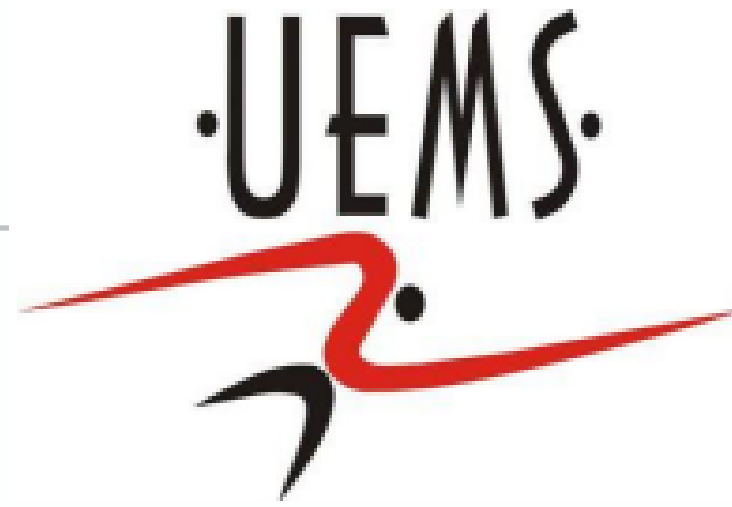
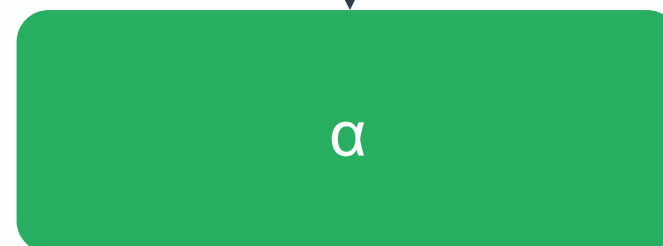
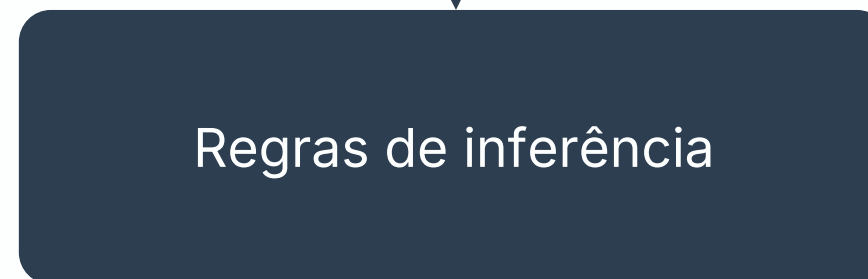
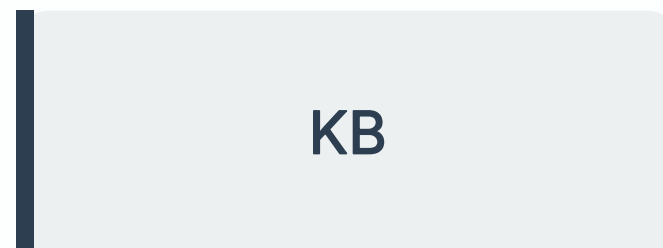




Agentes Lógicos: Prova de Teoremas Proposicionais

Profa. Mercedes Gonzales
Márquez



Da semântica à prova formal

Um agente lógico pergunta se uma consulta α decorre necessariamente de sua base de conhecimento **KB**.



Modelos possíveis

$$KB \models \alpha$$

- Examinar interpretações de verdade.
- Manter os modelos que satisfazem KB.
- Verificar se α vale em todos eles.



Prova formal

$$KB \models \alpha$$

- Aplicar regras de inferência.
- Produzir uma sequência justificável.
- Chegar à fórmula-alvo α .

Duas perspectivas complementares para a mesma relação de consequência lógica.

O problema de prova tem uma entrada e um objetivo

ENTRADA

Uma base proposicional **KB** e uma fórmula-alvo α .

Questão semântica

$KB \models \alpha ?$

α é verdadeira em todo modelo que satisfaz KB?

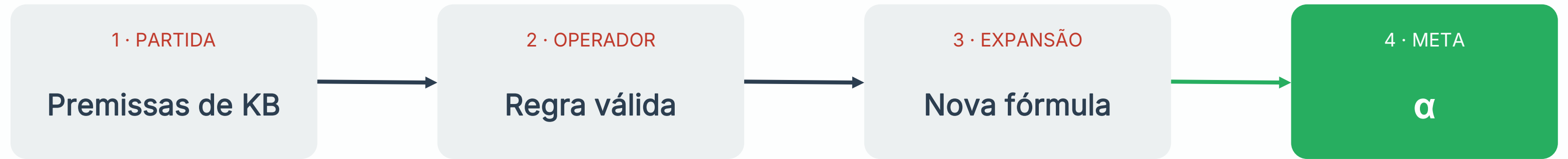
Questão sintática

$KB \vdash \alpha ?$

Existe uma derivação finita, linha a linha, de α ?

Provar é buscar uma sequência de inferências

Cada linha deve ser uma premissa, um axioma ou o resultado de uma regra autorizada.



Correção

Tudo o que o procedimento afirma provar é, de fato, consequência lógica de KB.



Completude

Toda sentença implicada por KB pode, em princípio, ser alcançada por alguma prova.

