Análise de Algoritmos

Paradigma Divisão e Conquista

Paradigma de Divisão-e-Conquista

- Este paradigma consiste em resolver problemas de forma recursiva, aplicando três passos em cada nível de recursão:
  - **Dividir**: o problema em um número de subproblemas que são instâncias menores do mesmo problema;
  - **Conquistar**: os subproblemas solucionando-os recursivamente; porém no caso de subproblemas muito pequenos apenas determine a solução; e
  - **Combinar**: as soluções dos subproblemas na solução para o problema original.

Paradigma de Divisão-e-Conquista

- Quando os subproblemas são suficientemente grandes para serem solucionados recursivamente, são chamados de **casos recursivos**; e
- Uma vez que, o subproblema tornando-se menor o suficiente para não necessitar de recursão para solução, então são chamados de **caso base**.
- Às vezes, além de subproblemas que são instâncias menores do mesmo problema, temos que resolver subproblemas que não são exatamente iguais ao problema original. Consideramos a resolução de tais subproblemas como parte da etapa de combinação.

Paradigma de Divisão-e-Conquista

- **Recorrências**:
  - As recorrências andam de mãos dadas com o paradigma de divisão e conquista, porque nos dão uma maneira natural de caracterizar os tempos de execução desses algoritmos. **Uma recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores.**
  - As recorrências podem assumir muitas formas. Por exemplo, um algoritmo recursivo pode dividir subproblemas em tamanhos desiguais, como uma divisão de 2/3 - para - 1/3. Se as etapas de dividir e combinar levarem tempo linear, tal algoritmo daria origem à recorrência : $T(n) = T(2n/3) + T(n/3) + \Theta(n)$
  - Os subproblemas não são necessariamente limitados a serem uma fração constante do tamanho original do problema, como em $T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$.

Paradigma de Divisão-e-Conquista

Vamos apresentar a solução de dois problemas, onde comparamos, a complexidade de uma solução sem e outra com o uso de Divisão-e-Conquista.

As complexidades dos algoritmos recursivos estão determinadas a partir das recorrências.

Os problemas são:

- Determinar o Subvetor de Valor Máximo; e
- Multiplicação de Matrizes Quadradas.

Paradigma de Divisão-e-Conquista

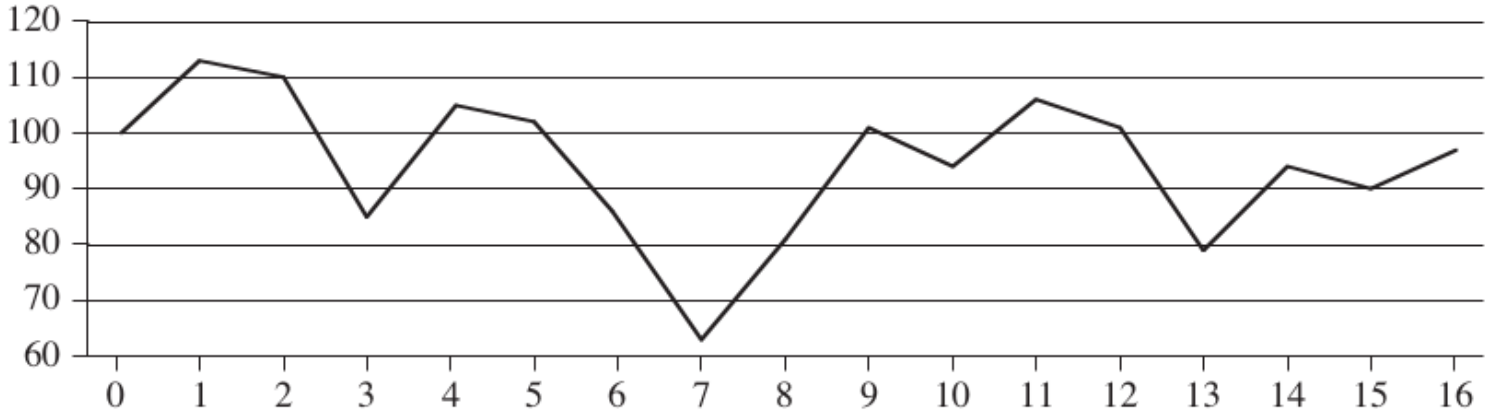
Problema:

Determina o Subvetor de Valor Máximo

Problema do subvetor máximo

- Suponha que lhe ofereceram a oportunidade de investir na Volatile Chemical Corporation. Assim como os produtos químicos que a empresa produz, o preço das ações da Volatile Chemical Corporation é bastante volátil.
- Você pode comprar uma unidade de ação apenas uma vez e depois vendê-la em uma data posterior, comprando e vendendo após o fechamento do pregão do dia. Para compensar essa restrição, você pode saber qual será o preço da ação no futuro.
- Seu objetivo é maximizar seu lucro. A Figura 1 mostra o preço da ação em um período de 17 dias. Você pode comprar a ação a qualquer momento, começando após o dia 0, quando o preço for de $ 100 por ação.

