COMPUTAÇÃO GRÁFICA – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

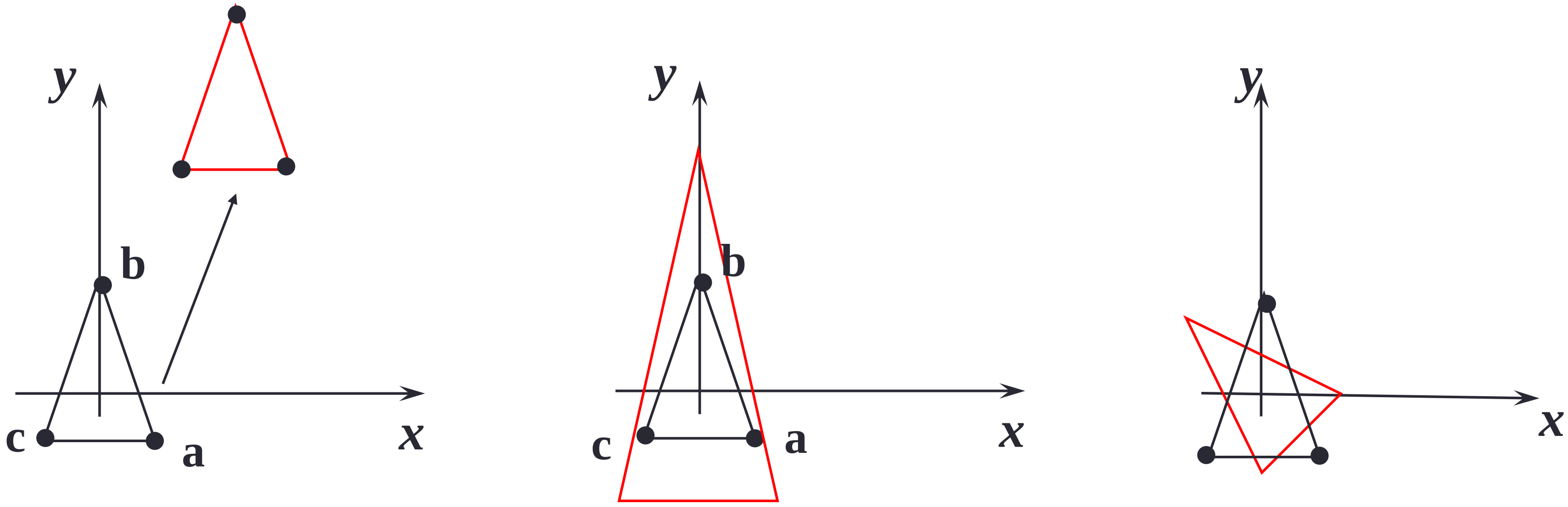
Profa. Mercedes Gonzales Márquez

Tópicos

- Transformação Geométrica
- As três transformações geométricas básicas: Translação, Escala e Rotação.

Transformação Geométrica

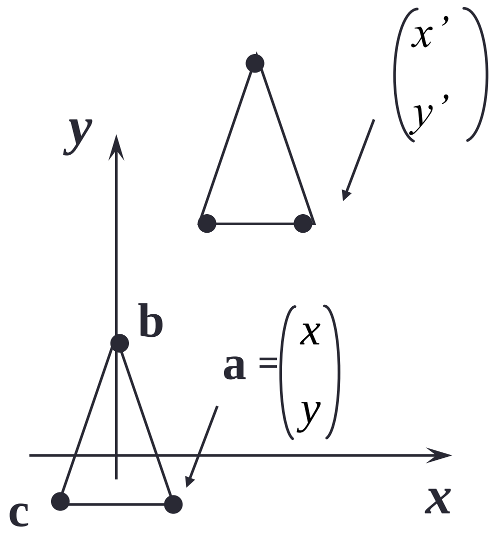
- Transformação que altera algumas características como posição, orientação, forma ou tamanho das figuras geométricas no espaço.
- Apresentamos as três transformações básicas



