

COMPUTAÇÃO GRÁFICA – MODELAGEM GEOMÉTRICA

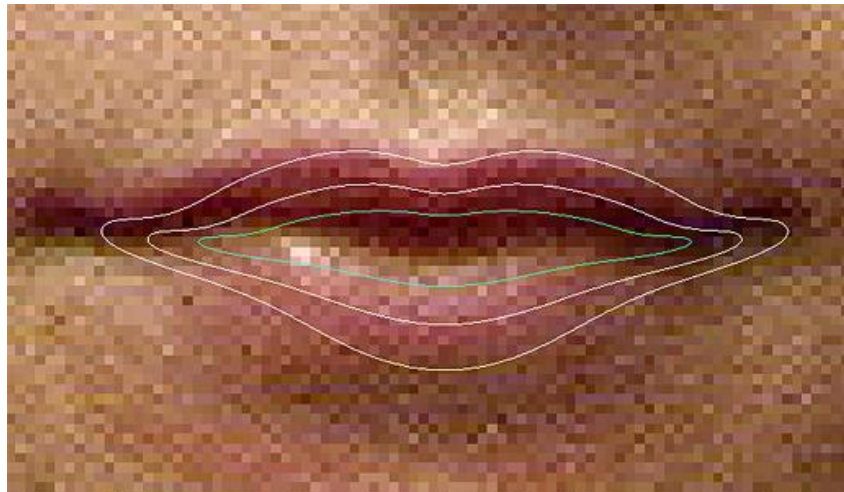
Profa. Mercedes Gonzales
Márquez

Tópicos

- Curvas
- Superfícies
- Técnicas principais de Modelagem Geométrica

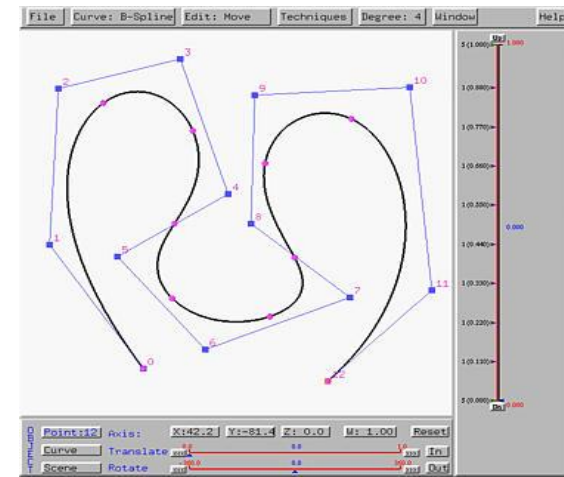
Curvas e Superfícies - Introdução

- Curvas são a base, tanto da geração de formas simples, como círculos e elipses, quanto na criação de projetos complexos como automóveis, navios, aeronaves ou até mesmo faces e corpos humanos.



Curvas e Superfícies - Introdução

- Desempenham um papel importante em várias áreas, como criação de objetos e visualização de fenômenos científicos.
- Uma curva pode ser representada:
 - Por uma sucessão de linhas retas que ligam pontos específicos.
 - Por um conjunto de pontos de controle que determina através de uma equação uma curva passe próximo deles.



Representação de Curvas

- A representação analítica de curvas pode usar ou não parâmetros, se subdividindo então em:
 1. paramétricas
 2. não-paramétricas
 - 2.1. explícitas
 - 2.2. implícitas.

Representação de Curvas

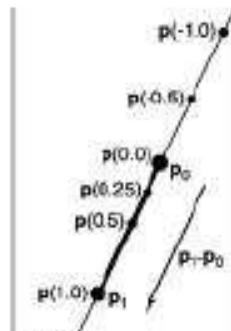
.1 Formas paramétricas

- As coordenadas são dadas em termos de um ou um conjunto de parâmetros (t , θ , etc.).

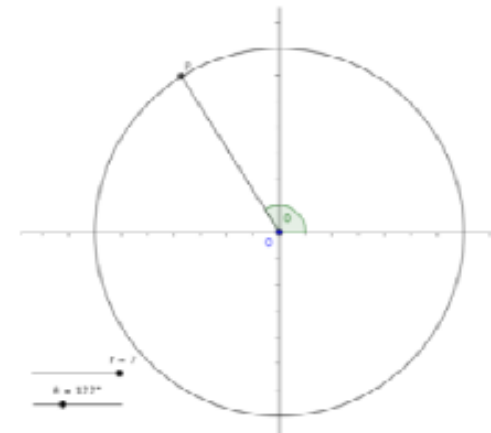
Exemplo de curvas no plano: $P(t) = (x(t), y(t))$

➤ Segmentos

$$p(t) = p_0 + t(p_1 - p_0)$$

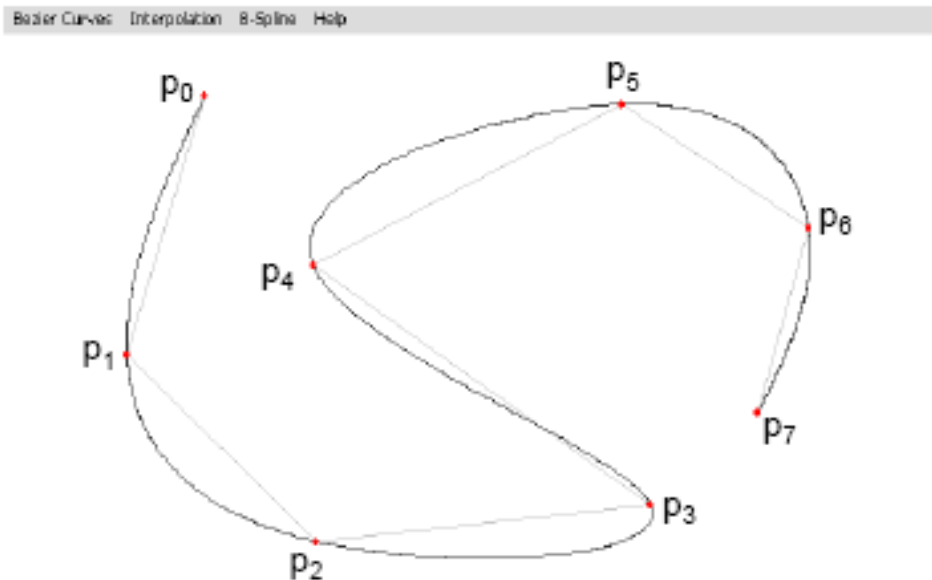


Circuferências
 $p(t) = (r \cos t, r \sin t)$



Representação de Curvas

Curvas de Bézier



$$P(t) = \sum B_{n,i}(t) p_i \quad \text{onde } B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Combinação convexa de p_i

