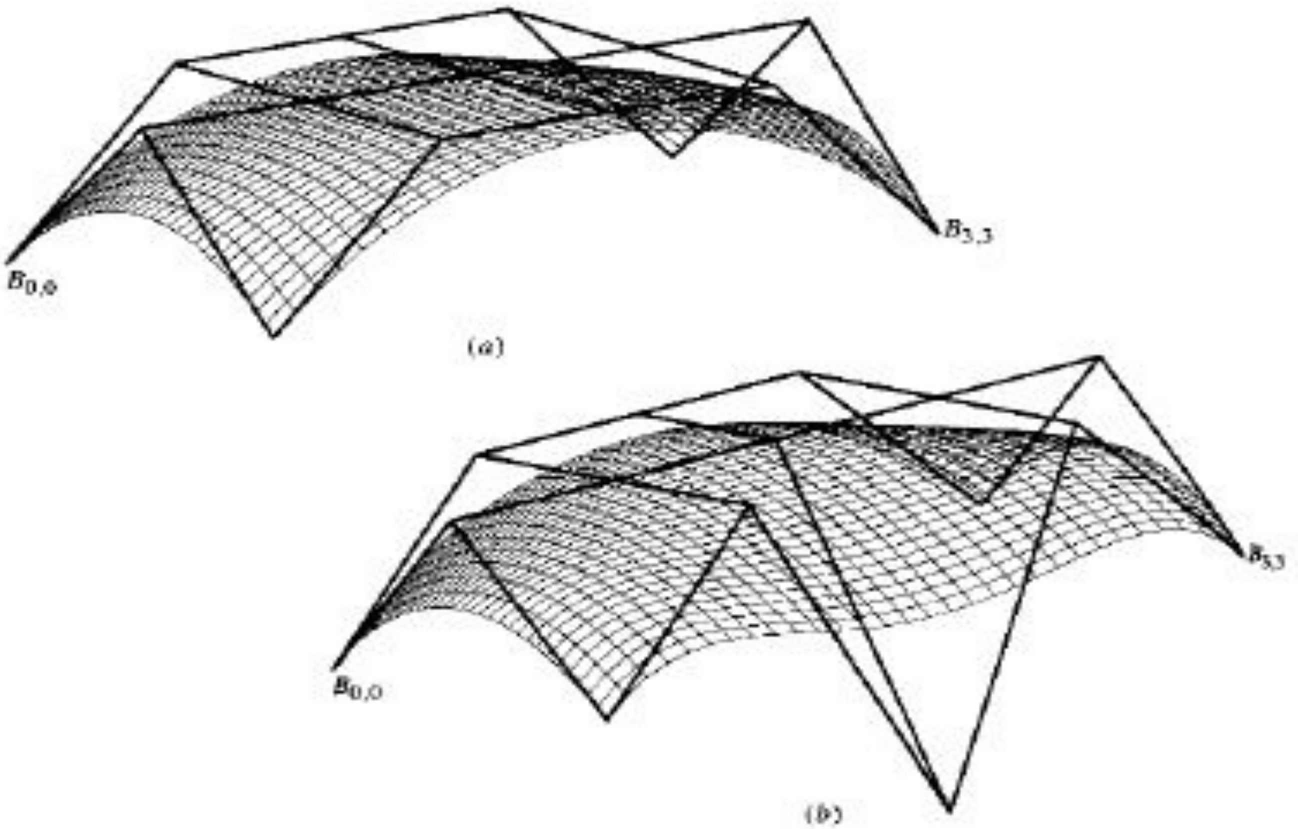
Superfícies Bézier

- Generalização da idéia de curva de Bézier.
- Sejam B_{ij}, *i=0,...,m*, *j=0,...,n*, um conjunto de pontos no R^3 de tal forma que sua projeção no plano *x0y* seja formada pelos vértices de *mn* retângulos de mesmas dimensões. A superfície de Bézier definida no domínio [0,1]x[0,1] é

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_{ij} J_{ni}(u) K_{mj}(v)$$

Onde J_{ni} e K_{mj} são os polinômios de Bernstein.

