Lógica de Primeira Ordem

Profa. Mercedes Gonzales Márquez

Lógica Proposicional - Limitações

- A lógica proposicional, que estudamos até agora, cobre a análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos.
- Porém, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações matemáticas.

Lógica Proposicional - Limitações

Exemplos

- 1 “Todos os alunos de SI são estudantes dedicados”, e que
- 2 “Joana é aluna de SI.
- Intuitivamente, podemos, então, concluir que
- 3 “Joana é uma estudante dedicada.”
- Este tipo de inferência só é possível após introduzirmos o conceito de predicados e quantificadores.

Predicados

- Um predicado é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.
- Intuitivamente, predicados: dão qualidades a sujeitos, relacionam sujeitos entre si, ou relacionam sujeitos a objetos.

Predicados

- Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis. Um predicado P(x1, x2, . . . , xn) de n variáveis é chamado de um predicado n-ário.
- Seja P(x) o predicado unário (de 1 variável)

“$x \geq 10$”.

P(5) = F, pois substituindo x por 5 em “$x \geq 10$”, obtemos uma afirmação falsa.

Predicados

- Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis. Um predicado $P(x1, x2, . . . , xn)$ de n variáveis é chamado de um predicado n-ário.
- Seja $P(x)$ o predicado unário (de 1 variável)

“$x \geq 10$”.

$P(5) = F$, pois substituindo x por 5 em “$x \geq 10$”, obtemos uma afirmação falsa.

Predicados

- Seja C(x, y) o predicado binário

“x é capital de y”.

C(Brasília, Brasil) = V, pois substituindo x por Brasília e y por Brasil em “x é capital de y”, obtemos uma afirmação verdadeira.

Quantificadores

- Como um predicado não tem valor de verdade em si, é preciso instanciar os valores de suas variáveis para transformá-lo em uma proposição.
- Para transformar um predicado em uma proposição, podemos

1. atribuir valores específicos para todas variáveis,
2. quantificar em qual faixa de valores de cada variável a proposição pode ser considerada verdadeira. Usamos palavras como “nenhum”, “todos” e “algum” para quantificar predicados.

Quantificadores - Domínio

- Dado um predicado de várias variáveis, o domínio é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

1. No predicado “$x \geq 2$”, o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais ou o dos inteiros.
2. No predicado “A pessoa x nasceu no país y”, o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo. O domínio de um predicado ´e essencial para sua quantificação.

Quantificador Universal

- Dado um predicado P(x), sua quantificação universal é $\forall x : P(x)$ significando "Para todos os valores x no domínio, P(x) é verdadeiro" ou simplesmente

"Para todo x no domínio, P(x)" O símbolo $\forall$ é o símbolo de quantificador universal. A proposição

$\forall x : P(x)$ é verdadeira se P(x) é verdadeiro para todo x no domínio, falsa se há algum x no domínio tal que P(x) seja falso. Um elemento x tal que P(x) = F é um contra-exemplo para $\forall x : P(x)$.

Quantificador Existencial

- Dado um predicado P(x), sua quantificação existencial é ∃x : P(x) significando "Existe um valor de x no domínio tal que P(x) é verdadeiro" ou simplesmente

"Existe x no domínio tal que P(x)" O símbolo ∃ é o símbolo de quantificador existencial. A proposição ∃x : P(x) é verdadeira se P(x) é verdadeiro para ao menos um x no domínio, falsa se para todo x no domínio P(x) é falso.

Quantificador Universal/Existencial

O quantificador universal ($\forall$) corresponde a uma conjunção e o quantificador existencial ($\exists$) corresponde a uma disjunção.

Por exemplo, supondo D = {a, b, c}, a fórmula $\forall X p(X)$ denota $p(a) \wedge p(b) \wedge p(c)$ e a fórmula $\exists X q(X)$ denota $q(a) \vee q(b) \vee q(c)$. Assim, lembrando que

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$, é fácil perceber que

$\neg\forall X p(X) \equiv \exists X \neg p(X)$. De modo análogo, concluímos que $\neg\exists X p(X) \equiv \forall X \neg p(X)$.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como leis de De Morgan:
- Leis de De Morgan para quantificadores

$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$

$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Negando expressões quantificadas

- P : “Todos os programas de computador são finitos.”
- ¬P : “Nem todos os programas de computador são finitos.” ≡ “Existe um programa de computador que não ´e finito.”