Translação Escala Rotação

Transformações lineares: Translação

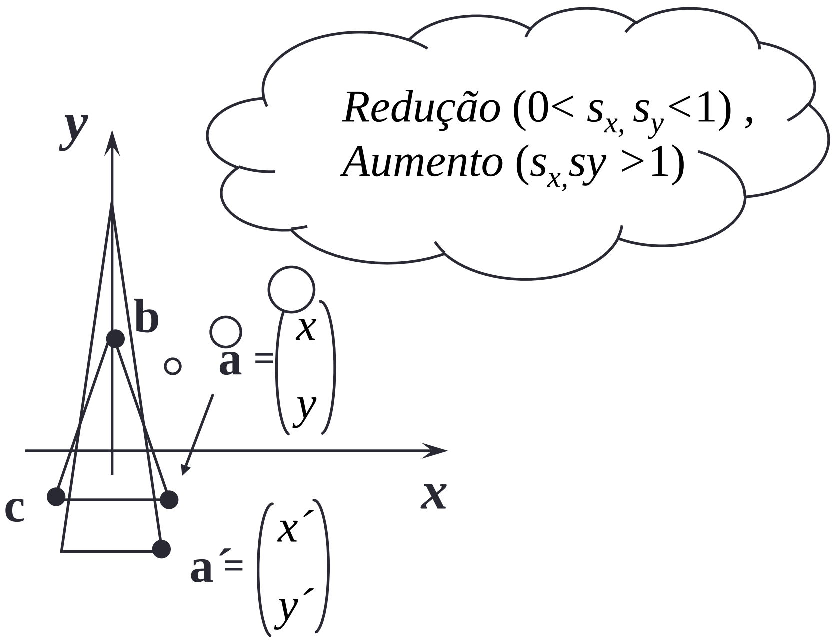
Transladar significa movimentar o objeto. Transladamos um objeto transladando todos os seus pontos. Para obter a partir de um ponto (x,y) um novo ponto (x’,y’) no plano adicionamos quantidades às suas coordenadas.



$$x' = x + t_x, \quad y' = y + t_y$$

Transformações lineares: Escala

Escalar significa mudar as dimensões de escala. Para isso multiplicamos os valores de suas coordenadas por um fator de escala.



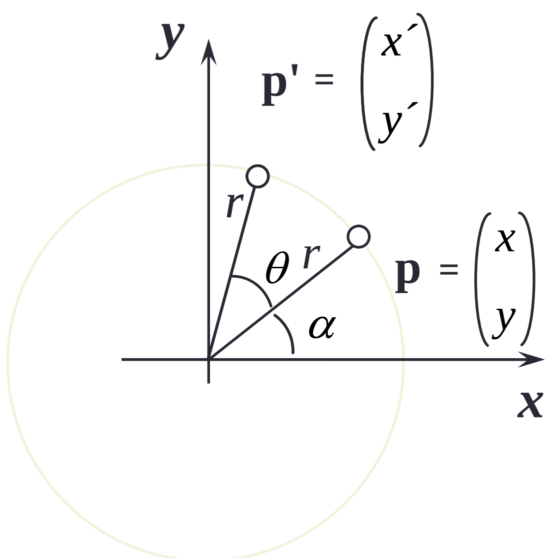
$$x' = s_x x, \quad y' = s_y y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Transformações lineares: Rotação

Rotacionar significa girar. Na Figura abaixo mostra-se a rotação de um ponto p em torno da origem (0,0), passando para a posição p’.



$$\sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta$$
$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta - \sin\alpha \cdot \sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \cdot \cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ r\sin\alpha \cdot \cos\theta + r\cos\alpha \cdot \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$x´ = x.cos\ \theta - y.sen\ \theta$$
$$y´ = x.sen\ \theta + y.cos\ \theta$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriz de rotação no plano xy por um ângulo Θ

