Relações de Recorrência
Divisão e Conquista

Relação de Divisão e Conquista

A solução de um problema, através da técnica de divisão e conquista, consiste em:

- dividir o problema em sub-problemas,
- solucioná-los de forma recursiva, e
- combinar as sub-soluções.

Relação de Divisão e Conquista

Suponha que:

- o problema seja dividido em ***a*** partes,
- cada parte de tamanho ***1/b*** do tamanho original,
- o tempo de solução de cada parte seja ***T(n/b)***, e
- O tempo para combinar as subsoluções seja $\boldsymbol{cn^k}$

Onde *a*,*b*,*c* e *k* são constantes.

Assim o tempo para solução do problema é dado por:

$$\boldsymbol{T(n) = a.T(n/b) + cn^k}$$

Teorema

Teorema: A solução da relação de recorrência

$$\boldsymbol{T(n) = a.T(n/b) + f(n)},$$

onde ***a*** e ***b*** são constantes inteiras, ***a ≥ 1***, ***b ≥ 2***, e ***c*** são constantes positivas, é:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } f(n)=O(n.^{\log b\ a\ -\ \varepsilon}) \text{ para algum } \varepsilon>0 \\ \Theta(n.^{\log b\ a} \log n) & \text{se } f(n)=\Theta(n.^{\log b\ a}) \\ \Theta(f(n)) & \text{se } f(n) = \Omega(n.^{\log b\ a\ +\ \varepsilon}) \text{ para algum } \varepsilon>0 \text{ e} \\ & \text{se } af(n/b) \le c.f(n) \text{, com } c<1 \text{ e para todo} \\ & n \text{ suficientemente grande} \end{cases}$$

Prova do Teorema

Prova: para simplificar as contas suponha $\boldsymbol{n=b^m}$, assim $\boldsymbol{n/b}$ é um número inteiro.

Vamos expandir duas vezes:

$$T(n) = aT(n/b) + cn^k$$

(1) $T(n) = a(\, aT(n/b^2) + c(\, n/b\,)^k\,) + cn^k$

(2) $T(n) = a(\, a(\, aT(n/b^3) + c(\, n/b^2)^k\,) + c(n/b)^k\,) + cn^k$

Se expardir até $(n/b^m) = 1$ obtém-se:

$$T(n) = a(\, a(\, a(\, \ldots(\, aT(n/b^m) + c(\, n/b^{m-1}\,)^k\,) + \ldots\,) + cn^k$$

Fazendo

$$T(n/b^m) = T(1) = c$$

Temos que

$$T(n) = ca^m + ca^{m-1}b^k + ca^{m-2}b^{2k} + \ldots. + cb^{mk}$$

Prova do Teorema

o que implica que

$$T(n) = c\sum_{i=0}^{m} a^{m-i}b^{ik} = ca^{m}\sum_{i=0}^{m} (b^{k}/a)^{i}$$

Ou seja, é uma série geométrica simples com fator b^k/a, e assim temos 3 casos:

Caso 1: quando $a > b^k$

O fator da série é menor que 1 e a série converge para uma constante mesmo que m tenda ao infinito. E portanto

$$T(n) = O(a^m)$$

Mas $m = \log_b n$ e

$$a^m = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

Assim

$$T(n)=O(n^{\log_b a})$$

Prova do Teorema

Caso 2: quando $a = b^k$

O fator geométrico é 1, e assim

$$T(n) = O\,(a^m m)$$

Note que $a = b^k$ o que implica que

$$\log_b a = k, \quad e$$

$$m = O\,(\log n)$$

Assim

$$T(n) = O(\, n^k \log n)$$

Prova do Teorema

Caso 3: quando $a < b^k$

O fator geométrico da série é maior que 1, e pode-se usar a expressão padrão para somar séries geométricas.

Denota-se b^k/a por F (F é uma constante).

Uma vez que o primeiro elemento da série é a^m, obtém-se

$$T(n) = a^m[\ (F^{m+1} - 1) / (F - 1)\ ]$$
$$= O(\ a^m F^m\ )$$
$$= O(\ (b^K)^m\ ) = O(\ (b^m)^k\ )$$
$$= O(\ n^k\ )$$