Representação de Curvas

2. Formas não-paramétricas

Não há parâmetros na representação

$$y = f(x) \text{ ou } x = f(y) \text{ ou } f(x,y)=0$$

Representação de Curvas

2.1 Forma não-paramétrica explícita : É dada por uma equação do tipo $y = f(x)$, ou seja uma das coordenadas é explicitamente dada em função das outras. Exemplos:

1. Equação genérica explícita de uma parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. Equação de uma reta

$$y = mx + b$$

$$y = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

3. Equação de um semi-círculo de raio 2

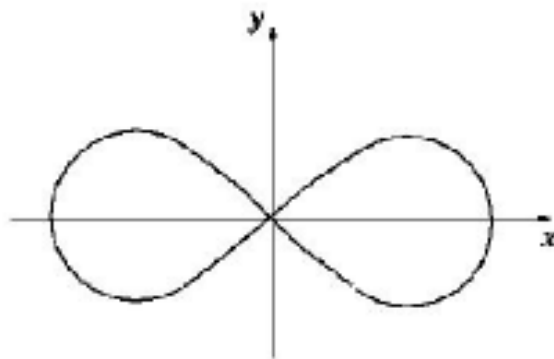
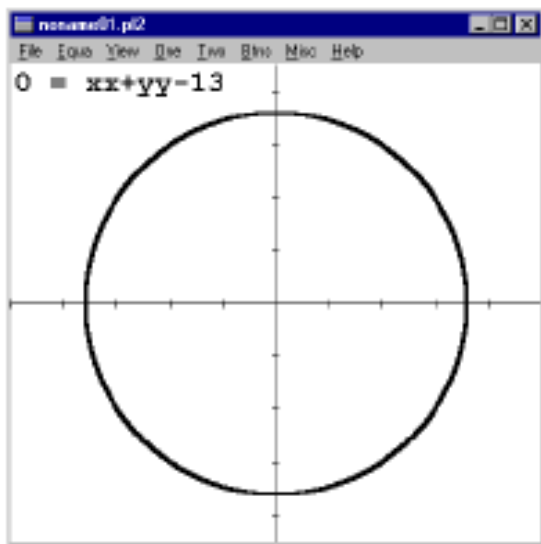
4. Polinômios: $y = \sqrt{2^2 - x^2}$ ou $x = \sqrt{2^2 - y^2}$

$$y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Representação de Curvas

- Obtém-se um valor de y para cada valor de x dado.

Não permite representar correspondências
sobrejetivas!



Lemniscate: $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$

Representação de Curvas

2.2. A Forma *não-paramétrica implícita* não tem essa limitação. Nela as coordenadas são relacionadas por uma função. A sua forma é $f(x,y)=0$ ou $f(x,y,z)=0$ (em 3D).

- Exemplo: $x^2 + y^2 = R^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$

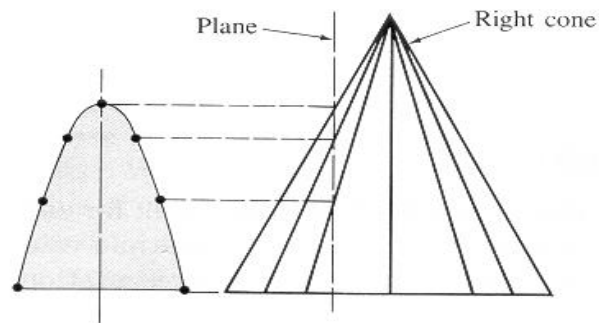
Representação de Curvas

- Exemplo: seções cônicas.

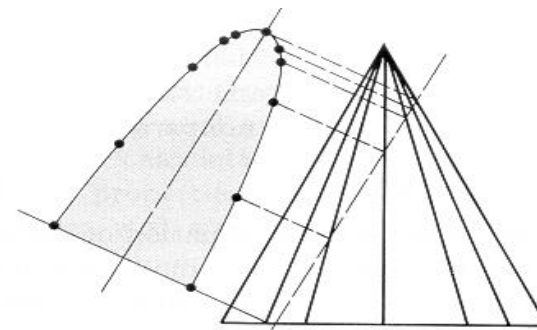
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

- Essa expressão representa a variedade de curvas planas denominadas seções cônicas. Essas curvas (cinco) são obtidas pelo corte de um cone por um plano, resultando em: círculo, elipse, parábola, hipérbole, reta.

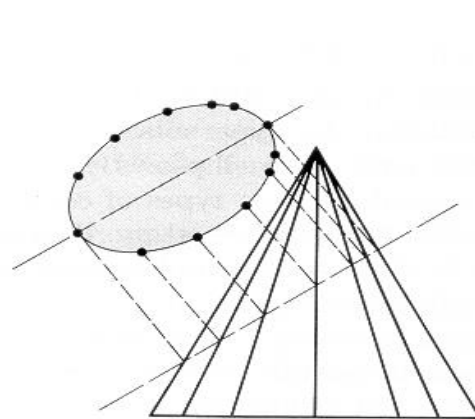
Representação de Curvas



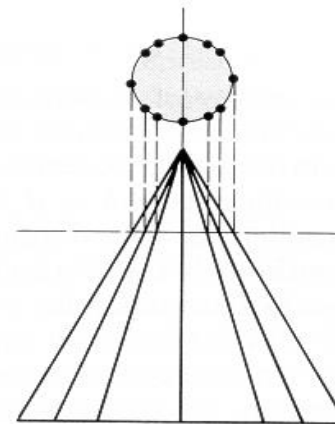
Hyperbola
(a)



Parabola
(b)



Ellipse
(c)