Resumo - Transformações 2D

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}$$

Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

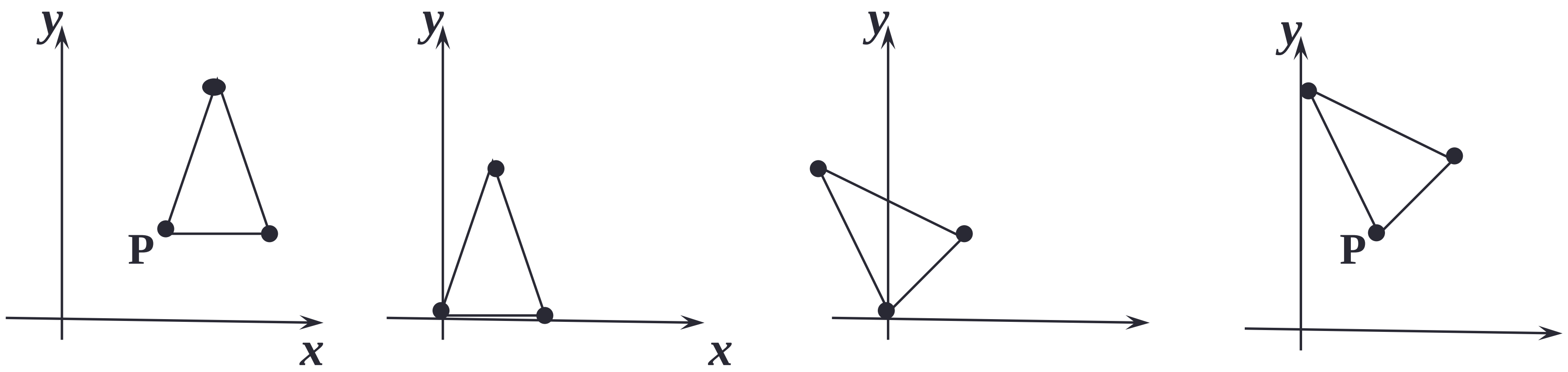
Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de um ponto que não é a origem

Para alterar a orientação de um objeto em torno de um certo ponto, é necessário,
(1) realizar uma translação para localizar esse ponto na origem do sistema,
(2) aplicar a rotação desejada e,
(3) Aplicar uma translação inversa

Rotação em torno de um ponto que não é a origem



(1) (2) (3)