Provas evitam enumerar todos os mundos

Critério	Verificação de modelos	Prova de teoremas
Fundamento	Semântico: examina interpretações possíveis.	Sintático: manipula fórmulas por regras.
Procedimento	Testa α em cada modelo que satisfaz KB.	Busca uma sequência de KB até α .
Evidência	Resultado da enumeração ou busca em modelos.	Certificado explícito, linha a linha.
Custo básico	2^n interpretações para n símbolos.	Depende da estratégia e do comprimento da prova.
Força	Direto, sólido e completo.	Pode ser muito menor que uma tabela-verdade.

01
10

Enumeração: custo exponencial explícito no número de símbolos.



Derivação: explora estrutura e pode encontrar um caminho curto.

Equivalência preserva o significado lógico

$\alpha \equiv \beta$ quando α e β são verdadeiras nos mesmos modelos; equivalentemente, $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$.

ELIMINAR IMPLICAÇÃO

$$\alpha \Rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$$

ELIMINAR BICONDICIONAL

$$\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$$

LEI DE DE MORGAN

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$$

DUPLA NEGAÇÃO

$$\neg \neg \alpha \equiv \alpha$$

Substituir uma subfórmula por outra equivalente preserva todos os modelos.

Validade é verdade em todos os modelos

DEFINIÇÃO

$$\models \alpha$$

Uma fórmula α é **válida** quando é verdadeira sob toda atribuição de valores.

Na lógica proposicional clássica, uma fórmula válida também é chamada de **tautologia**.

Exemplo: lei do terceiro excluído

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

A última coluna contém somente valores verdadeiros.

$$KB \models \alpha \Leftrightarrow \models (KB \Rightarrow \alpha)$$

Satisfatibilidade pergunta se existe um modelo



Satisfatível

$P \vee Q$

Existe **ao menos um** modelo que torna a fórmula verdadeira.



Insatisfatível

$P \wedge \neg P$

Nenhum modelo torna a fórmula verdadeira.



Válida

$P \vee \neg P$

Todos os modelos tornam a fórmula verdadeira.

α é válida $\Leftrightarrow \neg\alpha$ é insatisfatível

O teorema da dedução muda a forma do problema

TEOREMA DA DEDUÇÃO — FORMA SEMÂNTICA

$$KB \models \alpha \Leftrightarrow \models (KB \Rightarrow \alpha)$$

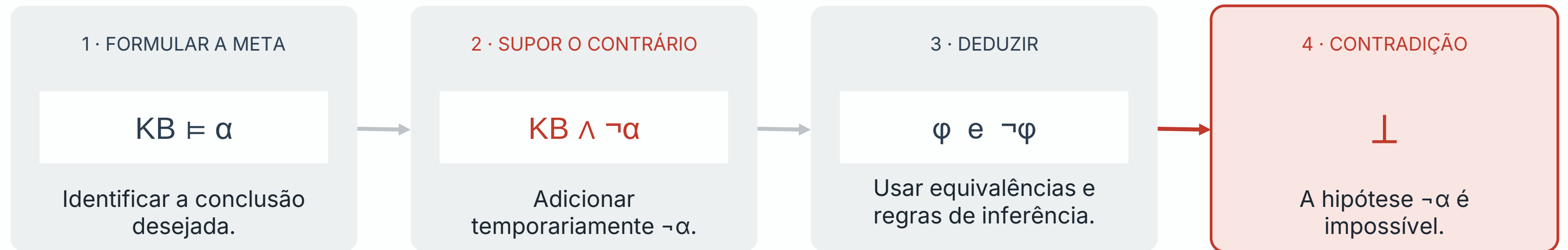
Leitura semântica

α decorre de KB exatamente quando a implicação $KB \Rightarrow \alpha$ é válida em todos os modelos.

Consequência: uma consulta vira um problema de validade.

Refutar a negação prova a conclusão

Para provar $KB \models \alpha$, mostramos que aceitar $\neg\alpha$ junto com KB conduz a uma contradição.



Se $KB \wedge \neg\alpha$ não pode ser verdadeira, então nenhum modelo de KB torna α falsa.

Logo, $KB \models \alpha$.

Regras de inferência controlam cada passo

Modus ponens

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

Eliminação da implicação

Eliminação do E

$$\frac{P \wedge Q}{P \text{ ou } Q}$$

Extrai uma conjunção

Introdução do E

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$$

Constrói uma conjunção

Eliminação do bicondicional

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Expõe as duas direções da equivalência

Contraposição

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

Equivalência útil em deduções

Modus ponens transforma condição em fato

REGRA

$$\frac{P \quad P \Rightarrow Q}{Q}$$

Se P é fato e P implica Q, então Q pode ser adicionado à KB.

Exemplo cotidiano

1 Chove.(P)



2 Se chove, a rua fica molhada.(P ⇒ Q)



3 A rua fica molhada.(Q)



Leitura computacional: uma premissa satisfeita dispara a regra.