Problema do Subvetor Máximo



Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

Problema do Subvetor Máximo

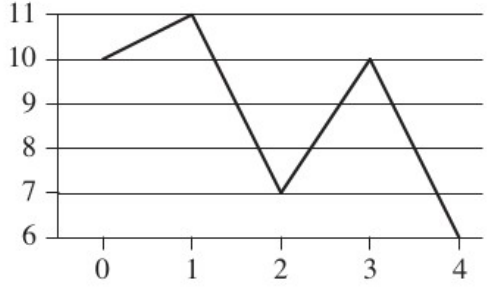
- É claro que você gostaria de “comprar na baixa, vender na alta” — comprar pelo preço mais baixo possível e depois vender pelo preço mais alto possível — para maximizar seu lucro.
- Infelizmente, você pode não conseguir comprar pelo preço mais baixo e depois vender pelo preço mais alto dentro de um determinado período. Na Figura 1, o preço mais baixo ocorre após o dia 7, que ocorre após o preço mais alto, após o dia 1.

Problema do Subvetor Máximo

- Você pode pensar que sempre pode maximizar o lucro comprando pelo preço mais baixo ou vendendo pelo preço mais alto.
- Por exemplo, na Figura 1, maximizaríamos o lucro comprando pelo preço mais baixo, após o dia 7. Se essa estratégia sempre funcionasse, seria fácil determinar como maximizar o lucro: encontre os preços mais altos e mais baixos e, em seguida, trabalhe para a esquerda do preço mais alto para encontrar o preço anterior mais baixo, trabalhe diretamente do preço mais baixo para encontrar o preço mais alto depois e pegue o par com a maior diferença.

Problema do Subvetor Máximo

- A Figura 2 mostra um contra-exemplo simples, demonstrando que o lucro máximo às vezes não vem da compra pelo preço mais baixo nem da venda pelo preço mais alto.



Day	0	1	2	3	4
Price	10	11	7	10	6
Change		1	−4	3	−4

Problema do Subvetor Máximo

- FORÇA BRUTA
  - Podemos facilmente conceber uma solução de força bruta para esse problema: tente todos os pares possíveis de datas de compra e venda em que a data de compra precede a data de venda.
  - Qual A COMPLEXIDADE ??

Problema do Subvetor Máximo

- Um período de n dias tem $\binom{n}{2}$ pares de datas. Como $\binom{n}{2}$ é $\Theta(n^2)$, e o melhor que podemos esperar é avaliar cada par de datas em tempo constante, essa abordagem levaria um tempo $\Omega(n^2)$. Podemos fazer melhor?
- Para projetar um algoritmo com um tempo de execução $O(n^2)$, veremos a entrada de uma maneira ligeiramente diferente. Queremos encontrar uma sequência de dias em que a variação líquida do primeiro ao último dia seja máxima.

Problema do Subvetor Máximo

- Em vez de olhar para os preços diários, consideremos a variação diária do preço, onde a variação no dia i é a diferença entre os preços após o dia i - 1 e após o dia i. O vetor abaixo mostra essas mudanças diárias, e representa a linha inferior da Figura 1.

13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

- Agora queremos encontrar o subvetor contíguo e não vazio de A cujos valores tenham a maior soma. Chamamos esse subarranjo contíguo de **subvetor máximo**.

Problema do Subvetor Máximo

- Por exemplo, no vetor anterior, o subvetor máximo de A[1 .. 16] é A[8 .. 11], com a soma 43. Assim, você gostaria de comprar a ação logo antes do dia 8 (que é, após o dia 7) e vendê-lo após o dia 11, obtendo um lucro de $ 43 por ação.
- Como podemos solucionar agora o problema?
- Melhorou nossa complexidade ?

