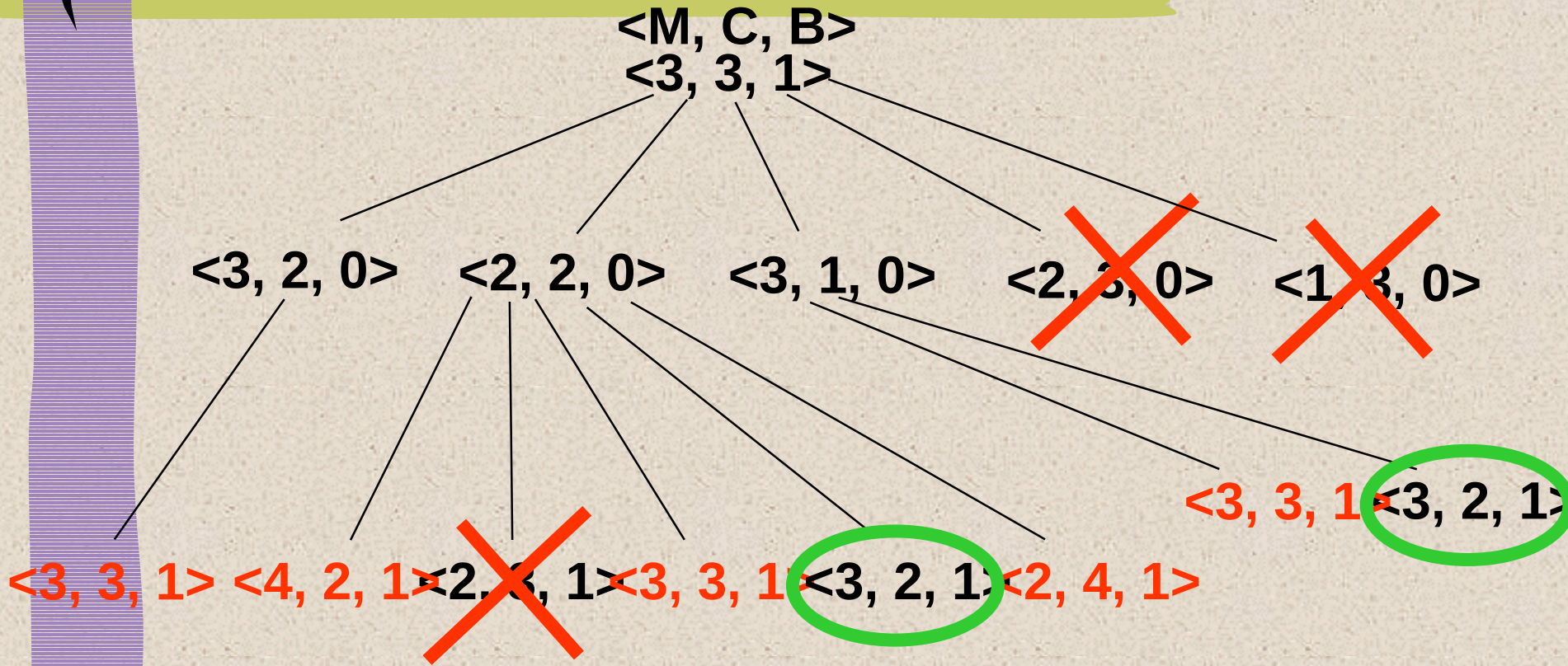
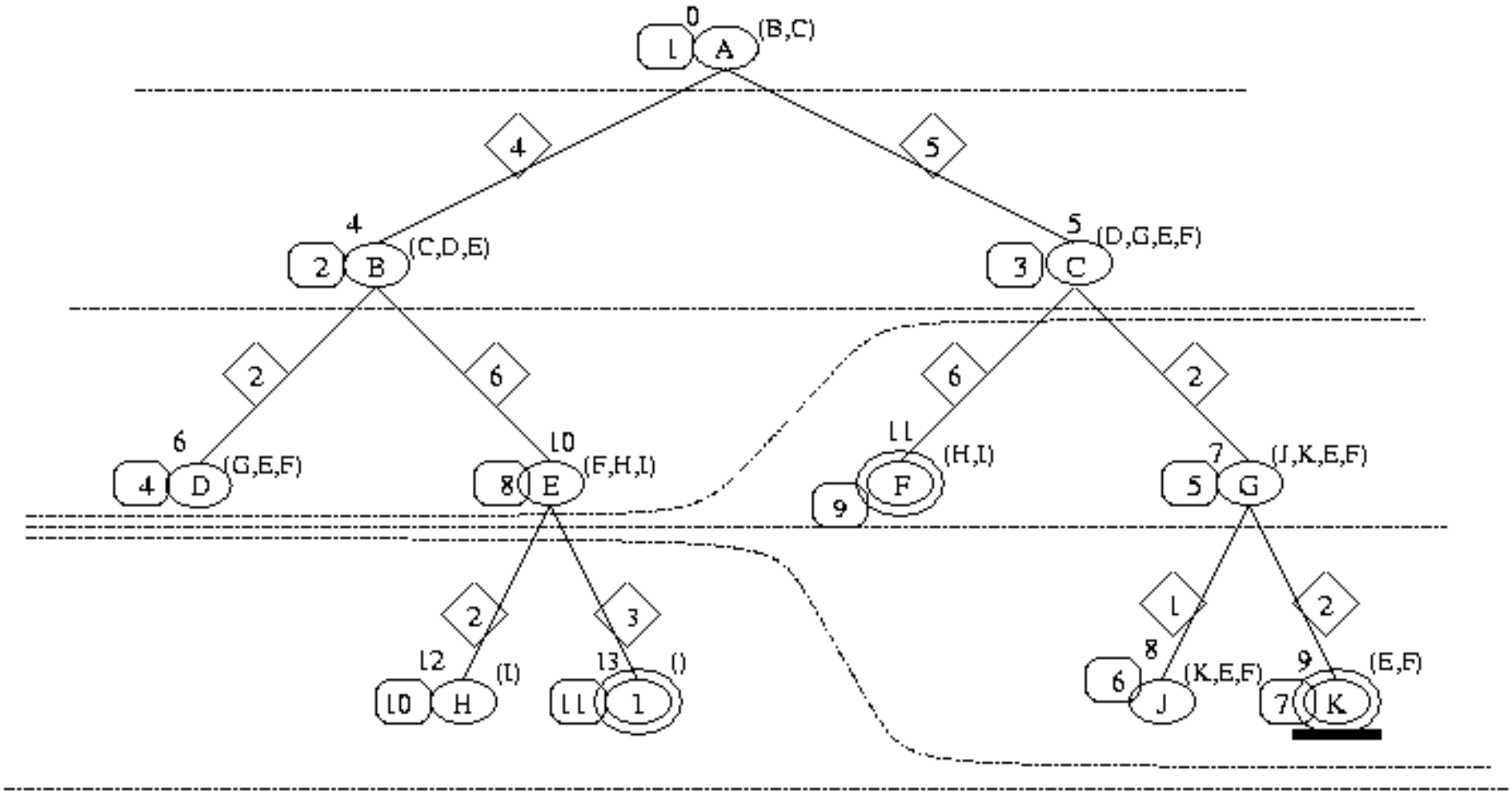
Canibais e Missionários