Eliminar o E separa informações conjuntivas

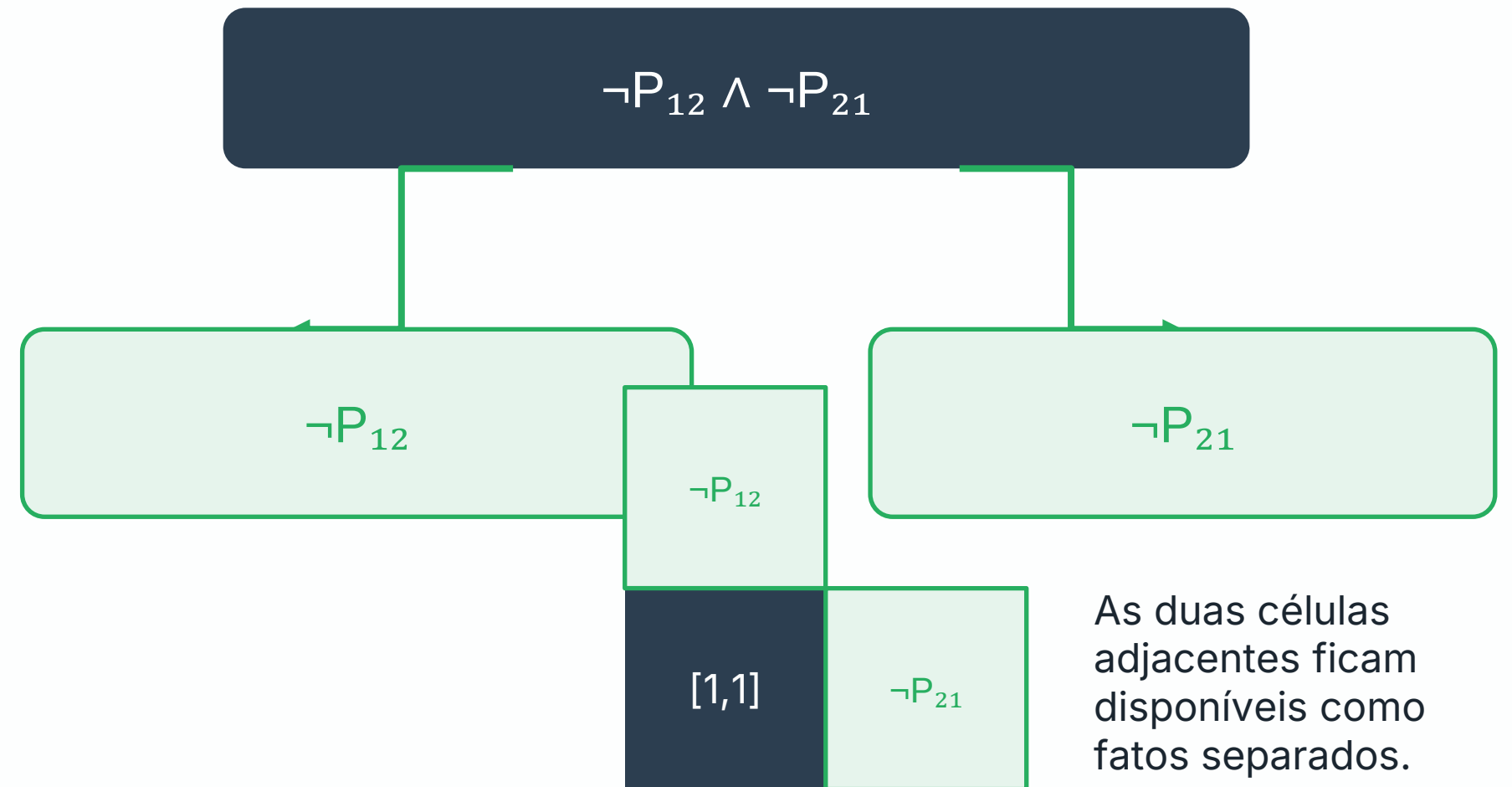
ELIMINAÇÃO DO E ($\wedge$)

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

Também é válido concluir Q.

Cada componente pode ser reutilizado isoladamente em passos posteriores.

Exemplo no Mundo de Wumpus



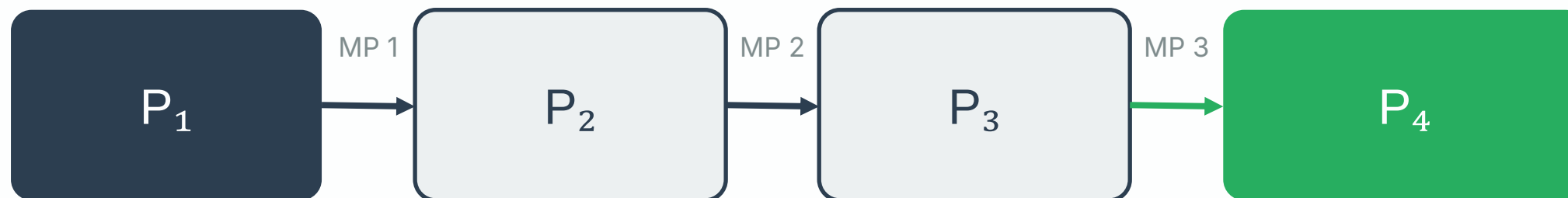
Uma prova curta evita uma tabela enorme

Considere uma base em cadeia e a meta de demonstrar P_4 .