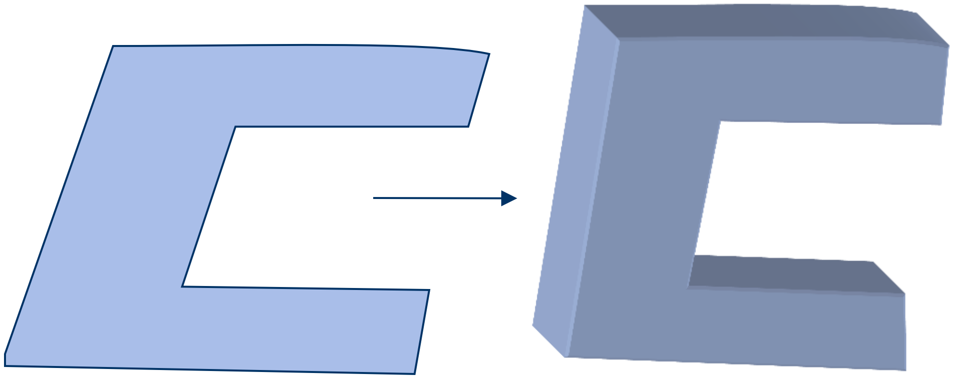
Superfícies Bézier

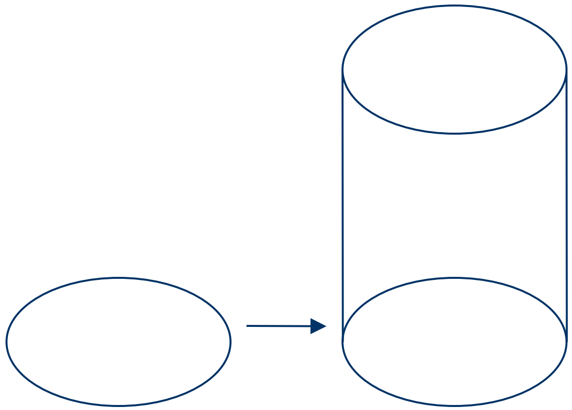


Varredura (*Sweeping*)

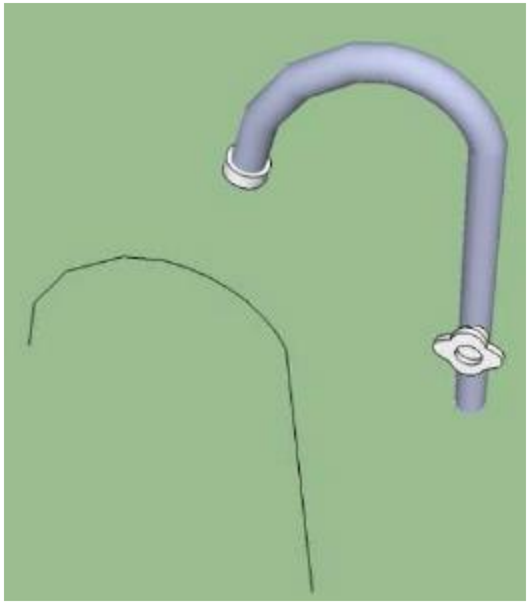
- Uma superfície é descrita quando uma curva C1 (curva geratriz) é deslocada no espaço, ao longo de uma trajetória dada por uma outra curva C2 (caminho ou diretriz).

  - Varredura translacional (Extrusão ou superfícies geradas por deslocamento)