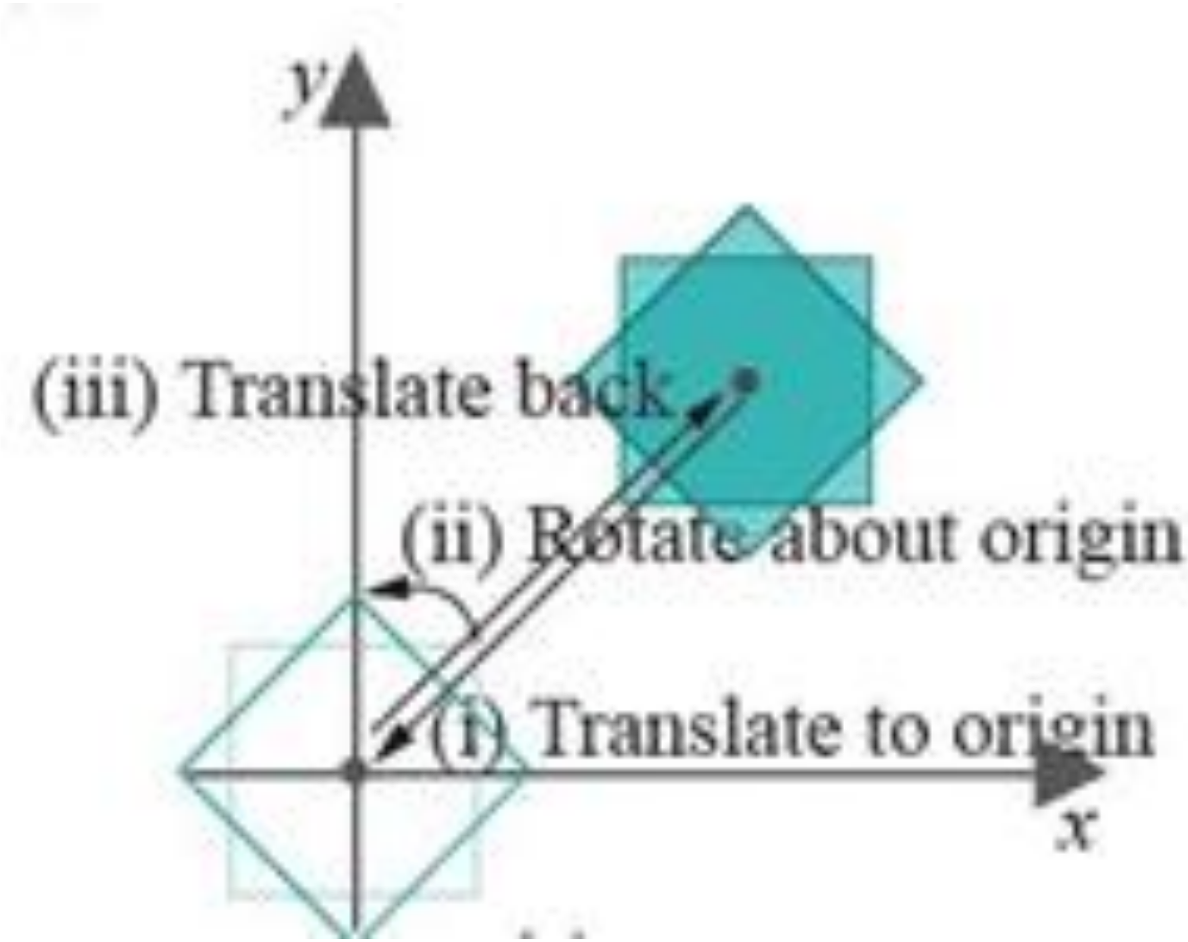
Objeto original

Depois da Translação de P à origem

Após Rotação

Após Translação retorna à posição original

Rotação em torno de um ponto que não é a origem



Transformações 3D

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{bmatrix}$$

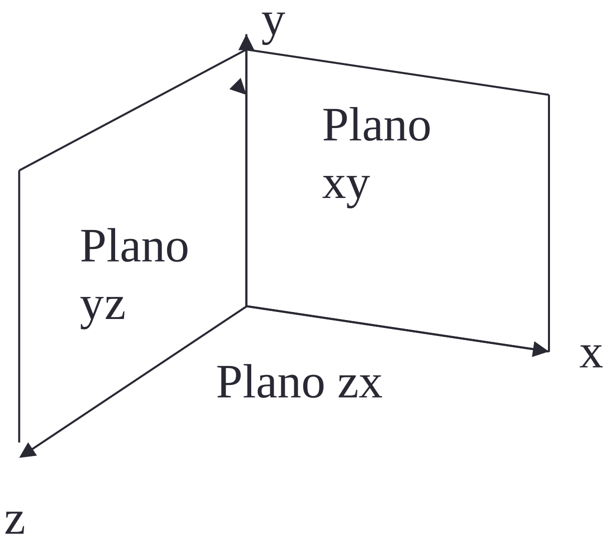
Escala

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Rotação ao redor do eixo z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Rotações 3D



$$R_z(\theta):\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta & 0\\ sen\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta):\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & sen\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -sen\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta):\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -sen\theta\\ 0 & sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas

- Translação não é linear. Como representar em forma de matriz?