BASE DE CONHECIMENTO

$P_1, P_1 \Rightarrow P_2, P_2 \Rightarrow P_3, P_3 \Rightarrow P_4$

Derivação por modus ponens



Comparação

3

passos de prova

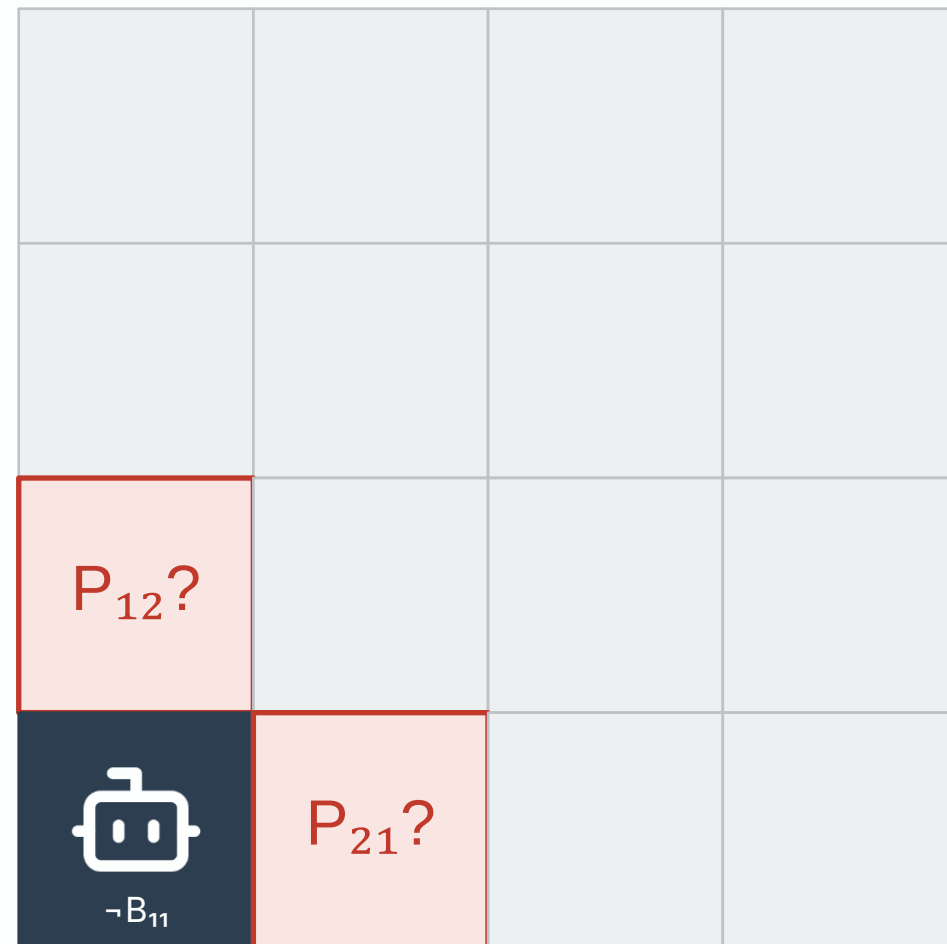
16

interpretações
para 4 símbolos

A estrutura da KB pode produzir uma prova muito menor que a enumeração completa.

O Mundo de Wumpus vira uma base proposicional

Uma percepção local em [1,1]



A ausência de brisa restringe as duas células adjacentes.

Símbolos proposicionais

P_{ij} : existe um poço em $[i,j]$.

B_{ij} : existe brisa em $[i,j]$.

Regra local

$$B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$$

Objetivo do agente: demonstrar quais células são seguras antes de se mover.

Equivalências e regras revelam células seguras

1 $B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$

Regra do mundo

2 $\neg B_{11}$

Percepção do agente

3 $(P_{12} \vee P_{21}) \Rightarrow B_{11}$

Eliminação de $\Leftrightarrow$ e eliminação do E

4 $\neg B_{11} \Rightarrow \neg(P_{12} \vee P_{21})$

Contraposição

5 $\neg(P_{12} \vee P_{21})$

Modus ponens, usando 2 e 4

6 $\neg P_{12} \wedge \neg P_{21}$

Lei de De Morgan

7 $\neg P_{12}$ e $\neg P_{21}$

Eliminação do E

As células [1,2] e [2,1] são seguras quanto a poços.