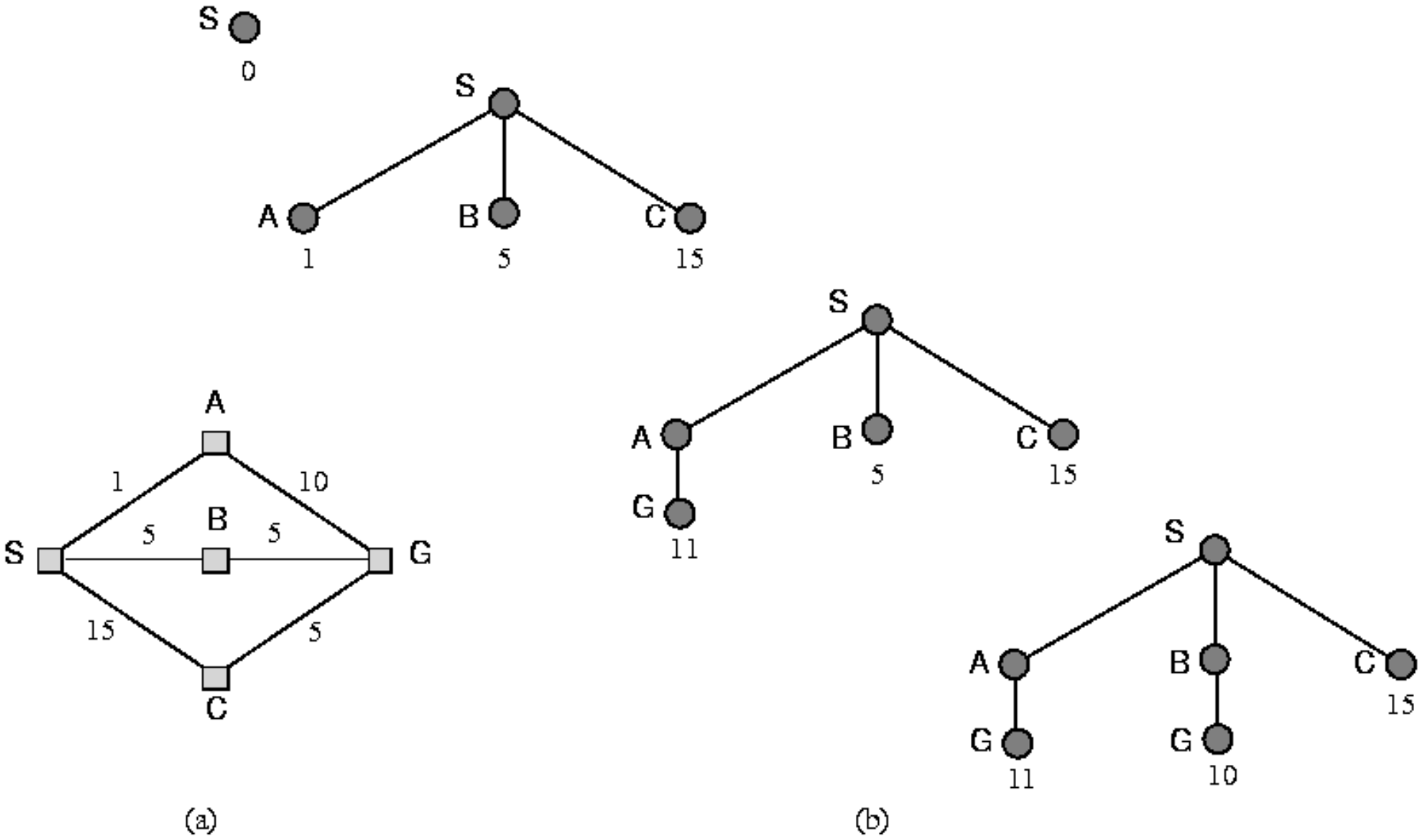
Busca de Custo Uniforme

- Completo?
  - SIM. se o custo do passo $\geq \varepsilon$
- Tempo?
  - nro de nodos com custo g $\leq$ solução de custo ótimo
- Espaço?
  - nro de nodos com custo g $\leq$ solução de custo ótimo
- Ótima?
  - SIM

Busca de Custo Uniforme



Busca de Custo Uniforme



Métodos de Busca Informada

- Busca o melhor primeiro
- Busca A*
- Heurística
- Subida de Montanha (Hill Climbing)
- Simulated Annealing

Relembrando a Busca Geral

function BUSCA_GERAL(*problema*, FILA_FN) **returns** uma solução, ou falha

nodos ←FAZ_FILA(FAZ_NODO(ESTADO_INICIAL[*problema*]))

loop

if *nodos* = vazio

then return falha

nodo ← REMOVE_DA_FRENTE(*nodos*)

if TESTE_OBJETIVO[*problema*] aplicado ao ESTADO(*nodo*) obtiver sucesso

then return *nodo*

nodos ←POE_NA_FILA(*nodos*, EXPANDE(*nodo*, OPERADORES[*problema*]))