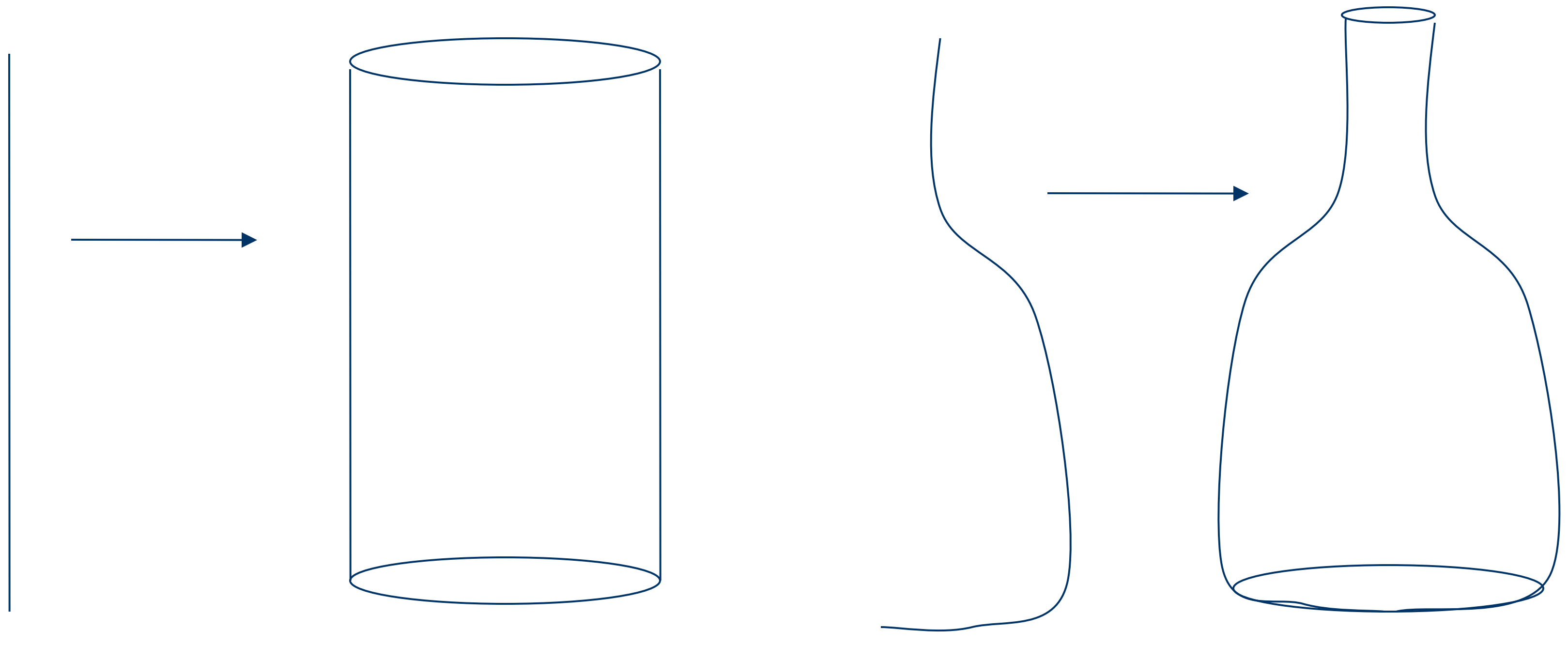


Varredura (*Sweeping*)



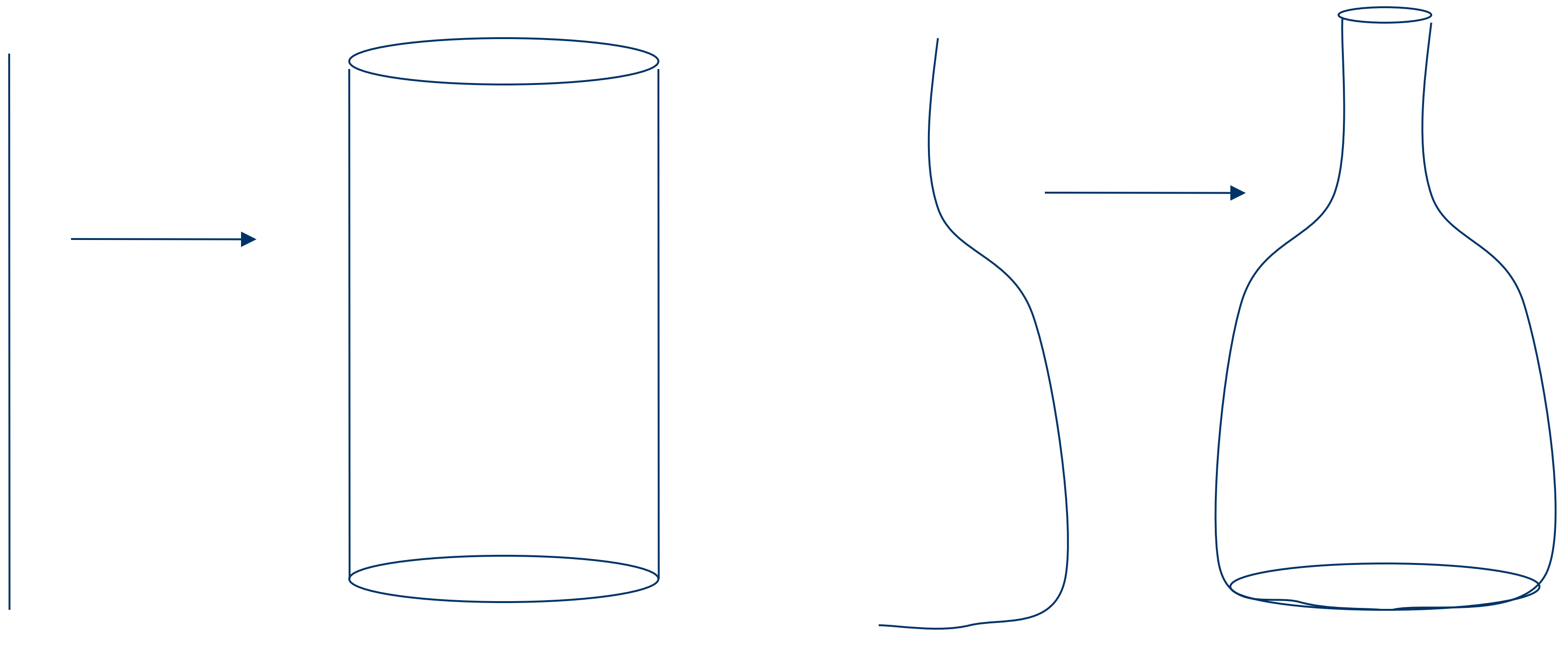
Varredura (*Sweeping*)

- - Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)



Varredura (*Sweeping*)

- - Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)
-



Varredura (*Sweeping*)