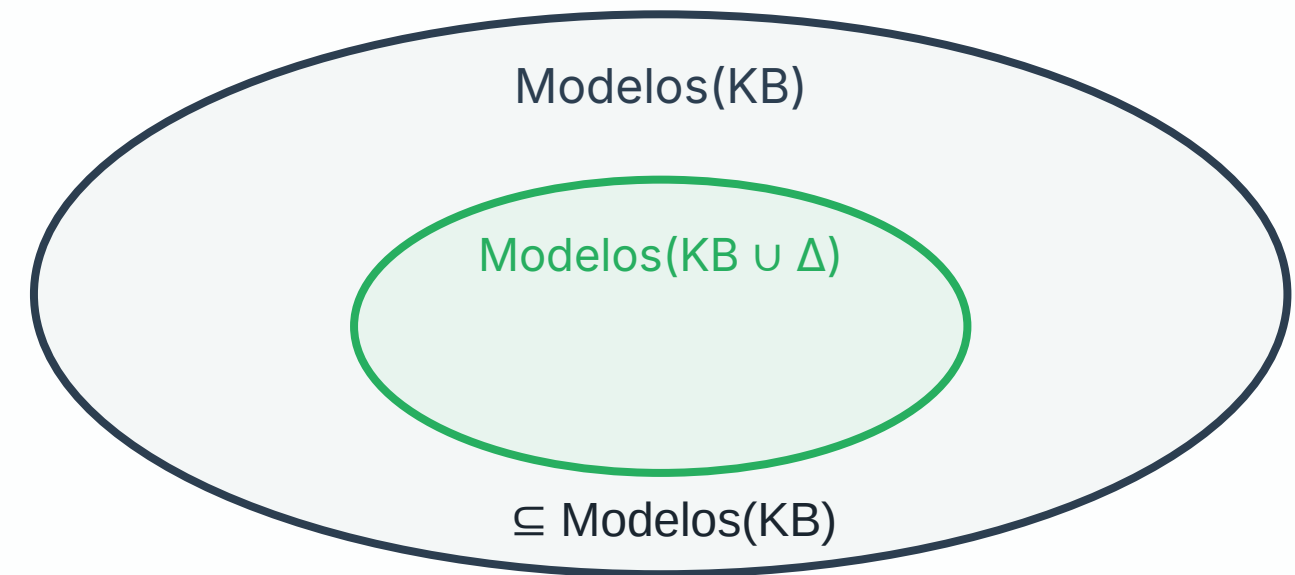
A monotonicidade conserva conclusões anteriores

PROPRIEDADE

Se $KB \models \alpha$, então $KB \cup \Delta \models \alpha$

Acrescentar premissas não invalida uma conclusão já implicada, desde que se permaneça na lógica clássica.

A base ampliada tem menos modelos



Aplicação no Mundo de Wumpus

Regras do ambiente

Novo percepto Δ

Conclusão α preservada

Provar é combinar significado, regras e busca



Modelos

Verificam a consequência diretamente nas interpretações que satisfazem KB.



Provas

Constroem uma derivação simbólica e auditável por regras corretas.

$KB \vdash \alpha$



Transformações

Equivalência, dedução e refutação mudam a forma sem mudar o significado.



Ação segura

No Wumpus, conclusões formais convertem percepções locais em decisões de movimento.

Raciocinar formalmente transforma conhecimento em conclusões justificadas.