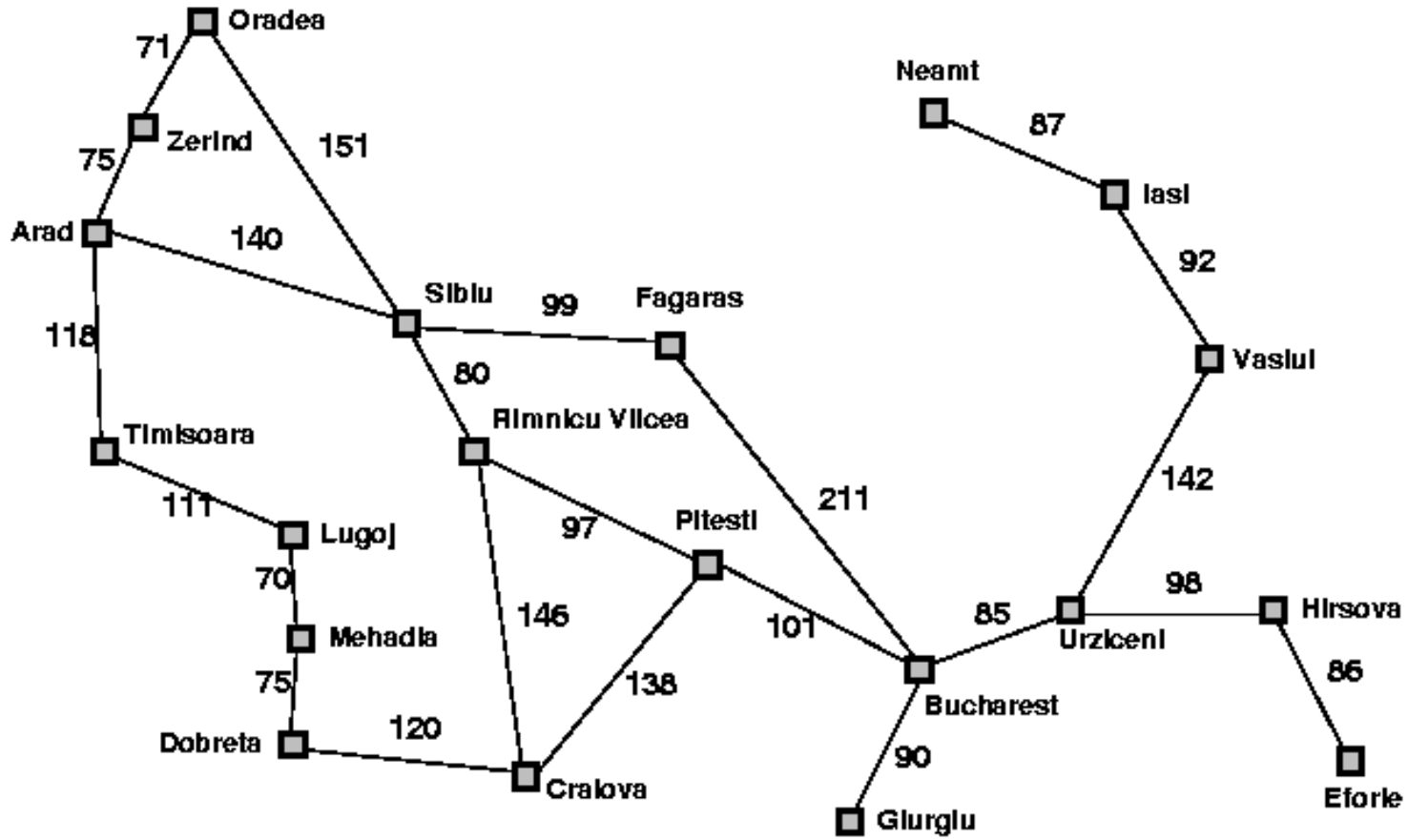
end

- **Uma estratégia é definida escolhendo-se a ordem de expansão do nodo**

Busca o Melhor Primeiro

- **IDÉIA:**
  - **Usar uma função de avaliação para cada nodo**
    - **estimativa de "quão desejável" é aquele nodo**
  - **Expande o nodo mais desejável ainda não expandido**
- **IMPLEMENTAÇÃO:**
  - **POE_NA_FILA**
    - **Insere os sucessores na ordem decrescente de "desejabilidade"**
  - **CASOS ESPECIAIS**
    - **Busca Greedy**
    - **Busca A***

A Romênia com custos em Km



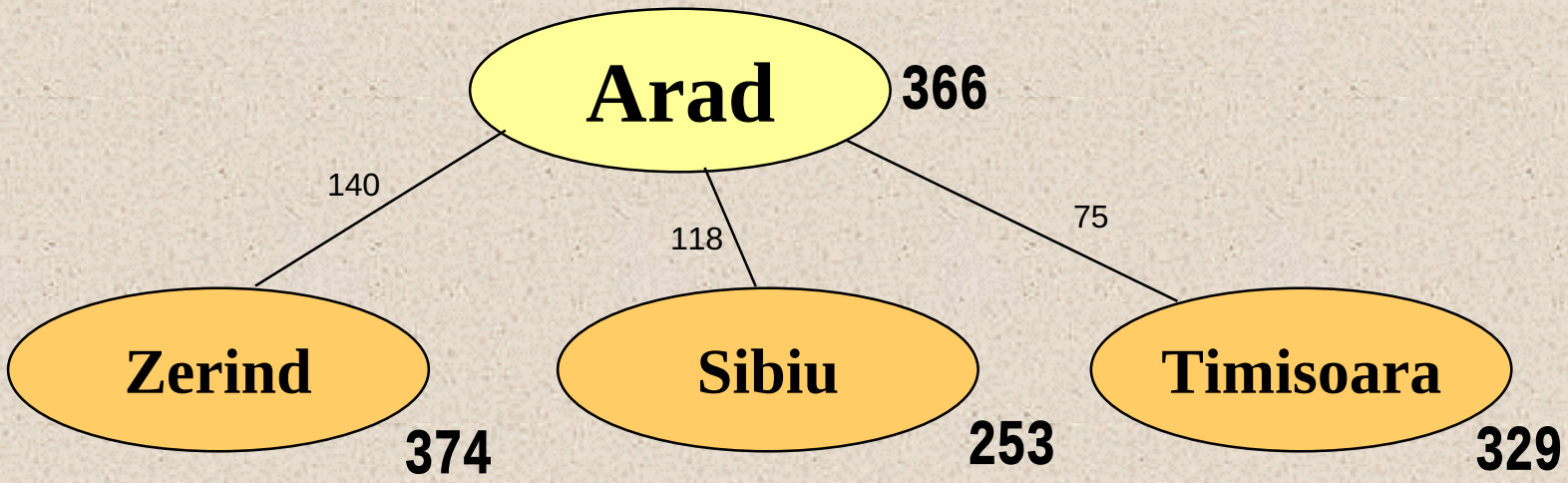
Distância até Bucarest em linha reta	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Busca Greedy

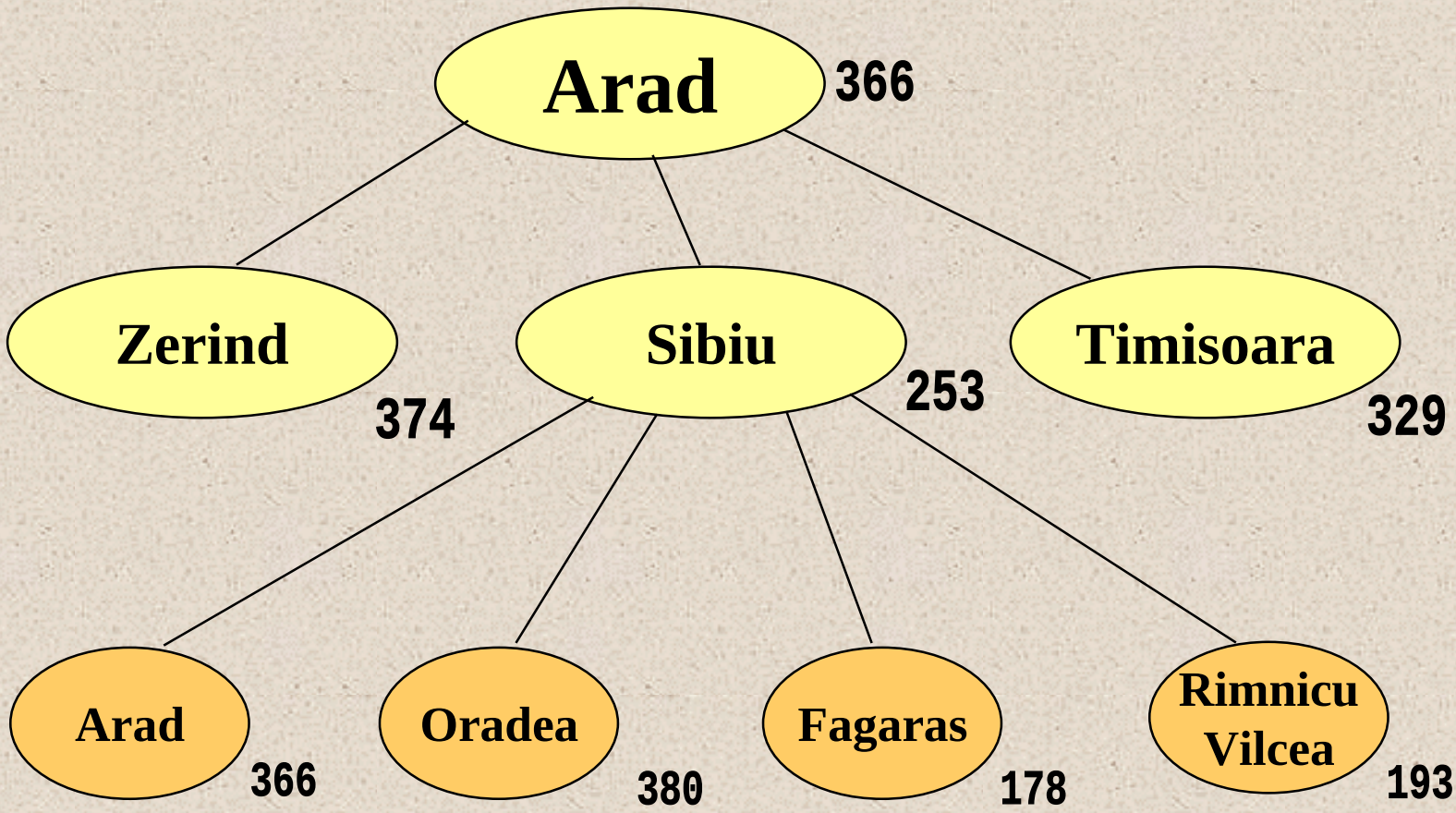
- **Função de Avaliação h(n) – (Heurística)**
  - **estimativa de custo para se chegar ao objetivo partindo-se de n**
- **Por exemplo:**
  - **h_{DLR}(n) = distância em linha reta de n até Bucarest**
- **A busca greedy (gulosa) expande o nodo que parece estar mais próximo do objetivo**