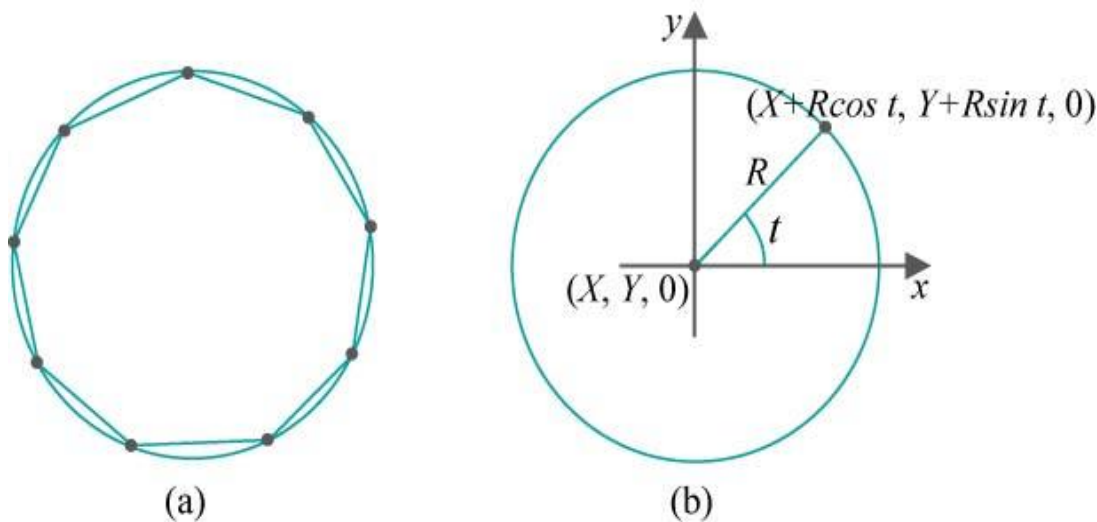


Circle
(d)

Representação de Curvas

Cônica	Forma Paramétrica	Forma Implícita
Elipse	$x = a \cos \theta$ $y = b \sin \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola	$x = at^2, y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	$x = a \cosh \theta$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $y = b \sinh \theta$	

Aproximando Objetos Uni-dimensionais



Suponha que existe uma função que imprime um ponto na tela dadas suas coordenadas (x, y, z) , como vc implementaria o círculo a partir da sua equação paramétrica $x = X + R \cos t$, $y = Y + R \sin t$, $z = 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ Onde $(X, Y, 0)$ é o centro e R é o raio do círculo.

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

- Considere $N=4$ e $t=2*\text{PI}*i/N$

- Para $i=0$ \Rightarrow $t=2*\text{PI}*0/4 = 0 = 0$

- Para $i=1$ \Rightarrow $t=2*\text{PI}*1/4 = \text{PI}/2 = 90$

- Para $i=2$ \Rightarrow $t=2*\text{PI}*2/4 = \text{PI} = 180$

- Para $i=3$ \Rightarrow $t=2*\text{PI}*3/4 = 3*\text{PI}/2 = 270$

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

Exercícios:

1. Como você implementaria o círculo a partir da sua equação explícita
2. Usando a equação implícita como você pintaria de cores diferentes os pontos do círculo, os pontos dentro do círculo e os pontos fora do círculo.
3. Como vc desenharia uma curva senoidal entre $x=-2\pi$ e $x=2\pi$, com a equação paramétrica $(x,y)=(t,\sin t)$ e com a equação explícita $y=\sin x$;
4. Como vc deduziria a equação de uma hélice (espiral) a partir da equação do círculo.

Aproximando Objetos Uni-dimensionais

Exercícios:

5. Como você implementaria um cone a partir da equação do círculo.
6. Como você implementaria um anel a partir da equação de um círculo.

Curvas de Bézier

- É uma técnica de aproximação de curvas.
- Uma curva de Bézier pode ser gerada por 3, 4, até $n + 1$ pontos de controle (ajuste para um polinômio de grau n).
- Geralmente utiliza-se quatro pontos de controle (*forma cúbica*).
- A curva passa pelo primeiro e pelo último ponto de controle.
- Permanece dentro do fecho convexo