  $x' = x + tx \quad y' = y + ty \quad z' = z + tz$

- Solução: uso de coordenadas homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Adiciona uma terceira coordenada w.

- Um ponto 2D passa a ser um vetor com 3 coordenadas
- Uma transformação do sistema homogêneo para o cartesiano se dá pela seguinte relação: (x’,y’)=(x/w,y/w)
- W=1 a transformação entre os espaços é direta de modo que, (x,y,1) no sistema homogêneo tem os mesmos valores no espaço cartesiano 2D: (x,y).

Transformações 3D

- Translação

$$T(dx, dy, dz): \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

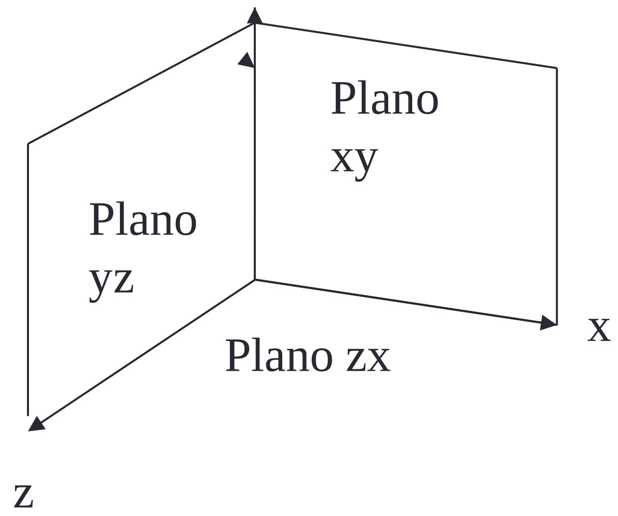
- Escala

$$S(Sx, Sy, Sz): \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 3D

Rotação :

$$R_z(\theta):\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta & 0 & 0\\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



$$R_y(\theta):\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & sen\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -sen\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta):\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -sen\theta & 0\\ 0 & sen\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Compondo Transformações

A matriz da composição de duas transformações é o produto de suas matrizes. Generalizando, se aplicarmos sucessivamente as transformações tn,tn-1,...,t1 a um vértice V, então temos.

t1(t2(...tn(V)...))=M1(M2(...(MnV)...))=(M1M2...Mn)V.

No código

```
                                  //M=I, inicialmente
modelingTransformation 1;         //M=IM1 = M1
modelingTransformation 2;         //M=M1M2
...
modelingTransformation n-1;       //M=M1M2...Mn-1
modelingTransformation n;         //M=M1M2...Mn-1Mn
objeto;
```

Compondo Transformações

Uma reflexão sobre a comutatividade de transformações.
Exemplo visto no quadro (na sala de aula)

Translação seguida de rotação é igual a rotação seguida de translação ?

Pilha de Transformações – Hierarquia de objetos

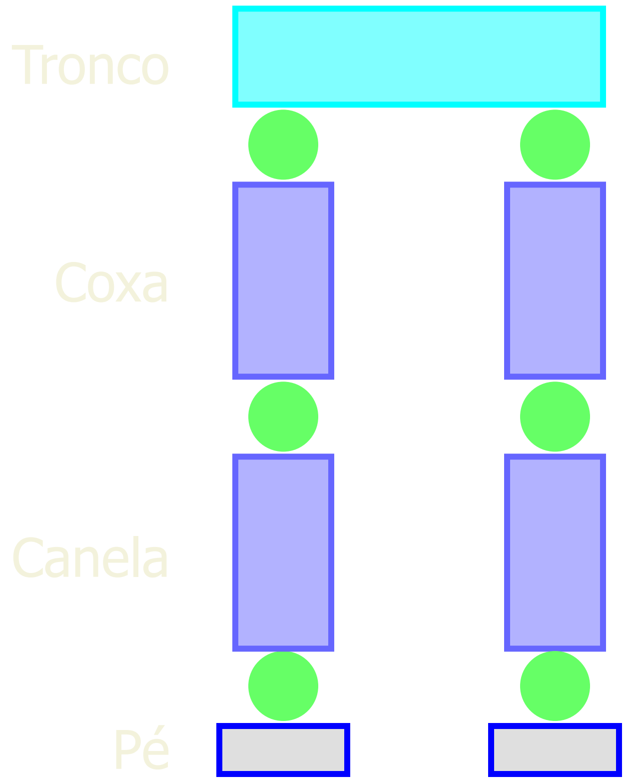
As vezes queremos construir objetos hierarquicos nos quais objetos complicados são construidos a partir de objetos mais simples. Por exemplo,