Exemplo de Busca Greedy

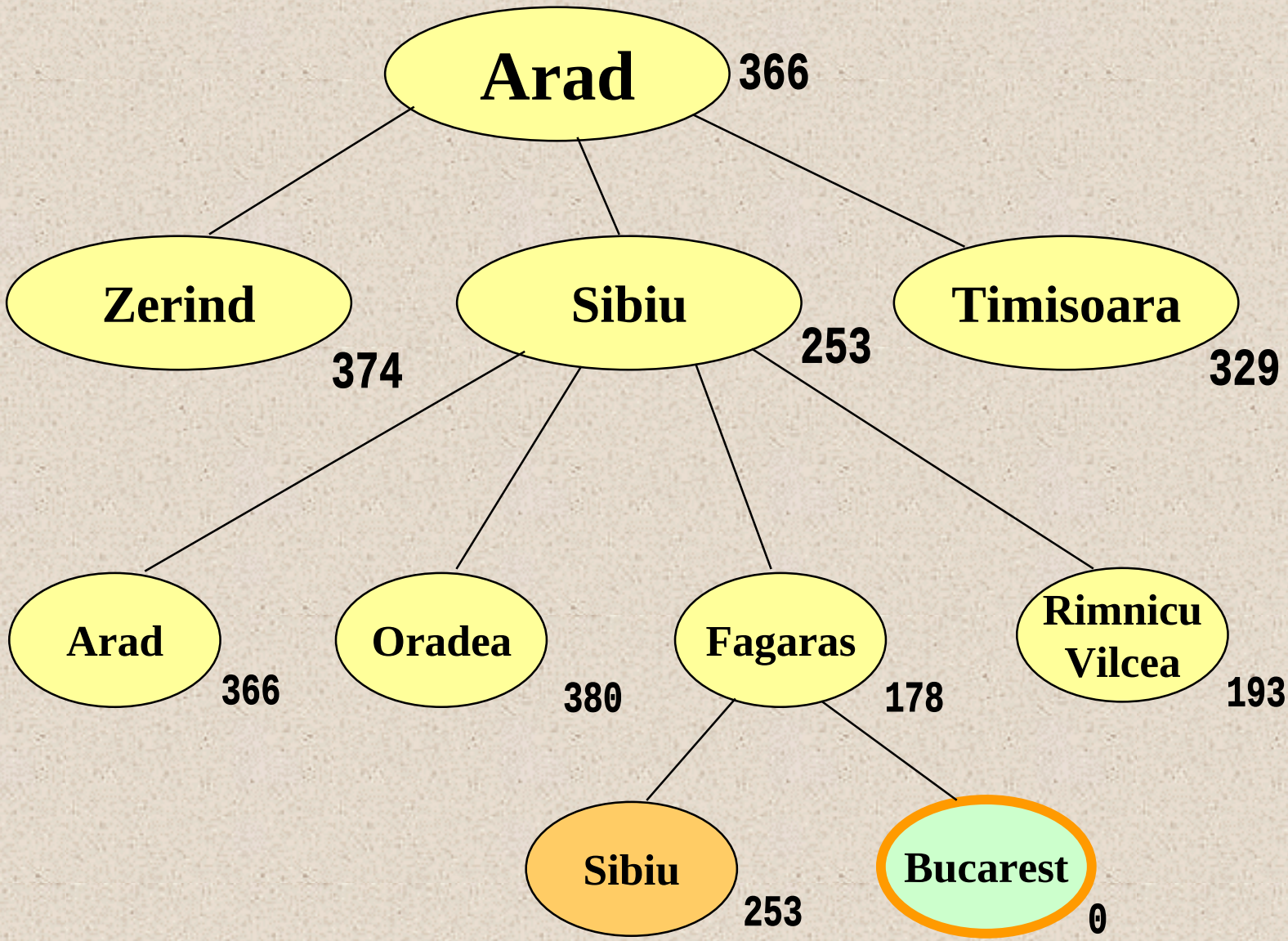
Exemplo de Busca Greedy



Exemplo de Busca Greedy



Exemplo de Busca Greedy



Propriedades da Busca Greedy

- Completa?
- Tempo?
- Espaço?
- Ótima?

Propriedades da Busca Greedy

- **Completa?**
  - **NÃO! Pode ficar presa em Loops**
  - **Ex: Iasi – Neamt – Iasi – Neamt - .....**
  - **Completo no espaço finito com verificação de repetições**
- **Tempo?**
  - **$O(b^m)$, mas uma boa heurística pode melhorar muito**
- **Espaço?**
  - **$O(b^m)$, mantem todos os nodos na memória**
- **Ótima?**
  - **Não**

Busca A*

- **IDÉIA:**
  - Evitar expandir caminhos que já estão custosos
  - Função de Avaliação f(n) = g(n) + h(n)

    g(n) = custo de alcançar n
    partindo do estado incial

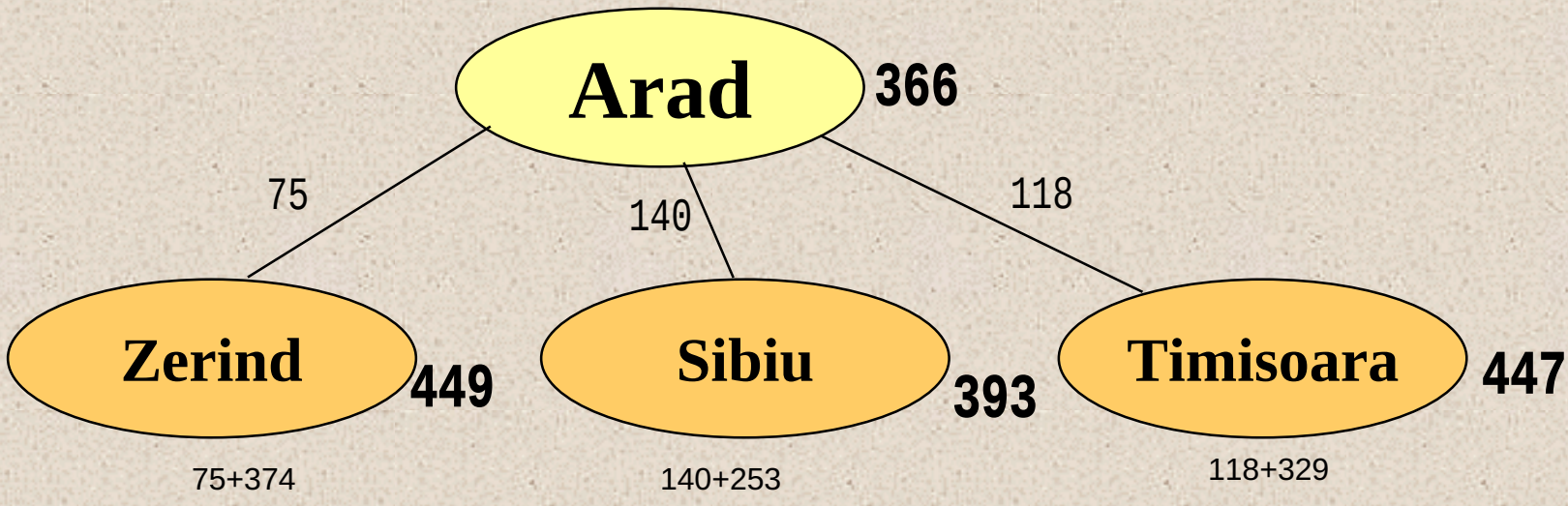
    h(n) = custo estimado para se atingir
    o objetivo a partir de n