Curvas de Bézier

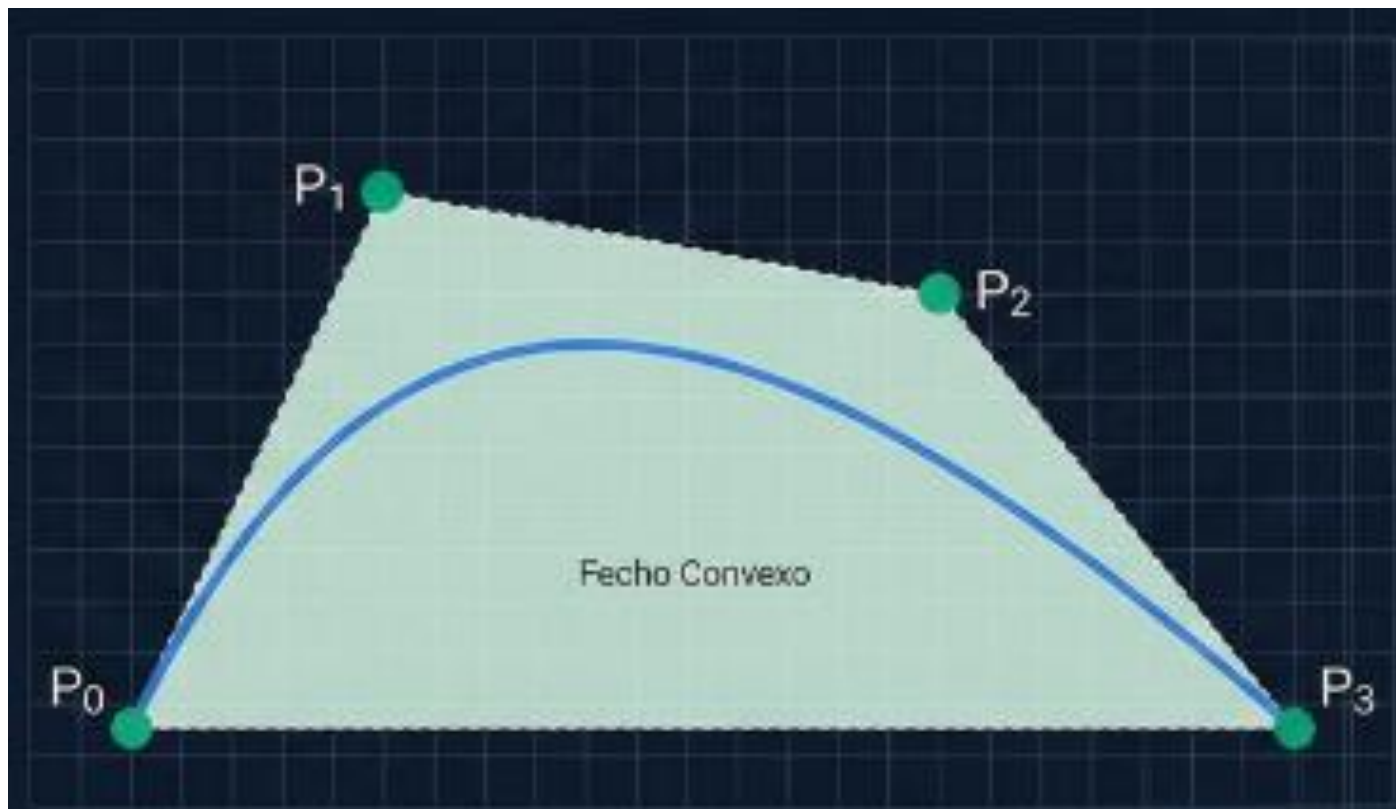


Figura 1

Curvas de Bézier

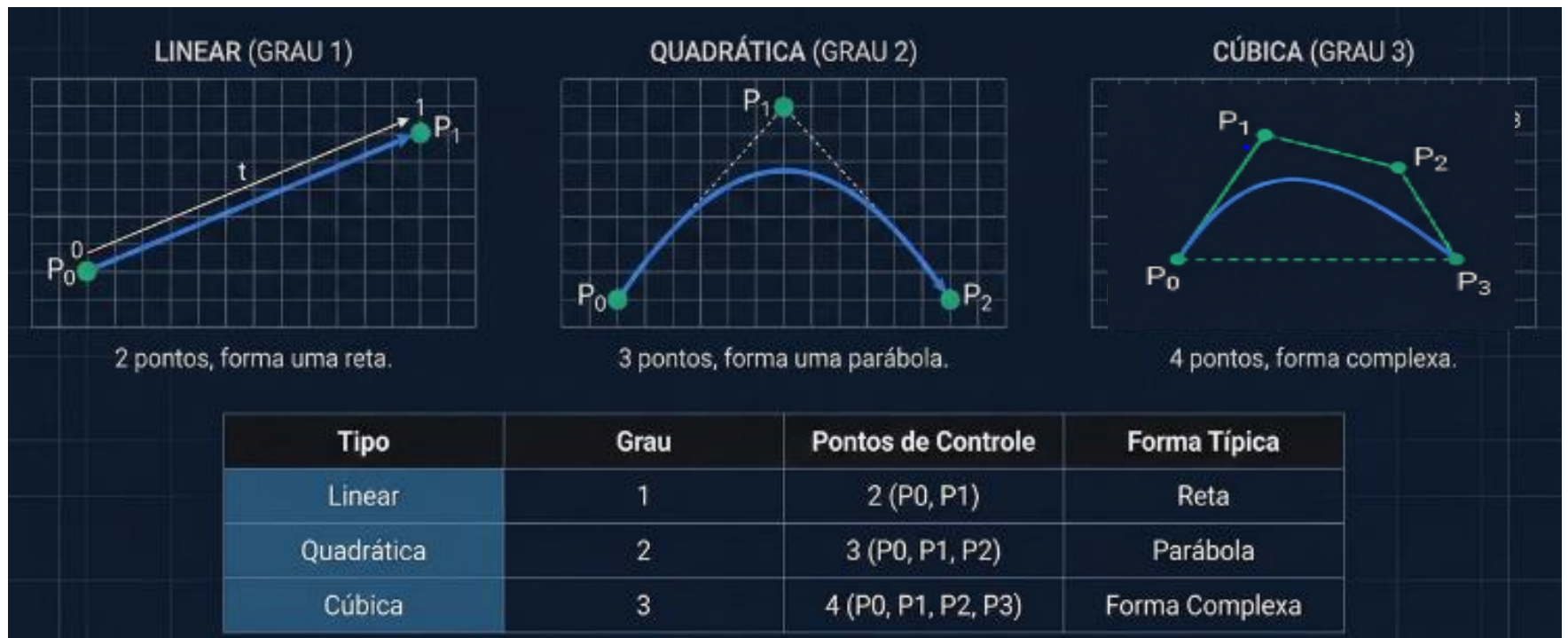
Origem Automotiva

- **1957:** Paul de Casteljaou (Citroën) cria algoritmo para curvas suaves
- **1962:** Pierre Bézier (Renault) formaliza o conceito



Curvas de Bézier

- Curvas são classificadas pelo número de pontos de controle e grau polinomial.



Curvas de Bézier

- A curva paramétrica de Bézier é definida como:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Onde B_i são $n+1$ pontos de controle da curva e $J_{n,i}(t)$ são funções peso (*blending functions*). Essas funções foram escolhidas de maneira que

(1) Sejam funções polinomiais

(2) Constituam pesos de forma que $P(t)$ seja uma função polinomial obtida pela média ponderada que combina a influência de todos os pontos de controle.

Curvas de Bézier

- Para que os $J_{n,i}(t)$, $0 \leq i \leq n$

Sejam os $n+1$ pesos de $P(t)$ eles devem satisfazer

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

E para eles serem funções polinomiais de grau n , pense-se na seguinte decomposição e o fato da potencia de 1 sempre ser 1.

$$1 = (1-t) + t$$

$$1 = 1^2 = ((1-t) + t)^2$$

$$1 = 1^3 = ((1-t) + t)^3$$

$$1 = 1^n = ((1-t) + t)^n$$

Curvas de Bézier

- E pelo conhecido binômio de Newton

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Temos então que

$$1 = ((1-t) + t)^2 = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2$$

$$1 = ((1-t) + t)^3 = t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3$$

$$1 = ((1-t) + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

Curvas de Bézier

- Dessa forma as curvas de Bézier são definidas por

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Onde os $J_{n,i}(t)$

são descritos pelos polinômios de Bernstein como:

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

onde n é o grau dos polinômios e: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$
($i = 0, 1, \dots, n$) são os coeficientes binomiais.

