Análise de Algoritmos

Projeto de Algoritmos por Indução

Projeto de Algoritmos por Indução

- A formulação do algoritmo vai ser análoga ao desenvolvimento de uma demonstração por indução.
- Assim, para resolver um problema P:
  - mostramos como resolver instâncias pequenas de P (casos base) e
  - mostramos como obter uma solução de uma instância de P a partir das soluções de instâncias menores de P

Projeto de Algoritmos por Indução

- Este processo indutivo resulta em algoritmos recursivos, em que:
  - a base da indução corresponde à resolução dos casos base da recursão,
  - a aplicação da hipótese de indução corresponde a uma ou mais chamadas recursivas e
  - o passo da indução corresponde ao processo de obtenção da resposta para o problema original a partir das respostas devolvidas pelas chamadas recursivas.

Projeto de Algoritmos por Indução

- Um beneficio imediato é que o uso (correto) da técnica nos dá uma prova da corretude do algoritmo.
- A complexidade do algoritmo resultante é expressa numa recorrência.
- Muitas vezes é imediato como converter o algoritmo recursivo em um iterativo.
- Frequentemente o algoritmo é eficiente, embora existam exemplos simples em que isso não acontece.

Cálculo de polinômios

- Problema: Dados uma sequência de números reais a_n , a_{n-1}, ... , a_1, a_0 , e um número real x, calcular o valor do polinômio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

- Naturalmente este é um problema bem simples. Estamos interessados em projetar um algoritmo que faça o menor número de operações aritméticas (multiplicações, principalmente).

Cálculo de polinômios – solução 1

- Hipótese de indução: (primeira tentativa)
  - Dados uma sequência de números reais $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, e um número real x, sabemos calcular o valor de

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0.$$

  - Caso base: n = 0. A solução é a_0.
  - Para calcular $P_n(x)$, basta calcular x^n, multiplicar o resultado por a_n e somar o resultado com $P_{n-1}(x)$.

Algoritmo CálculoPolinomio

- Entrada: coeficientes A= {a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0} e X
- Saída: o valor de $P_n(x)$

1. se n=0 então P $\leftarrow$ a_0
2. senão
3. A' $\leftarrow$ a_{n-1}, ... , a_1, a_0
4. P' $\leftarrow$ CálculoPolinomio(A',n-1,X)
5. xn $\leftarrow$ X
6. para i $\leftarrow$ 2 até n faça
7. xn $\leftarrow$ xn * X
8. P $\leftarrow$ P' + a_n * xn
9. devolva(P)

Cálculo de polinômios – solução 1

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + n \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

Não é difícil ver que

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} [i \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}] \\ &= n(n+1)/2 \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Observação: Essa solução perde muito tempo recalculando x^n. É possível melhorar??

Cálculo de polinômios – solução 2

- Alternativa: eliminar essa computação desnecessária trazendo o cálculo de x^{n-1} para dentro da hipótese de indução.
- Hipótese de Indução reforçada: Sabemos calcular o valor de

  $P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e também de x^{n-1}

Cálculo de polinômios – solução 2

- Então, no passo de indução, primeiro calculamos x^n fazendo $x^n \leftarrow x * x^{n-1}$, conforme exigido pela hipótese. Em seguida, calculamos $P_n(x)$ multiplicando x^n por a_n e somando o valor obtido com $P_{n-1}(x)$.
- Note que para o caso base $n = 0$, a solução agora é (a0 , 1).

Algoritmo CálculoPolinomio

Entrada: coeficientes $A = \{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\}$ e X

Saída: o valor de $P_n(x)$ e x^n

1. <u>se</u> n=0 <u>então</u> P $\leftarrow$ a_0 e xn $\leftarrow$ 1
2. <u>senão</u>
3. A' $\leftarrow$ $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$
4. (P',x') $\leftarrow$ CálculoPolinomio(A',n-1,X)
5. xn $\leftarrow$ X * x'
6. P $\leftarrow$ P' + a_n * xn
7. <u>devolva</u>(P)

Cálculo de polinômios – solução 2

Se $T(n)$ é o número de operações aritméticas realizadas pelo algoritmo, então temos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ T(n-1) + 2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}, & n > 0. \end{cases}$$

A solução da recorrência é

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{n} (2 \text{ multiplicações} + 1 \text{ adição}) \\ &= 2n \text{ multiplicações} + n \text{ adições}. \end{aligned}$$

Cálculo de polinômios – solução 3

- Hipótese de indução mais reforçada:
  - Sabemos calcular o polinômio

$$P'_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$$