    f(n) = custo total estimado do caminho
- **A* usa uma heurística admissível**
  - isto é, $h(n) \leq h^*(n)$ onde $h^*(n)$ é o custo <u>real</u> de n
  - Por exemplo:

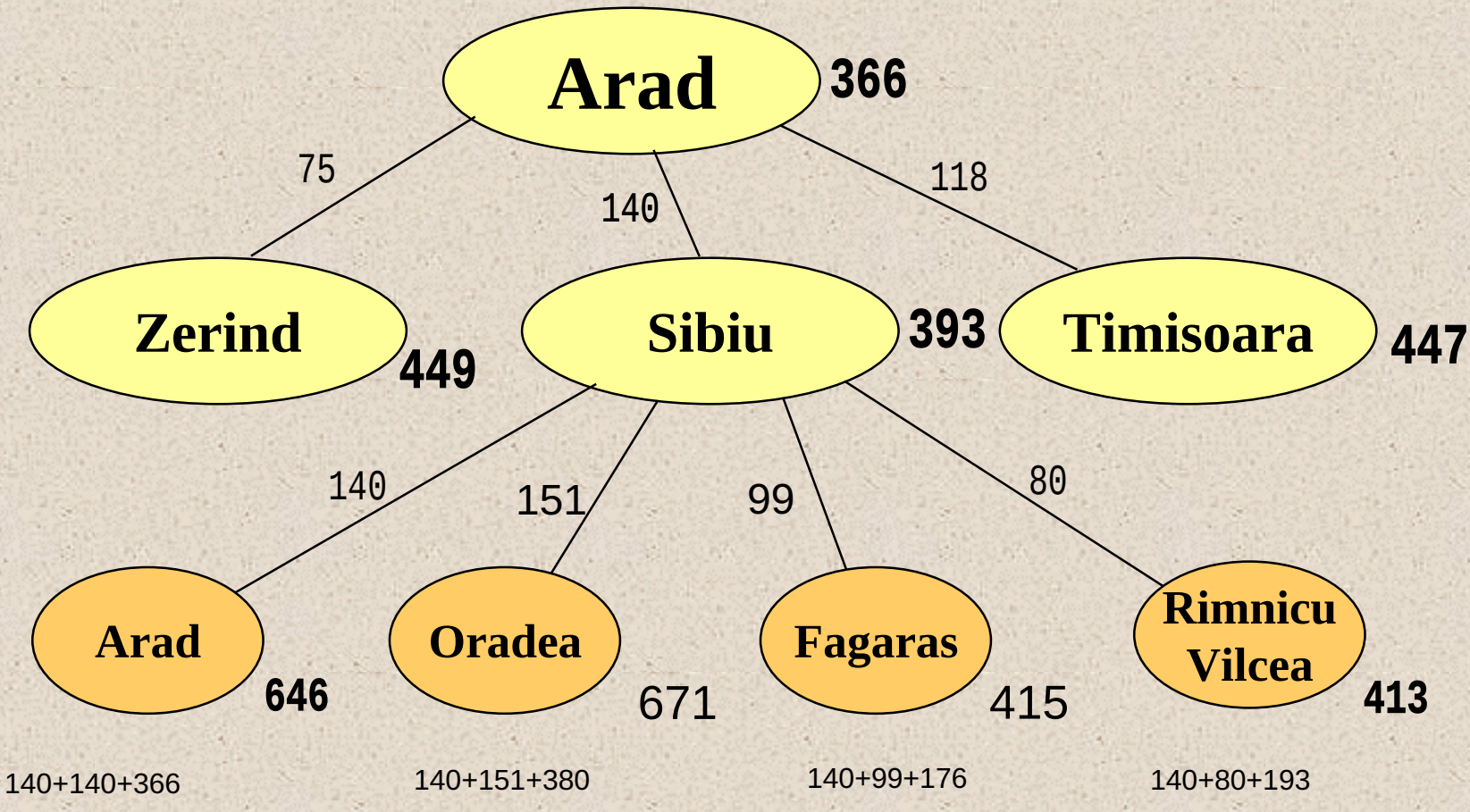
    $h_{DLR}(n)$ nunca superestima a distância
    real pela estrada
  - Teorema: A Busca A* é ótima