- Essas funções $J_{n,i}(t)$ satisfazem as condições:

$J_{n,i}(t) \geq 0$ para todo i entre 0 e n , e também:

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Curvas de Bézier

- Para $n=2$

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

$$J_{2,0}(t) = \binom{2}{0} (1-t)^2 t^0 = (1-t)^2$$

$$J_{2,1}(t) = \binom{2}{1} (1-t)^1 t^1 = 2t(1-t)$$

$$J_{2,2}(t) = \binom{2}{2} (1-t)^0 t^2 = t^2$$

Curvas de Bézier

- Exemplo da definição de uma curva de Bézier a partir de 3 pontos de controle

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$P(t) = (1 - t)^2 B_0 + 2t(1 - t) B_1 + t^2 B_2,$$

$$P(t) = (x(t), y(t)) = (1 - t)^2 (x_0, y_0) + 2t(1 - t) (x_1, y_1) + t^2 (x_2, y_2)$$

$$\text{Para } B_0 = (-4, 0), B_1 = (0, 5), B_2 = (7, 0)$$

$$x(t) = (1 - t)^2 x_0 + 2t(1 - t) x_1 + t^2 x_2$$

$$x(t) = -4(1 - t)^2 + 7t^2 = -4 + 8t - 4t^2 + 7t^2 = -4 + 8t + 3t^2$$

$$y(t) = (1 - t)^2 y_0 + 2t(1 - t) y_1 + t^2 y_2$$

$$y(t) = 10t(1 - t) = 10t - 10t^2$$

$$P(t) = (-4 + 8t + 3t^2, 10t - 10t^2)$$

Curvas de Bézier

$n=2$

$$P(t) = (1 - t)^2 B_0 + 2t(1 - t) B_1 + t^2 B_2,$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$n=3$

$$P(t) = (1 - t)^3 B_0 + 3t(1 - t)^2 B_1 + 3t^2(1 - t) B_2 + t^3 B_3,$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier – Algoritmo de Casteljou

1. Passo 1 ($j=0$) Polígono de controle original com os pontos P_0 , P_1 e P_2 .
2. Passo 2 ($j=1$) Dois novos pontos Q_0 e Q_1 são criados interpolando cada segmento consecutivo na razão u .
3. Passo 3 ($j=2$) Um único ponto final $C(u)$ é o resultado da interpolação entre Q_0 e Q_1 .



Curvas de Bézier - Problemas

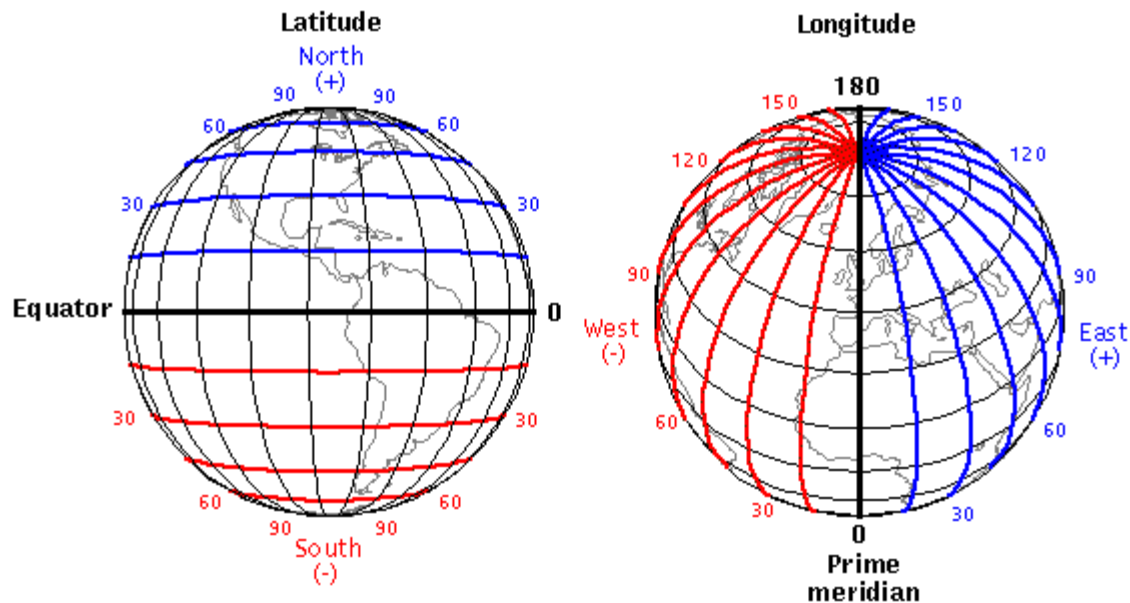
1. Falta de controle local : Uma alteração em um ponto no polígono de Bézier acarreta alterações em toda a curva de Bézier. Indesejável quando desejamos fazer ajustes finos.
2. O grau do polinômio cresce com o número de pontos de controle do polígono de controle.

Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Uma circunferência ou uma hélice são objetos unidimensionais pois são topologicamente equivalentes a uma linha. Agora veremos como aproximar objetos bi-dimensionais como uma esfera ou um cilindro.

A representação paramétrica de uma esfera segue o modelo de coordenadas geográficas do globo terrestre (latitude e longitude).