Negando expressões quantificadas

- Verifique se as sentenças a seguir são equivalentes:

– “Nem toda estrada é perigosa” e “Algumas estradas não são perigosas”.

– “Nem todo bêbado é fumante” e “Alguns bêbados são fumantes”.

Enunciados Categóricos

- Há quatro tipos de sentenças, na lógica de predicados, denominadas enunciados categóricos:
- Universal afirmativo: enunciados da forma

$\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$ como, por exemplo, “Todos os homens são mortais”.

- Universal negativo: enunciados da forma

$\forall X[p(X) \rightarrow \neg q(X)]$ como, por exemplo, “Nenhum homem é extra-terrestre”.

Enunciados Categóricos

- Particular afirmativo: enunciados da forma

$\exists X[p(X) \land q(X)]$ como, por exemplo, "Alguns homens são cultos".

- Particular negativo: enunciados da forma

$\exists X[p(X) \land \neg q(X)]$ como, por exemplo, "Alguns homens não são honestos".

Exemplos de Enunciados Categóricos

- “Toda cobra é venenosa”:

$\forall X[cobra(X) \rightarrow venenosa(X)]$

- “Os remédios são perigosos”:

$\forall X[remedio(X) \rightarrow perigoso(X)]$

- “Nenhuma bruxa é bela”:

$\forall X[bruxa(X) \rightarrow \neg bela(X)]$

- “Não existe bêbado feliz”:

$\forall X[bebado(X) \rightarrow \neg feliz(X)]$

Exemplos de Enunciados Categóricos

- “Algumas pedras são preciosas”:

$\exists X[pedra(X) \wedge preciosa(X)]$

- “Existem plantas que são carnívoras”:

$\exists X[planta(X) \wedge carnivora(X)]$

- “Alguns políticos não são honestos”:

$\exists X[politico(X) \wedge \neg honesto(X)]$

- “Há aves que não voam”:

$\exists X[ave(X) \wedge \neg voa(X)]$

Quantificador – ordem de precedência

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os operadores da lógica proposicional ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, . . .). Por exemplo:

1. A proposição $\forall x : P(x) \vee Q(x)$ significa

$(\forall x : P(x)) \vee Q(x)$. Note que a proposição não significa $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$. Deve-se usar parênteses para expressar o que realmente se deseja.

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:

“Nenhuma arara é pequena.”

“Araras são coloridas e grandes.”

“Existe uma arara que não é colorida, nem pequena.”

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

Primeiro tomamos como universo de discurso o conjunto de todos os animais, então definimos os seguintes predicados:

A(x) : “x é uma arara”

C(x) : “x é colorido”

P(x) : “x é pequeno”

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

"Nenhuma arara é pequena":

$\neg\exists x : (A(x) \wedge P(x))$

Forma equivalente: $\forall x : (A(x) \rightarrow \neg P(x))$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

"Araras são coloridas e grandes":

$\forall x : (A(x) \rightarrow C(x) \wedge \neg P(x))$

"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena":

$\exists x : (A(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg P(x))$

Quantificadores Aninhados

Muitas expressões usam múltiplos quantificadores aninhados. Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

1. A expressão

$\forall x : \forall y : ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$ significa

"O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo."

2. A expressão $\forall x : \exists y : (x + y = 0)$ significa

"Todo número real tem um número real oposto (isto é, que somado ao original resulta em zero)."

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

Seja o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas: $A(x, y)$: "A pessoa x ama a pessoa y"

$\forall x : \exists y : A(x, y)$ significa "Todo mundo ama alguém."

$\exists y : \forall x : A(x, y)$ significa "Existe alguém que é amado por todo mundo."

$\forall y : \exists x : A(x, y)$ significa "Todo mundo é amado por alguém."

$\exists x : \forall y : A(x, y)$ significa "Existe alguém que ama todo mundo."