Exemplo de Busca A*

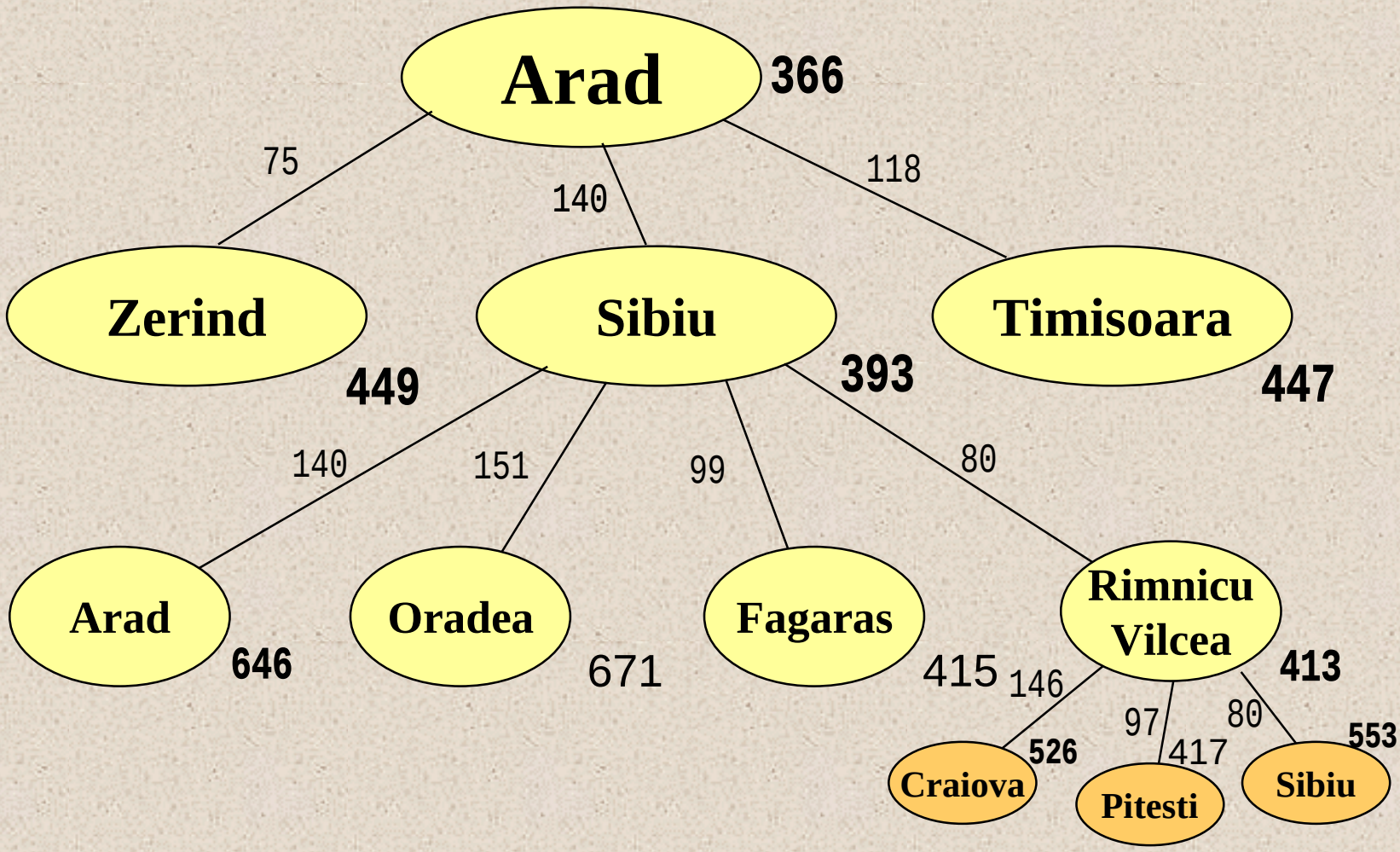
Exemplo de Busca A*



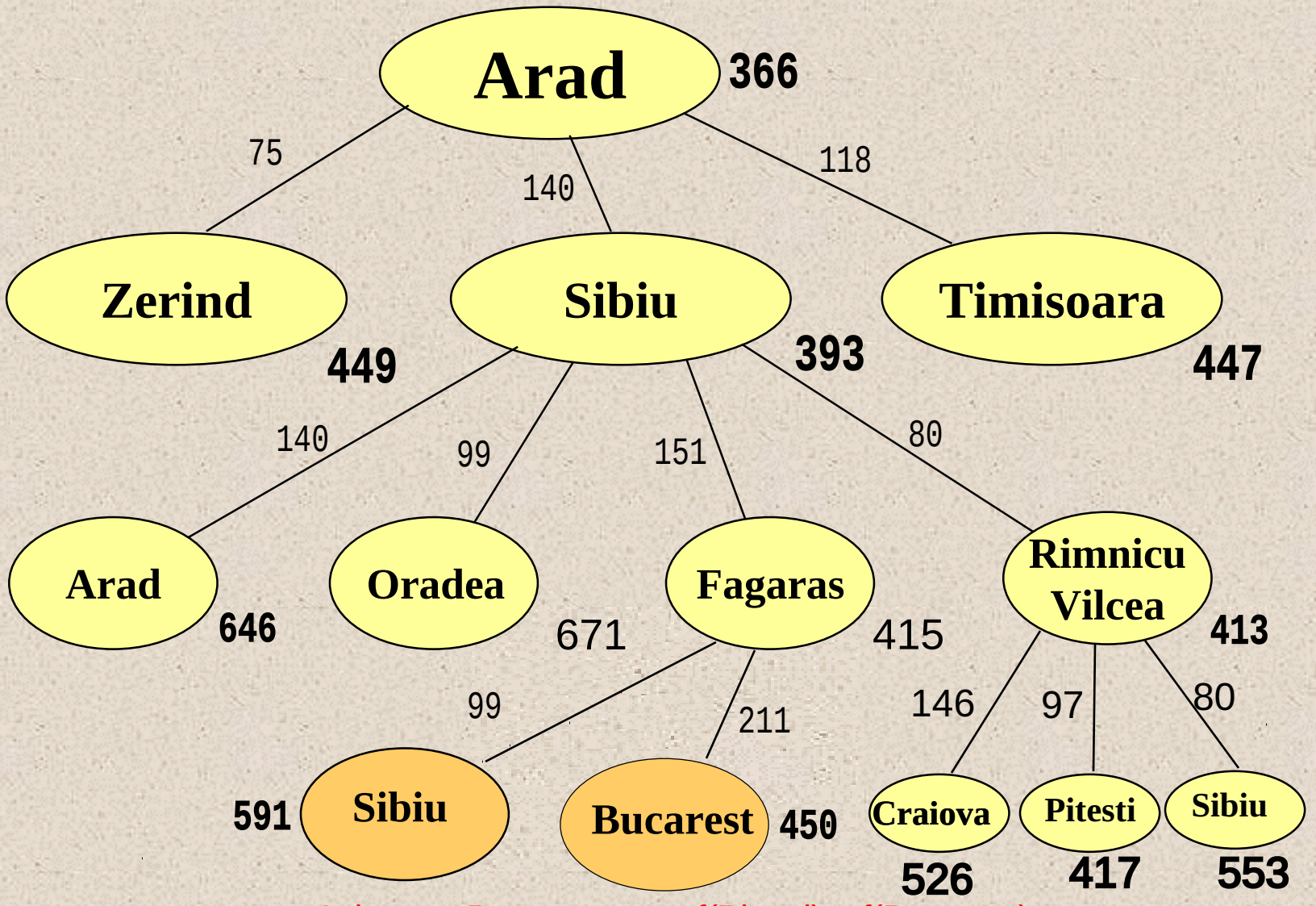
Exemplo de Busca A*



Exemplo de Busca A*

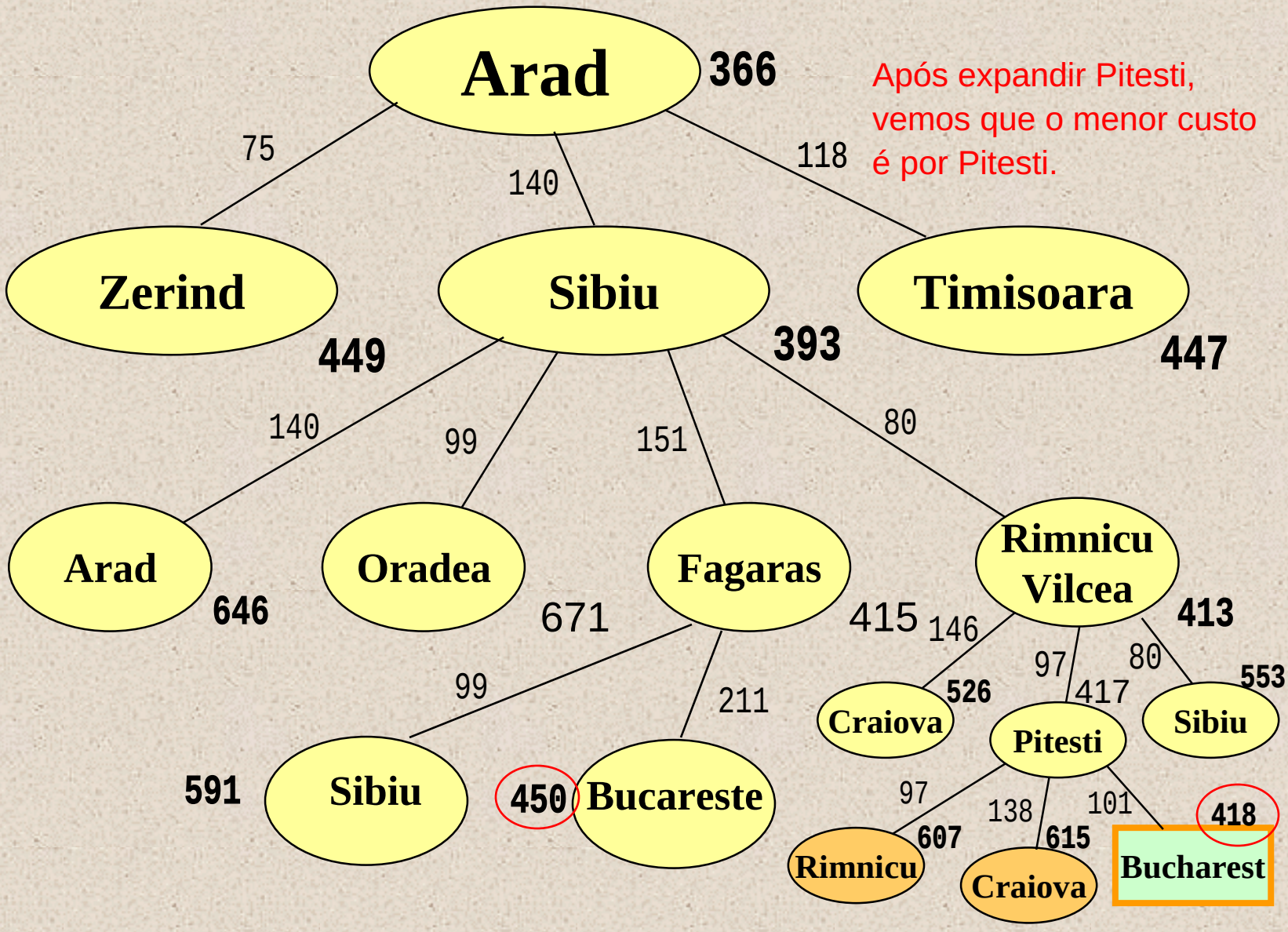


Exemplo de Busca A*



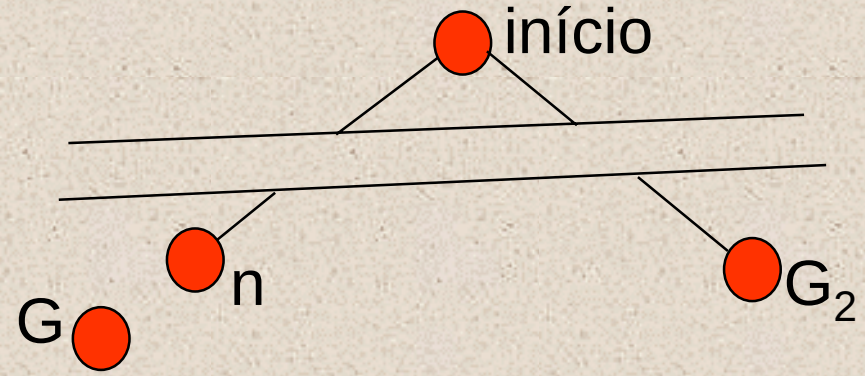
Achamos Bucarest, mas f(Pitesti) < f(Bucarest)

Exemplo de Busca A*



Optimalidade de A* (prova padrão)

- Suponha que algum objetivo subótimo G_2 tenha sido gerado e está na fila.
- Seja n um nodo não expandido sobre um caminho mais curto para um objetivo ótimo G.



A* expande todos os nodos n com $f(n) < f^*$

- $f(G_2) = g(G_2)$ já que $h(G_2) = 0$
  $> g(G)$ já que G_2 é subótimo
