Análise de Algoritmos

Relações de Recorrência

Relação de Recorrência com Histórico Completo

É aquela que depende de todos os valores anteriores da função, não somente de alguns.

Relação de Recorrência com Histórico Completo

Uma das mais simples relação de recorrência com histórico completo é:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(\,i\,)$$

Onde c é uma constante e T(1) é dado.

Relação de Recorrência com Histórico Completo

Para solucionar essas recorrências é preciso utilizar métodos para solucionar somatórias.
Uma das técnicas é reescrever a recorrência de tal forma que muitos dos termos sejam cancelados. Isto é chamado de
Eliminação de histórico

Solucionando a Recorrência

Na recorrência:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(\ i\ )$$

Podemos eliminar o histórico comparando $T(n+1)$ com $T(n)$, calculando a diferença.

$$T(n+1) - T(n), \text{ onde}$$

$T(n+1) = c + \sum_{i=1}^{n} T(\ i\ ) = c+T(1)+T(2)+ \ldots +T(n-1) + T(n)$

$T(\ \ n\ \ ) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(\ i\ )= c+T(1)+T(2)+ \ldots +T(n-1)$

Assim

$$T(n+1) - T(n) = T(n)$$

Solucionando a Recorrência

Para reescrever a recorrência:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$$

onde c é constante e T(1) é dado. Vamos calcular T(2), T(3), T(4) e T(5) para tentarmos reescrever a recorrência.

$T(2) = c + T(1)$

$T(3) = c + T(1) + T(2)$ substituindo T(2) temos

$T(3) = c + T(1) + (c + T(1))$ e assim temos que

$T(3) = 2c + 2T(1)$

$T(4) = c + T(1) + T(2) + T(3)$ substituindo T(2) e T(3)

$T(4) = c + T(1) + (c + T(1)) + (2c + 2T(1))$ e assim

$T(4) = 4c + 4T(1)$

Solucionando a Recorrência

$T(5) = c + T(1) + T(2) + T(3) + T(4)$ substituindo temos

$T(5) = c + T(1) + (c + T(1)) + (2c+2T(1)) + (4c+4T(1))$

E assim

$T(5) = 8c + 8T(1)$

Podemos dizer que :

$T(n) = (c+T(1))2^{n-2}$

Para todo $n \geq 2$

Solucionando a Recorrência

A prova sai por indução:

1 . passo de indução

$$T(2) = (c+T(1)) \text{ por definicição}$$

$$c + \Sigma_{i=1}^{n-1} T(i) = (c + T(1))$$

$$c + \Sigma_{i=1}^{2-1} T(i) = (c + T(1))$$

$$c + \Sigma_{i=1}^{1} T(i) = (c + T(1))$$

$$c + T(1) = c + T(1)$$

c.q.d

2. Hipótese de indução:

$$T(n) = (c+T(1))2^{n-2}$$

Solucionando a Recorrência

3. A prova é dada pela diferença entre T(n+1) e T(n)

$$T(n+1) – T(n) = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-1} - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-1} - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$2((c+T(1))2^{n-2}) - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

c.q.d.