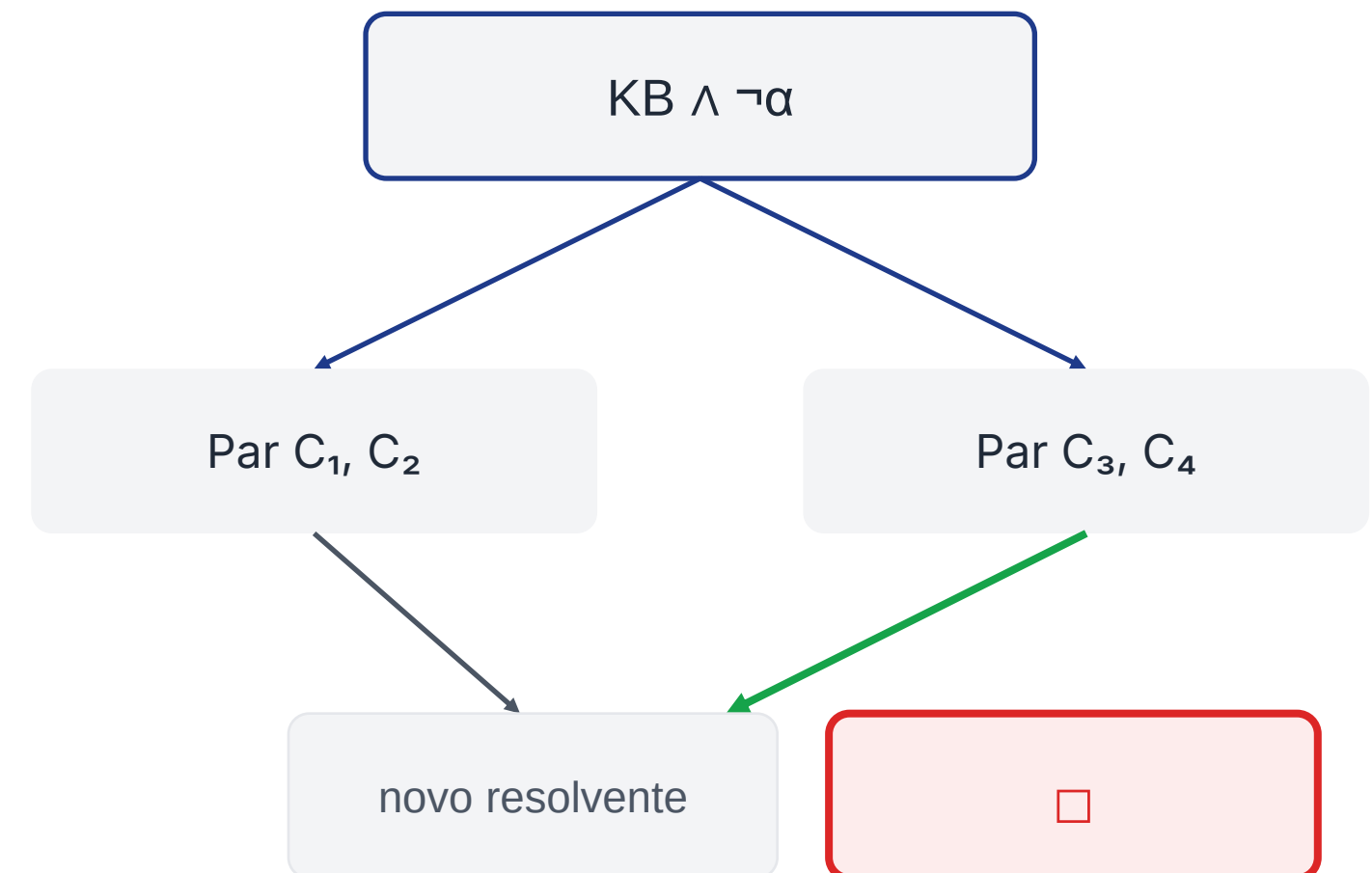
Resolução transforma prova em busca

- A **resolução** gera novas cláusulas a partir de pares compatíveis.
- A prova procura uma sequência de resolventes que produza contradição.
- A regra é **correta** e **completa por refutação**.
- A estratégia deve explorar sistematicamente pares e resolventes.

RESULTADO

Resolução + busca completa forma um algoritmo de inferência completo para lógica proposicional.

Espaço de busca de provas



Se houver prova, a busca completa a encontrará.

Quatro conceitos formam o vocabulário básico

Literal

Símbolo proposicional ou sua negação.

P $\neg P$

Literais complementares

Um literal e sua negação.

L $\neg L$

Cláusula

Disjunção de zero ou mais literais.

$\neg A \vee B \vee C$

Cláusula unitária

Cláusula que contém um único literal.

$\neg B$

Uma fórmula em FNC é uma **conjunção de cláusulas**.

Resolução unitária produz um resolvente menor

REGRA DE RESOLUÇÃO UNITÁRIA

$$L \neg L \vee M_1 \vee \dots \vee M_n$$
$$M_1 \vee \dots \vee M_n$$

Aplicação no Mundo de Wumpus

CLÁUSULA UNITÁRIA

$$\neg B_{11}$$

CLÁUSULA DA REGRA DO MUNDO

$$\neg P_{12} \vee B_{11}$$

RESOLVENTE

$$\neg P_{12}$$

A percepção fixa o pivô B_{11} ; o par complementar é removido e sobra a conclusão segura.

A regra geral elimina um único pivô

REGRA COMPLETA DE RESOLUÇÃO

$$L \vee A \quad \neg L \vee B$$

$$A \vee B$$

O par complementar é cancelado porque, qualquer que seja o valor de L, algum literal de A ou B precisa satisfazer as premissas.

Pivô

É o símbolo que aparece como L em uma cláusula e $\neg L$ na outra.

Fatoração proposicional

$$Q \vee Q \equiv Q$$

Remove repetições sem alterar a cláusula.

Cuidado

Não elimine dois pares complementares na mesma aplicação: isso pode gerar uma conclusão inválida.

Regra prática: uma aplicação de resolução escolhe exatamente um pivô.

A resolução preserva a verdade

PREMISSAS

$$L \vee A \quad \neg L \vee B$$

Valor do pivô L	O que as premissas forçam	Consequência
Verdadeiro	$\neg L$ é falso; então a segunda premissa só é verdadeira se B for verdadeiro.	B é verdadeiro
Falso	L é falso; então a primeira premissa só é verdadeira se A for verdadeiro.	A é verdadeiro

$$(L \vee A) \wedge (\neg L \vee B) \models A \vee B$$

Em ambos os casos, o resolvente é verdadeiro; portanto, a regra é correta.

FNC prepara as fórmulas para resolução

Forma Normal Conjuntiva

Uma **conjunção de cláusulas**; cada cláusula é uma disjunção de literais.

EXEMPLO EM FNC

$$(A \vee \neg B) \wedge (B \vee C) \wedge \neg C$$

Conversão sistemática



As transformações preservam os modelos da fórmula original.

O algoritmo busca a cláusula vazia

PL-RESOLUTION(KB, α)

cláusulas $\leftarrow$ FNC(KB $\wedge$ $\neg\alpha$)

novas $\leftarrow \{\}$

repetir:

para cada par C_i, C_j :

$R \leftarrow$ RESOLVE(C_i, C_j)

se $\square \in R$: retornar verdadeiro

novas $\leftarrow$ novas $\cup R$

se novas $\subseteq$ cláusulas:

retornar falso

cláusulas $\leftarrow$ cláusulas $\cup$ novas

Entrada por refutação

KB $\wedge$ $\neg\alpha$

Retorno verdadeiro

Apareceu $\square$: KB $\wedge$ $\neg\alpha$ é insatisfatível, logo KB $\models \alpha$.

Retorno falso

Nenhuma cláusula nova: o fechamento foi alcançado sem contradição.

O Wumpus vira cinco cláusulas iniciais

Base e consulta

Regra:

$$B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$$

Percepção:

$$\neg B_{11}$$

Consulta:

$$\alpha = \neg P_{12}$$

Negação da consulta:

$$\neg \alpha = P_{12}$$

A prova tenta mostrar que $KB \wedge P_{12}$ é impossível.