<https://www.geogebra.org/m/HJs4kEtb>



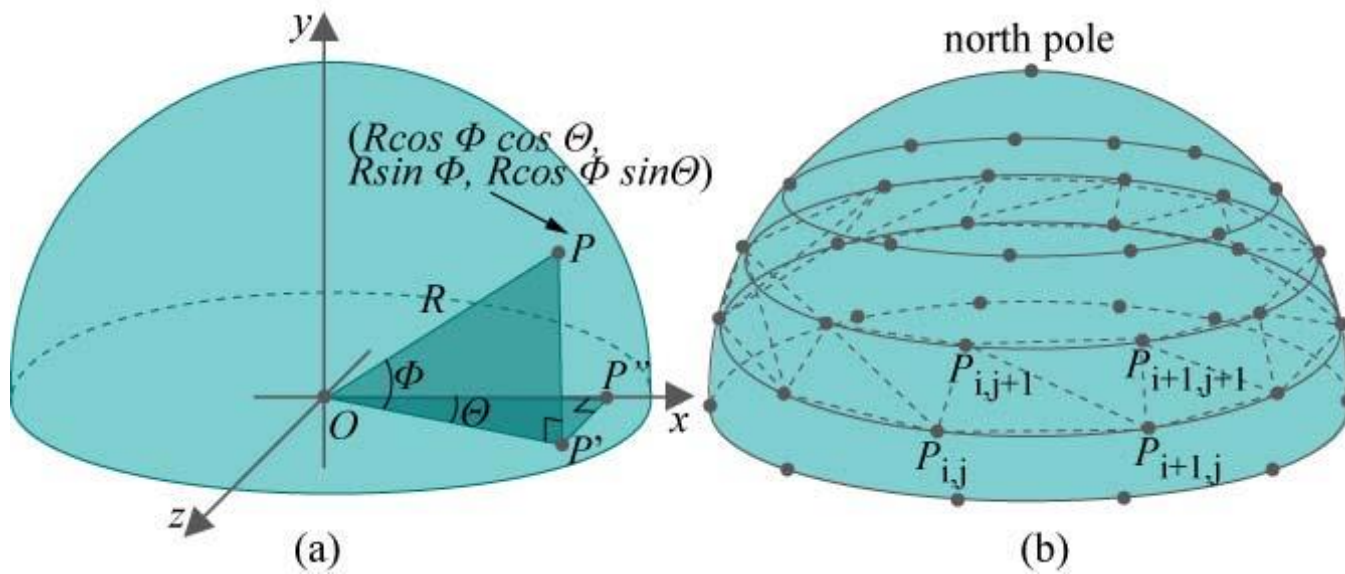
Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Considere um hemisfério de raio R , centralizado na origem O e com sua base circular sobre o plano xz . Suponha que as coordenadas esféricas de um ponto P sobre o hemisfério são a longitude θ e a latitude ϕ .

As coordenadas cartesianas são:

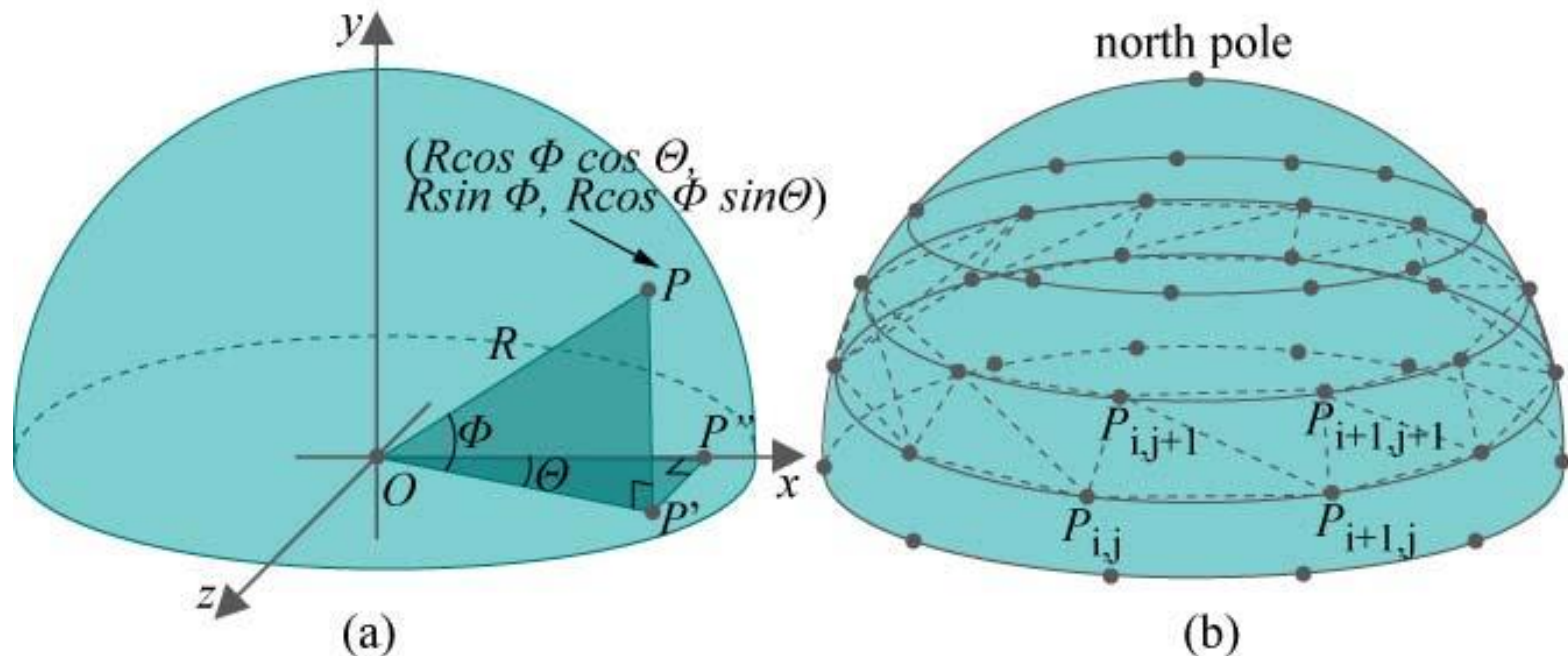
$$(R \cos \phi \cos \theta, R \sin \phi, R \cos \phi \sin \theta),$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \phi \leq \pi/2$$



Aproximando Objetos Bi-dimensionais

Amostramos o hemisfério em uma malha de $(p+1)(q+1)$ pontos P_{ij} , $0 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq q$, onde a longitude de P_{ij} é $(i/p) \cdot 2\pi$ e sua latitude $(j/q) \cdot \pi/2$. Em outras palavras $(p+1)$ pontos longitudinalmente igualmente espaçados são escolhidos entre cada uma das $q+1$ latitudes igualmente espaçadas. Na figura $p=10$ e $q=4$.