(a) Uma mesa ou

(b) um automovel com 4 rodas onde cada uma delas é ligada ao carro com cinco parafusos.

(c) O corpo humano

Pilha de Transformações – Hierarquia de objetos



Pilha de Transformações – Hierarquia de objetos

Os passos para desenhar um carro seriam:

-Desenhe o corpo do carro.

-Guarde a posição onde estamos e translade à direita a roda da frente.

-Desenhe a roda e elimine a última translação talque a posição corrente esteja de volta na origem do carro.

-Guarde a posição onde estamos e translade à esquerda a roda da frente ....

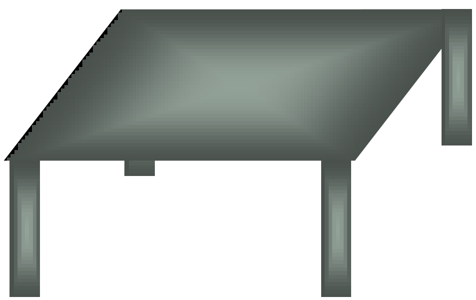
Assim, para cada roda, desenhamos a roda, guardamos a posição onde estamos, e sucessivamente transladamos a cada uma das posições que os parafusos são desenhados, eliminamos as transformações depois que cada parafuso é desenhado.

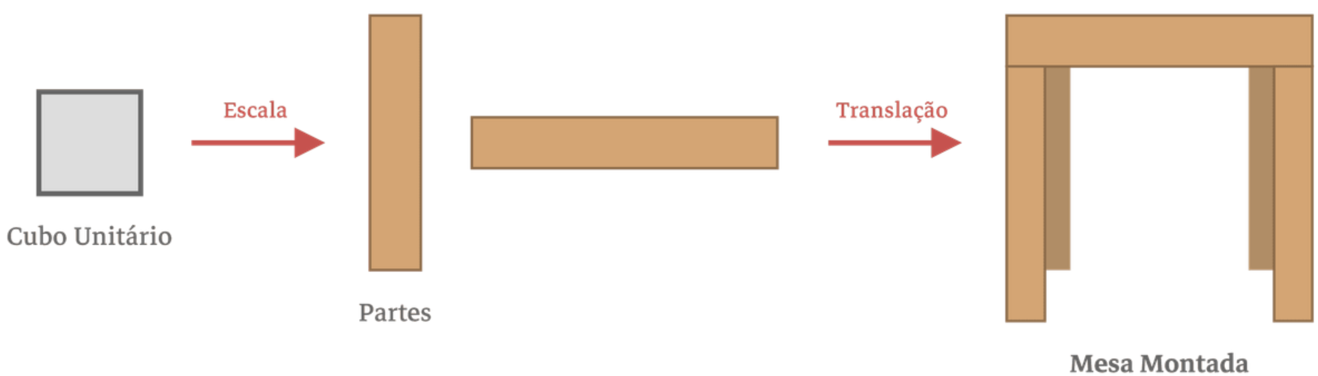
Exercícios

(1) Uma mesa, o sistema planetário solar e o braço de um robô são objetos hierárquicos.