FNC da regra do mundo

$$B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$$



$$(\neg B_{11} \vee P_{12} \vee P_{21}) \wedge (\neg P_{12} \vee B_{11}) \wedge (\neg P_{21} \vee B_{11})$$

Conjunto inicial de cláusulas

C1

$$\neg P_{21} \vee B_{11}$$

C2

$$\neg B_{11} \vee P_{12} \vee P_{21}$$

C3

$$\neg P_{12} \vee B_{11}$$

C4 · percepção

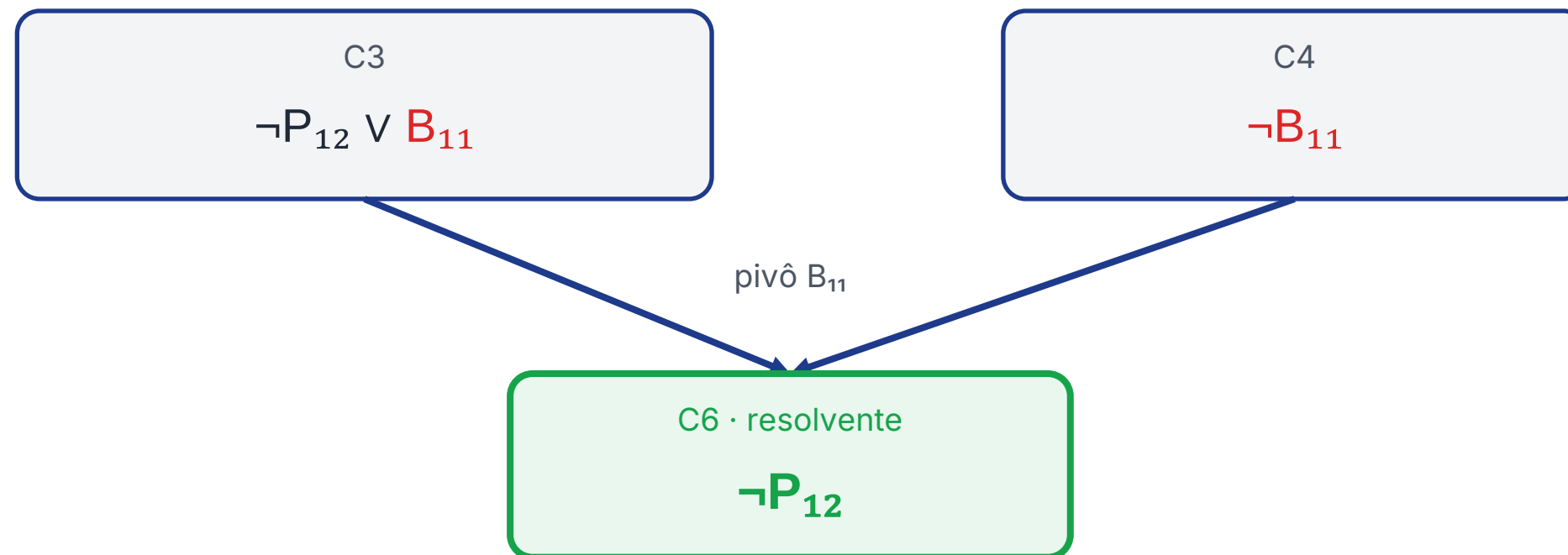
$$\neg B_{11}$$

C5 · ¬consulta

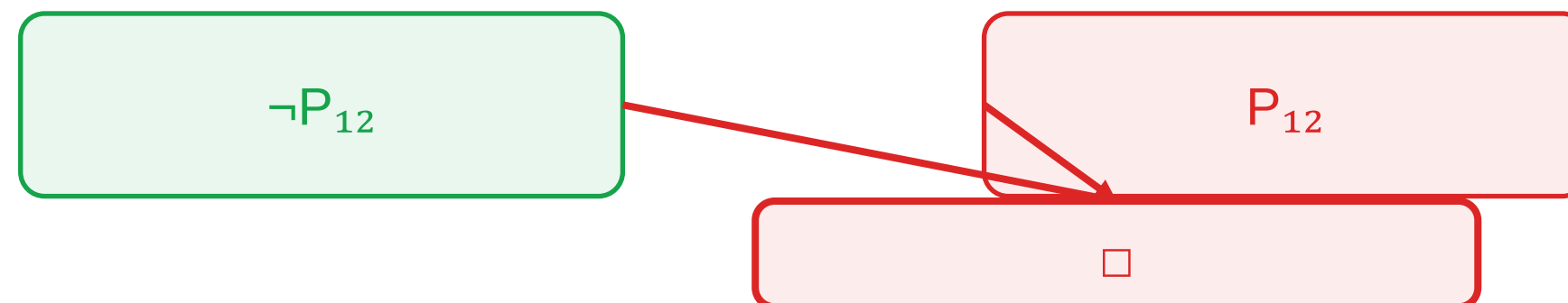
$$P_{12}$$

Duas resoluções provam a célula segura

1 · Usar a percepção para eliminar B_{11}



2 · Confrontar o resolvente com a negação da consulta

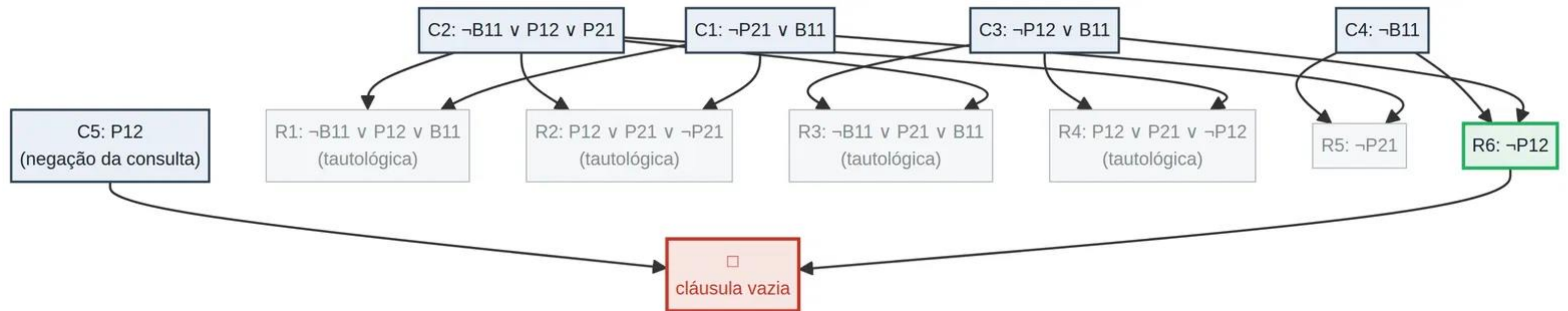


Significado espacial

$\neg P_{12}$	[2,2]
agente [1,1]	[2,1]

A suposição de poço em [1,2] contradiz a base. Logo, a célula é segura quanto a poços.

Busca e redundância



Nós superiores

Cláusulas iniciais da base, da percepção e da negação da consulta.

Nós cinza

Resolventes tautológicos ou redundantes que uma busca completa também pode gerar.

Caminho útil

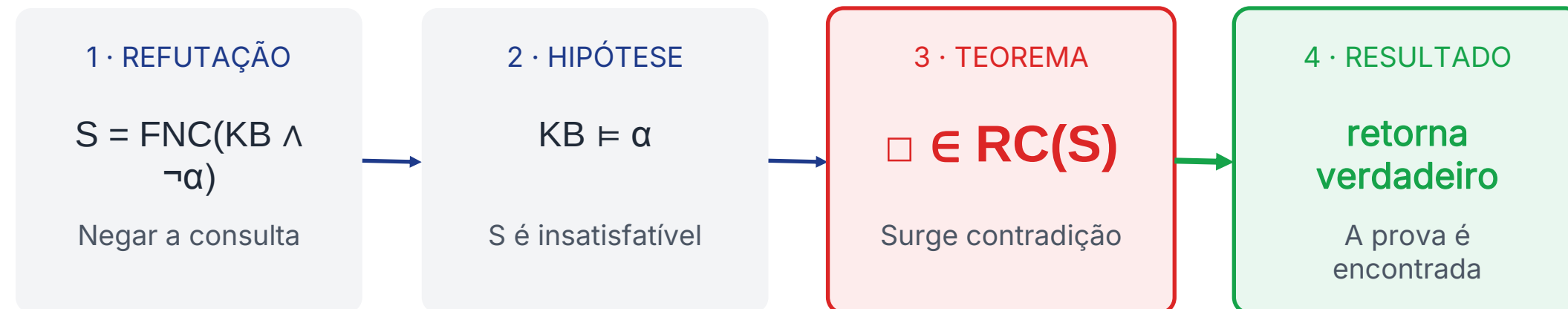
$C3 + C4 \rightarrow \neg P_{12}$; depois $\neg P_{12} + P_{12} \rightarrow \square$.

A resolução é completa por refutação

TEOREMA FUNDAMENTAL DA RESOLUÇÃO

Se um conjunto de cláusulas S é insatisfatível, então seu fechamento $RC(S)$ contém a cláusula vazia $\square$.

Da consulta à garantia de resposta



Por que termina?

$RC(S)$ reúne todas as cláusulas deriváveis por resolução.

