

Análise de Algoritmos

Relações de Recorrência

Relação de Recorrência com Histórico Completo

É aquela que depende de todos os valores anteriores da função, não somente de alguns.

Relação de Recorrência com Histórico Completo

Uma das mais simples relação de recorrência com histórico completo é:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$$

Onde c é uma constante e $T(1)$ é dado.

Relação de Recorrência com Histórico Completo

Para solucionar essas recorrências é preciso utilizar métodos para solucionar somatórias. Uma das técnicas é reescrever a recorrência de tal forma que muitos dos termos sejam cancelados. Isto é chamado de **Eliminação de histórico**

Solucionando a Recorrência

Na recorrência:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$$

Podemos eliminar o histórico comparando $T(n+1)$ com $T(n)$, calculando a diferença.

$T(n+1) - T(n)$, onde

$$T(n+1) = c + \sum_{i=1}^n T(i) = c + T(1) + T(2) + \dots + T(n-1) + T(n)$$

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i) = c + T(1) + T(2) + \dots + T(n-1)$$

Assim

$$T(n+1) - T(n) = T(n)$$

Solucionando a Recorrência

Para reescrever a recorrência:

$$T(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i)$$

onde c é constante e $T(1)$ é dado. Vamos calcular $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$ e $T(5)$ para tentarmos reescrever a recorrência.

$$T(2) = c + T(1)$$

$$T(3) = c + T(1) + T(2)$$

$$T(3) = c + T(1) + (c + T(1))$$

$$T(3) = 2c + 2T(1)$$

substituindo $T(2)$ temos

e assim temos que

$$T(4) = c + T(1) + T(2) + T(3) \quad \text{substituindo } T(2) \text{ e } T(3)$$

$$T(4) = c + T(1) + (c + T(1)) + (2c + 2T(1)) \quad \text{e assim}$$

$$T(4) = 4c + 4T(1)$$

Solucionando a Recorrência

$$T(5) = c + T(1) + T(2) + T(3) + T(4) \quad \text{substituindo temos}$$

$$T(5) = c + T(1) + (c + T(1)) + (2c + 2T(1)) + (4c + 4T(1))$$

E assim

$$T(5) = 8c + 8T(1)$$

Podemos dizer que :

$$T(n) = (c + T(1))2^{n-2}$$

Para todo $n \geq 2$

Solucionando a Recorrência

A prova sai por indução:

1 . passo de indução

$T(2) = (c+T(1))$ por definição

$$c + \sum_{i=1}^{n-1} T(i) = (c + T(1))$$

$$c + \sum_{i=1}^{2-1} T(i) = (c + T(1))$$

$$c + \sum_{i=1}^1 T(i) = (c + T(1))$$

$$c + T(1) = c + T(1)$$

c.q.d

2. Hipótese de indução:

$$T(n) = (c+T(1))2^{n-2}$$

Solucionando a Recorrência

3. A prova é dada pela diferença entre $T(n+1)$ e $T(n)$

$$T(n+1) - T(n) = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-1} - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-1} - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$2((c+T(1))2^{n-2}) - (c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

$$(c+T(1))2^{n-2} = T(n)$$

c.q.d.