Imagine que existem as primitivas geométricas cubo com uma certa dimensão e esfera com um certo raio, defina os passos de um algoritmo para desenhar cada um desses cenários. Considere que as primitivas são localizadas inicialmente no centro de coordenadas.

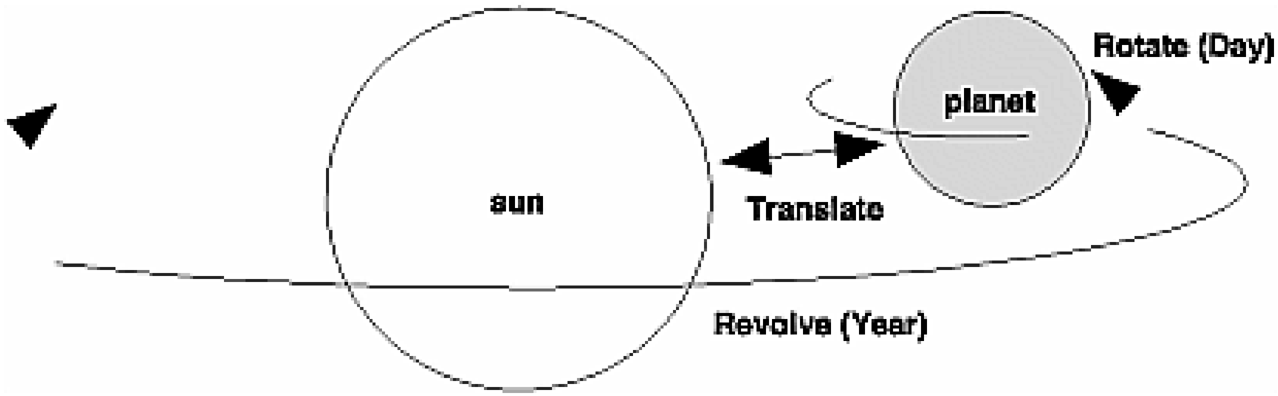
(a)

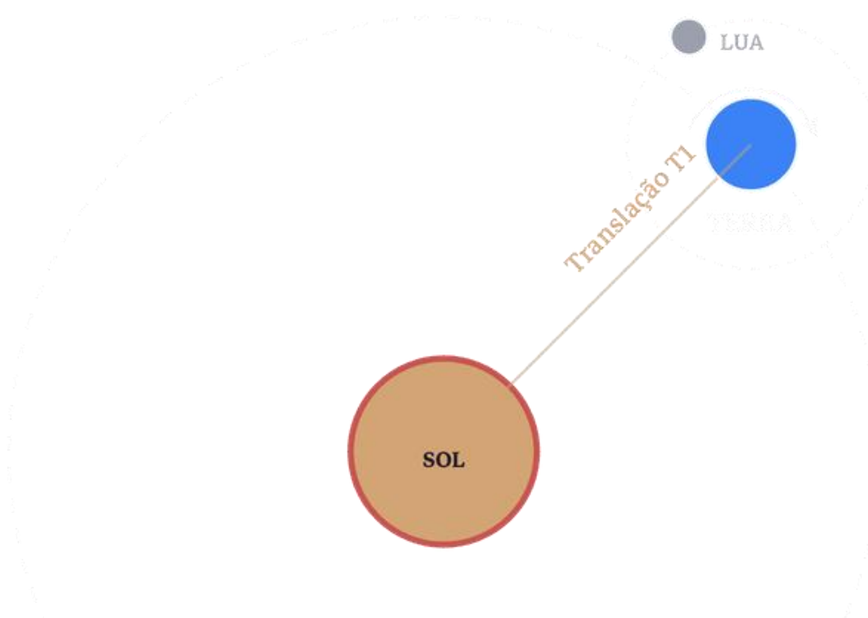




Exercícios

(b)





Exercício

c) Considere que o braço de robô possui articulações no ombro e no cotovelo.