Com símbolos finitos e fatoração, há apenas um número finito de cláusulas distintas.

Uma busca completa por pares alcança todo o fechamento.

Consequência: se $\text{KB} \models \alpha$, o algoritmo completo de resolução sempre encontrará $\square$.

Três razões tornam as cláusulas definidas especiais

Bases formadas apenas por cláusulas definidas combinam **clareza de representação, inferência natural e eficiência.**

1

Forma de implicação
compreensível

$$(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

O **corpo** reúne premissas positivas; a **cabeça** contém uma única conclusão positiva.

2

Encadeamento natural

para a frente

para trás

Os passos são óbvios e fáceis de acompanhar; essa inferência sustenta a **programação lógica**.

3

Consequência em tempo
linear

$O(|KB|)$

Decidir se a base implica uma consulta pode ser feito em tempo linear no tamanho da base.

Restrição expressiva em troca de provas mais legíveis, naturais e eficientes.

Horn e definidas: a restrição que traz eficiência

Relação entre as classes

Cláusulas de Horn

No máximo um literal positivo

Cláusulas definidas

Exatamente um literal positivo

Horn com zero positivos = cláusula objetivo

Formas equivalentes

REGRA DEFINIDA

$$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q \equiv (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow Q$$

Fato

Q

$\text{True} \Rightarrow Q$

Fechamento

Resolver duas cláusulas
Horn produz outra Horn.