  $\geq f(n)$ já que h é admissível
- Como $f(G_2) > f(n)$, A* nunca selecionará G_2 para expandir

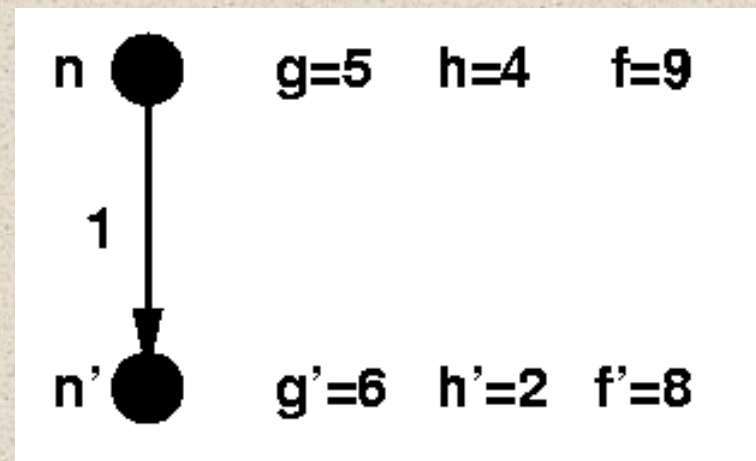
Monotonicidade

- Quando
  - Ao longo de qualquer caminho a partir da raiz, f nunca decresce
  - Há alguma heurística admissível (quase sempre)
  - Diz-se que a heurística exibe Monotonicidade

  - A heurística é monotônica sse obedece a desigualdade triangular
    - d(a,b) = d(b,a) se b≠a;
    - d(a, b) = 0 se a = b;
    - d(a, c) ≤ d(a, b) + d(b, c)

Prova do Lema: Pathmax

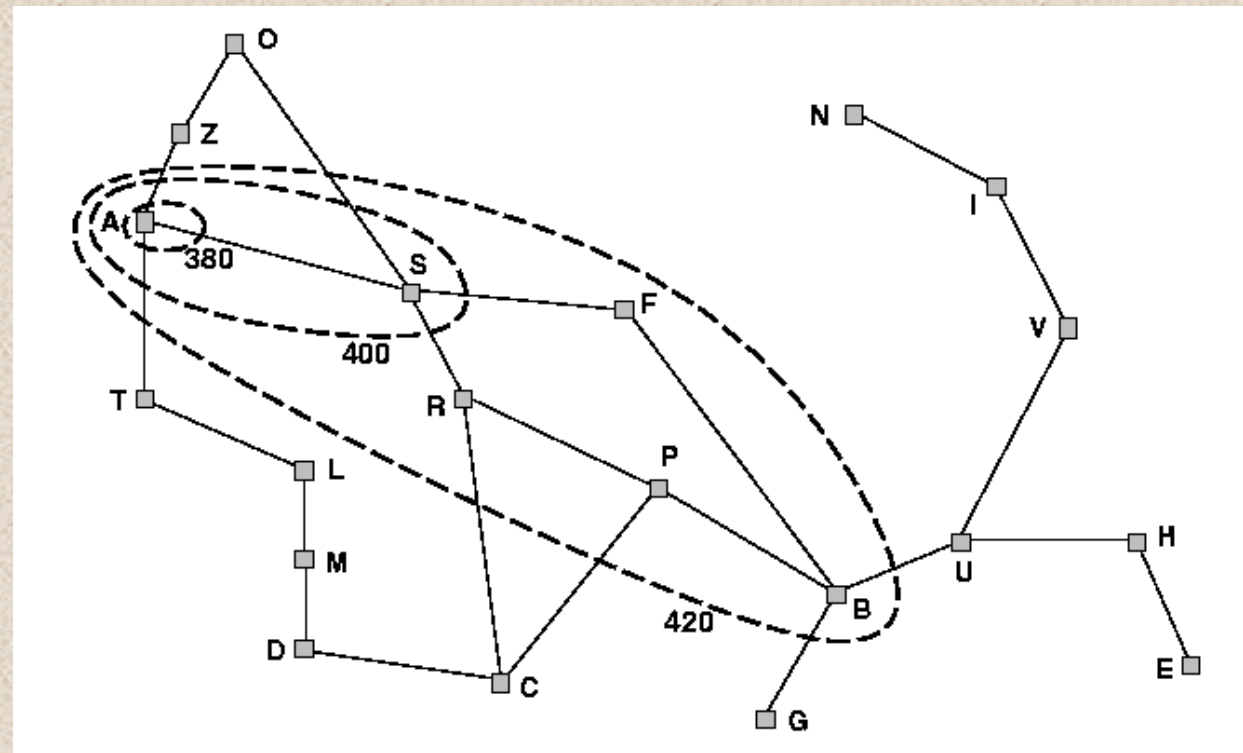
- Para algumas heurísticas admissíveis, *f* pode decrescer ao longo do caminho
  - Suponha que n' seja um sucessor de n