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:

“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”

“Há um estudante que não sabe dirigir nem tem amigos que saibam.”

“Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir.”

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes da universidade:

D(x) : “x sabe dirigir”

A(x, y) : “x e y são amigos”

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como a seguir.

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

1. "Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir": $\forall x : \exists y : (A(x, y) \wedge \neg D(y))$
2. "Há um estudante que não sabe dirigir nem tem amigos que saibam.":

$\exists x : (\neg D(x) \wedge \forall y : (A(x, y) \rightarrow \neg D(y)))$

3. "Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir":

$\forall x : \exists y : (A(x, y) \wedge \neg D(y) \wedge \forall z : (A(x, z) \wedge \neg D(z) \rightarrow y = z))$ ou, de forma equivalente: $\forall x : \exists y : (A(x, y) \wedge \neg D(y) \wedge \forall z : (A(x, z) \wedge y \neq z \rightarrow D(z)))$

Negação de quantificadores aninhados

A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$

$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Negação de quantificadores aninhados

Seja $A(x, y)$ a proposição "A pessoa x ama a pessoa y" com domínio todas as pessoas do mundo.

$P : \forall x : \exists y : A(x, y)$ "Todo mundo ama alguém"

$\neg P : \neg\forall x : \exists y : A(x, y) \equiv$

$\exists x : \neg\exists y : A(x, y) \equiv$

$\exists x : \forall y : \neg A(x, y)$

"Existe alguém que não ama ninguém."

Negação de quantificadores aninhados

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$D(x)$: “x sabe dirigir”

$A(x, y)$: “x e y são amigos”

Proposição

$P : \forall x : \exists y : (A(x, y) \wedge \neg D(y))$ Afirmativa: “Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”

$\neg P : \exists x : \forall y : (A(x, y) \rightarrow D(y))$ Negação: “Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir.”

Exercícios

- Traduza as sentenças em símbolos do Cálculo de Predicados. Para realizar a tradução, em cada bloco de sentenças simbolize os predicados, as constantes e as variáveis, e depois rescreva a sentença toda utilizando estes símbolos.

(1) Todos são felizes.

(2) Algumas pessoas são felizes.

(3) Nenhuma pessoa é infeliz.

(4) João não é feliz.

(5) Carlos e Carolina são felizes.

Exercícios

6. Romeu ama Julieta
7. Édipo ama Jocasta.
8. Todos amam Maria.
9. Maria não ama ninguém
10. Romeu ama Maria e Romeu não ama Julieta.
11. Todos amam Romeu mas ele não ama ninguém.
12. Jane ama Tarzan que também ama Jane.

Exercícios

13. Tudo que sobe, desce.
14. Nenhum leão é manso.
15. Todo circo tem palhaço.
16. Toda pedra preciosa é cara.
17. Nenhum homem é infalível.
18. Alguns escritores são cultos.
19. Ninguém gosta de impostos.
20. Existem impostos que não são bem empregados

Exercícios

- Qual é o valor-verdade de cada uma das fórmulas a seguir na interpretação onde o domínio é o conjunto de números inteiros, O(x) é "x é ímpar", L(x) é "x < 10" e G(x) é "x > 9"?

1. $(\neg \exists x)(O(x))$.
2. $(\forall x)(L(x) \rightarrow O(x))$.
3. $(\exists x)(L(x) \wedge G(x))$.
4. $(\forall x)(L(x) \vee O(x))$.

Exercícios

- Qual é o valor-verdade de cada uma das fórmulas a seguir na interpretação onde o domínio consiste nos números inteiros?

1. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$.
2. $(\exists y)(\forall x)(x + y = x)$.
3. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.
4. $(\exists y)(\forall x)(x + y = 0)$.
5. $(\forall x)(\forall y)((x < y) \vee (y < x))$.
6. $(\forall x)[(x<0) \rightarrow (\exists y)((y > 0) \wedge (x+y=0))]$.
7. $(\exists x)(\exists y)(x^2 = y)$.
8. $(\forall x)(x^2 > 0)$.