Problema do Subvetor Máximo

- Vamos pensar em como podemos resolver o problema do subarranjo máximo usando a técnica de dividir e conquistar. Suponha que queremos encontrar um subarranjo máximo do subarranjo A[low .. high].
- Dividir e conquistar sugere que dividamos o subarranjo em dois subarranjos de tamanho tão igual quanto possível. Ou seja, encontramos o ponto médio, digamos, mid, do subarray, e consideramos os subarrays A[low .. mid] e A[mid + 1 .. high].

Problema do Subvetor Máximo

- Assim, qualquer subarranjo contíguo A[i..j] de A[low..high] deve estar exatamente em um dos seguintes locais:
  - inteiramente no subarranjo A[low..mid], de modo que

    $low \leq i \leq j \leq mid$,
  - inteiramente no subarranjo A[mid + 1 .. high], de modo que
  - $mid < i \leq j \leq high$, ou
  - cruzando o ponto médio, de modo que
  - $low \leq i \leq mid < j \leq high$.

Problema do Subvetor Máximo

- Portanto, um subarranjo máximo de A[low..high] deve estar exatamente em um desses lugares. De fato, um subarray máximo de A[low..high] deve ter a maior soma sobre todos os subarrays inteiramente em A[low..mid], inteiramente em A[mid+1..high], ou cruzando o ponto médio. Podemos encontrar subarranjos máximos de A[low..mid] e A[mid+1..high] recursivamente, porque esses dois subproblemas são instâncias menores do problema de encontrar um subarranjo máximo.

Problema do Subvetor Máximo

- Assim, tudo o que resta a fazer é encontrar um subvetor máximo que atravessa o ponto médio.
- Este problema não é uma instância menor do problema original e sim, é uma restrição que o subvetor escolhido pode cruzar o ponto médio.
- Podemos facilmente encontrar o subvetor máximo atravessando o ponto médio em tempo linear. O algoritmo a seguir resolve o problema.

Problema do Subvetor Máximo

```
algoritmo find_max_crossing_subarray(A,low,mid,high)
    left_sum ← -∞
    sum ← 0
    para i ← mid até low passo -1
        sum ← sum + A[i]
        se sum > left_sum então
            left_sum ← sum
            left_max ← i
    right_sum ← -∞
    sum ← 0
    para j ← mid+1 até high
        sum ← sum + A[j]
        se sum > right_sum então
            right_sum ← sum
            right_max ← j
Retorne(left_max, right_max, left_sum + right_sum)
```

Problema do Subvetor Máximo

```
algoritmo find_maximum_subarray(A, low, high)
    se low==high então
        retorne(low, high, A[low])
    senão
        mid = (low+high)/2
        (left_low, left_high, left_sum) = find_maximum_subarray(A,low, mid)
        (right_low,right_high,right_sum)=find_maximum_subarray(A,mid+1,high)
        (cross_low,cross_high,cross_sum)=find_maximum_corssig_subarray(A,low,mid,high)
        se left_sum ≥ right_sum e left_sum ≥ cross_sum então
            Retorne(left_low, left_high, left_sum)
        senão
            se right_sum ≥ letf_sum e right_sum  ≥ cross_sum então
                Retorne(right_low, right_high, right_sum)
            senão
                Retorne(cross_low, cross_high, cross_sum)
fim_algoritmo
```

Problema do Subvetor Máximo

- Analisando o algoritmo divisão e conquista.
  - Vamos construir uma equação, recorrência, que descreva o tempo de execução do algoritmo Find_Maximum_Subarray.
  - Para tal, vamos assumir que o tamanho da entrada, n, seja uma potência de 2 para simplificar o entendimento.
  - Denotamos por T(n) o tempo de execução do algoritmo com uma instância de tamanho n.
  - O caso base do algoritmo ocorre quando n=1, e na segunda linha é dada a solução deste. Logo o custo é constante e temos que

    $T(1)=\Theta(1)$.

Problema do Subvetor Máximo

- O caso recursivo ocorre quando n>1, e então temos:
  - As linhas 1 e 3 têm tempo constante;
  - Nas linhas 4 e 5 solucionam os subproblemas com subvetores contendo n/2 elementos cada e com tempo T(n/2);
  - Na linha 6 é definido um subvetor máximo atravessando o ponto médio, que consome o tempo de $\Theta(n)$;
  - As linhas de 7 a 11 consomem um tempo constante; e assim
- A recorrência do caso recursivo é dado por

$$T(n) = \Theta(1) + 2T(n/2) + \Theta(n) + \Theta(1)$$
$$= 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Problema do Subvetor Máximo

- Combinando caso base e caso recursivo temos a recorrência é dada por:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{se } n>1 \end{cases}$$