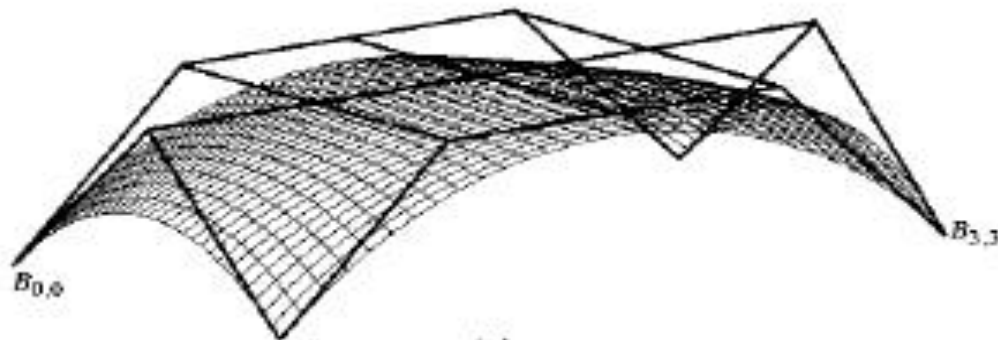
Superfícies Bézier

- Generalização da idéia de curva de Bézier.
- Sejam B_{ij} , $i=0,\dots,m$, $j=0,\dots,n$, um conjunto de pontos no \mathbb{R}^3 de tal forma que sua projeção no plano xOy seja formada pelos vértices de mn retângulos de mesmas dimensões. A superfície de Bézier definida no domínio $[0,1] \times [0,1]$ é

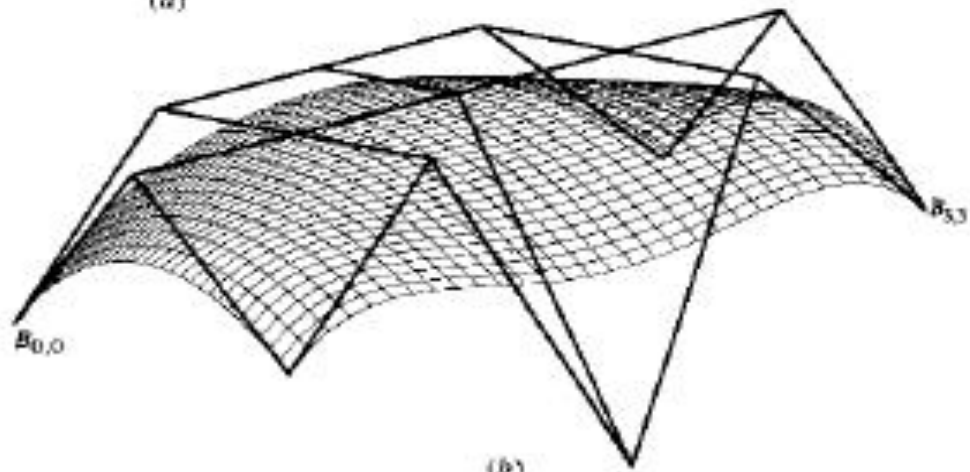
$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{ij} J_{ni}(u) K_{mj}(v)$$

Onde J_{ni} e K_{mj} são os polinômios de Bernstein.

Superfícies Bézier



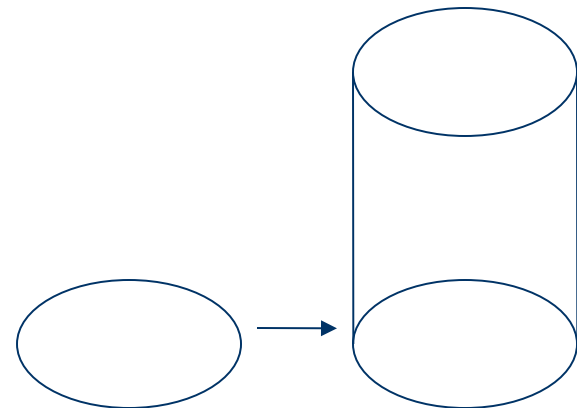
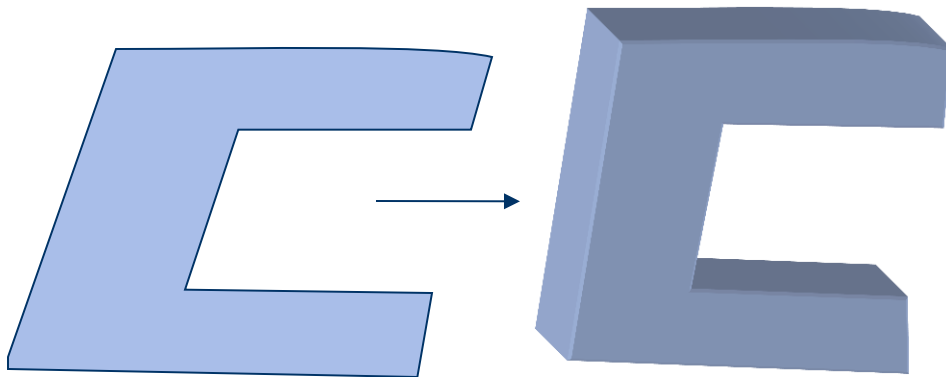
(a)



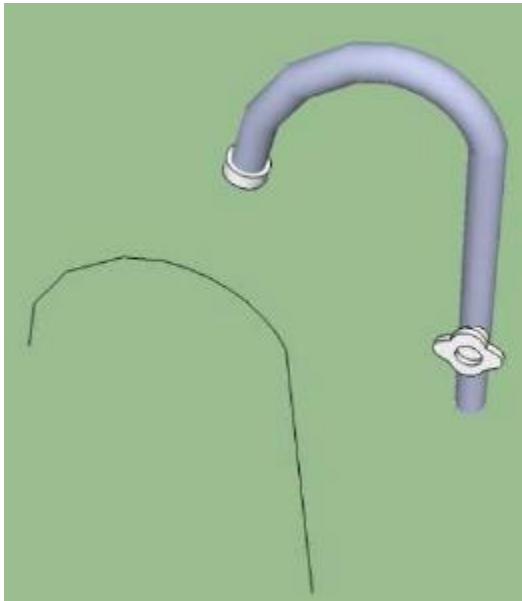
(b)

Varredura (*Sweeping*)