Regras de Inferência para proposições quantificadas

Estas regras de inferência são muito usadas em argumentos matemáticos, muitas vezes de forma implícita. Regras de inferência importantes para lógica de predicados:

Nome	Regra de inferência
Instanciação universal	$\begin{array}{rl} & \forall x : P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \end{array}$
Instanciação existencial	$\begin{array}{rl} & \exists x : P(x) \\ \hline \therefore & P(c) \text{ para algum elemento } c \end{array}$

Inferência na lógica de predicados

Consideremos o argumento:

homem(socrates), $\forall X$[homem(X) $\rightarrow$ mortal(X)} |= mortal(socrates)

Normalizando essas fórmulas, obtemos: homem(socrates),¬homem(X) ∨ mortal(X)} |= mortal(socrates).

Como a variável X é universal, podemos substituí-la por qualquer constante do domínio (X = socrates), assim obtemos uma nova instância da fórmula ¬homem(X) ∨ mortal(X) e, assim temos:

Inferência na lógica de predicados

Consideremos o argumento:

homem(socrates), $\forall X$[homem(X) $\rightarrow$ mortal(X)} |= mortal(socrates)

Normalizando essas fórmulas, obtemos: homem(socrates),¬homem(X) ∨ mortal(X)} |= mortal(socrates).

Como a variável X é universal, podemos substituí-la por qualquer constante do domínio (X = socrates), assim obtemos uma nova instância da fórmula ¬homem(X) ∨ mortal(X) e, assim temos:

Inferência na lógica de predicados

(1)	$homem(socrates)$	Δ
(2)	$\neg homem(socrates) \vee mortal(socrates)$	Δ/X=socrates
(3)	$mortal(socrates)$	$RES(1,2)$

Outro Exemplo

(a) “Todos os matriculados em Introdução Inteligência Artificial são estudantes dedicados” e

(b) “Nicoly está matriculada em Introdução à IA” implicam a conclusão

(c) “Nicoly é uma estudante dedicada”

Os predicados, tendo como domínio o conjunto de todos os estudantes:

M(x) : “x está matriculado em Introdução à IA”

D(x) : “x é um estudante dedicado.”

Exemplos

As premissas do argumento são, então:

(a) $\forall x : (M(x) \rightarrow D(x))$ (b) $M(Nicoly)$

A conclusão do argumento é:

(c) $D(Nicoly)$

Derivamos a conclusão a partir das premissas da seguinte forma

1.	$\forall x : (M(x) \rightarrow D(x))$	Premissa (a)
2.	$M(Nicoly) \rightarrow D(Nicoly)$	Instanciação universal de (1)
3.	$M(Nicoly)$	Premissa (b)
4.	$D(Nicoly)$	Modus ponens usando (2) e (3)

Instanciação Universal/Existencial

O princípio de instanciação universal, que nos permite substituir uma variável por uma constante qualquer do seu domínio, só funciona corretamente para variáveis universais. Considere a sentença "Todo mestre tem um discípulo":

$\forall X[mestre(X) \rightarrow \exists Y\ [discipulo(Y, X)]$

Instanciação Universal/Existencial

Sendo X uma variável universal, podemos substitui-la por qualquer constante e a sentença obtida continuará sendo verdadeira. Por exemplo X = Platão e obter a seguinte instância:

mestre(Platão) $\rightarrow$ $\exists$Y [discipulo(Y, Platão)].

Agora, substituindo a variável existencial, obtemos a instância: $\forall$X[mestre(X) $\rightarrow$ [discipulo(Platão, X)], que afirma é que "Todo mestre tem um discipulo chamado Platão". O significado da sentença original foi perdido. Isso acontece porque o valor de Y depende do valor escolhido para X.

Skolemização.

Uma forma de eliminar uma variável existencial , sem alterar o significado da sentença original, é admitir a existência de uma função que representa o valor correto para substituir a variável existencial. Por exemplo, poderíamos substituir a variável existencial Y pela função seguidor(X), veja:

$\forall X[\text{mestre}(X) \rightarrow [\text{discipulo}(\text{seguidor}(X), X)]$

Skolemização.

Skolemize as seguintes fórmulas:

- Todo cão é fiel ao seu dono
- Existe um lugar onde todos são felizes.