- Uma superfície é descrita quando uma curva $C1$ (curva geratriz) é deslocada no espaço, ao longo de uma trajetória dada por uma outra curva $C2$ (caminho ou diretriz).
 - Varredura translacional (Extrusão ou superfícies geradas por deslocamento)

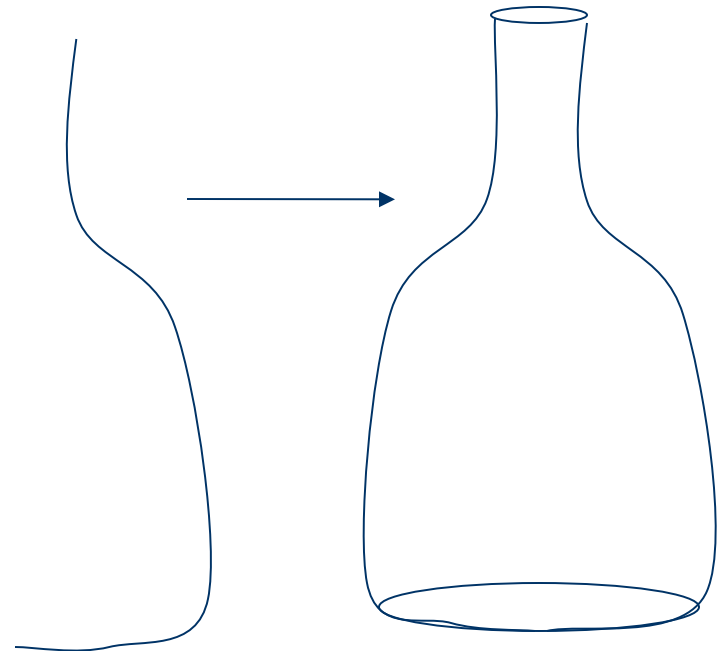
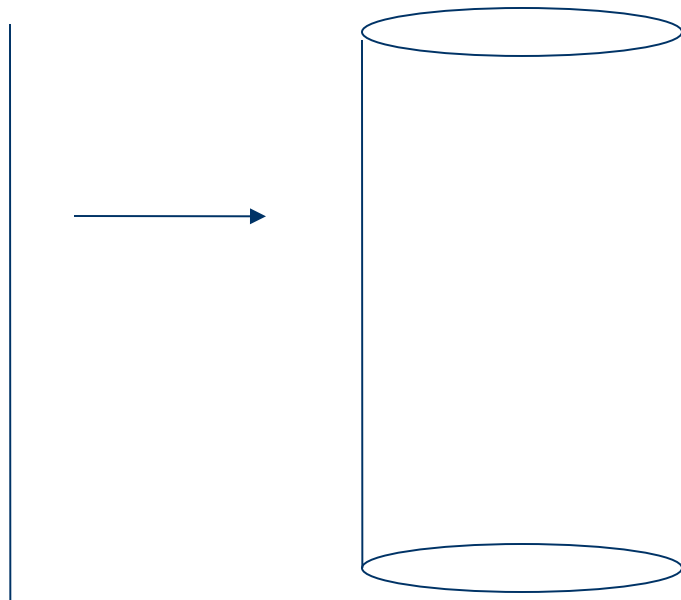


Varredura (*Sweeping*)



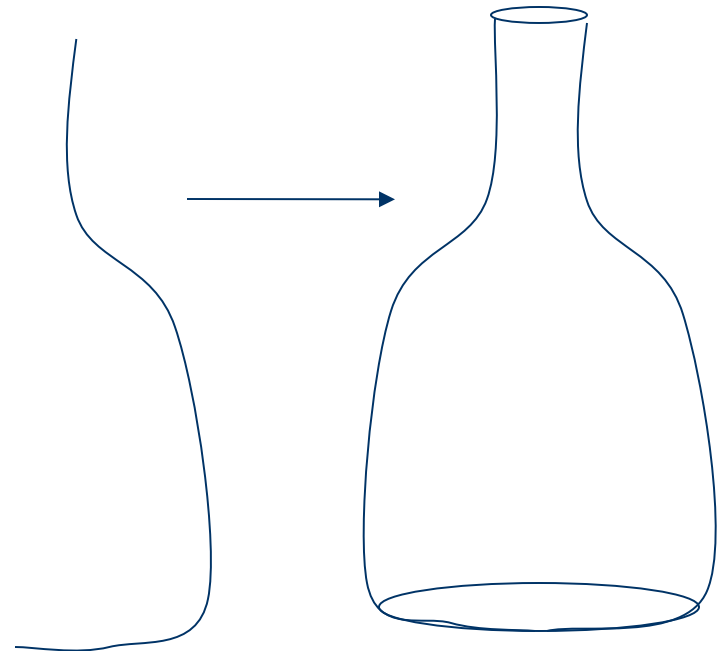
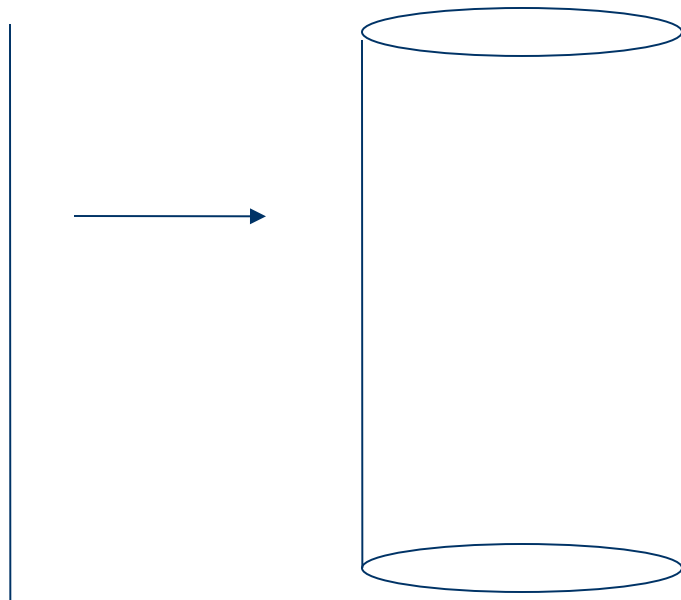
Varredura (*Sweeping*)

- - Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)
-



Varredura (*Sweeping*)

- - Varredura rotacional (ou superfícies de revolução)
-



Varredura (Sweeping)