  - Mas v. está jogando informação fora!!!
  - $f(n) = 9 \Rightarrow$ o custo real de um caminho até n é ≥ 9
  - Logo o custo real de um caminho até n' é ≥ 9 também
- Modificação Pathmax ao A*:
  - Em vez de $f(n') = g(n') + h(n')$
  - Usar $f(n') = MAX[g(n') + h(n'), f(n')]$
- Com Pathmax, *f* é sempre não-decrescente ao longo de qualquer caminho

Optimalidade de A* (mais útil)

- **Lema: A* expande nodos em ordem crescente de valor de *f***
- **Adiciona gradualmente "contornos-*f*" dos nodos (analogamente, primeiro-na-largura adiciona camadas)**
- **O contorno i conterá todos os nodos com $f = f_i$ onde $f_i < f_{i+1}$**



Propriedades de A*

- **Completo?**
  - **SIM, a menos que sejam infinitos nodos para os quais $f \leq f(G)$**
- **Tempo?**
  - **Exponencial em [erro relativo de h x tamanho da solução]**
- **Espaço?**
  - **Mantem todos os nodos na memória**
- **Ótimo?**
  - **SIM. Não pode expandir f_{i+1} enquanto não expandir f_i**

não acredite em estatísticas (paradoxo de Simpson)

Population	New York	Richmond
White	4,675,174	80,895
Colored	91,709	46,733
Entirely	4,766,883	127,628

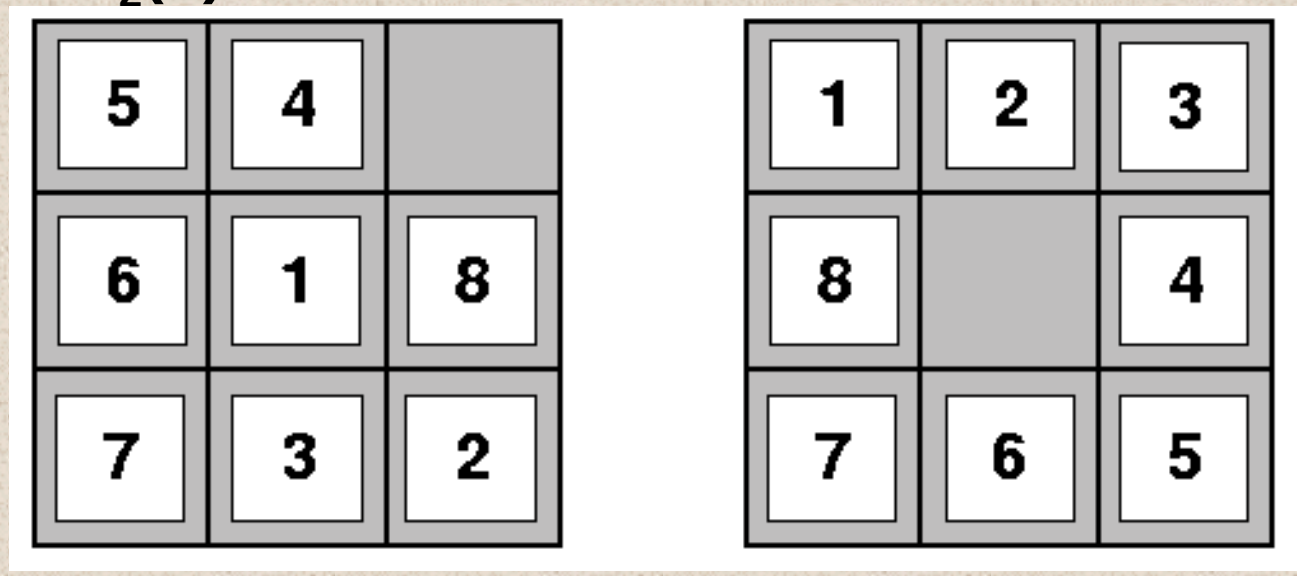
Deaths	New York	Richmond
White	8,365	131
Colored	513	155
Entirely	8,878	286

Mortality rate	New York	Richmond
White	0,00179	0,00162
Colored	0,00560	0,00332
Entirely	0,00186	0,00224

Heurísticas Admissíveis

nunca superestima o custo do objetivo

- Por exemplo, para o 8-puzzle
  - $h_1(n)$ = número de quadrados em locais errados
  - $h_2(n)$ = distância Manhattan total



estado inicial

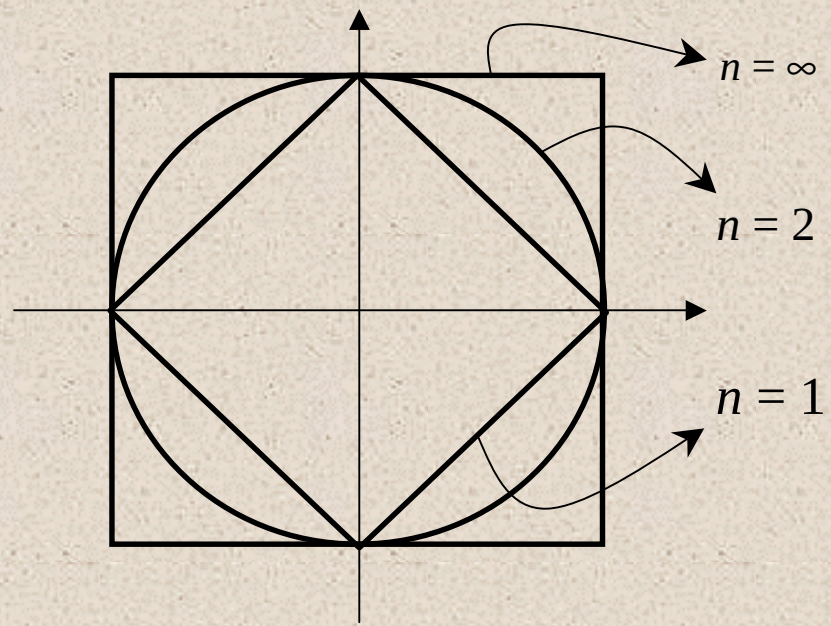
estado final

- Quais são os valores de $h_1(s)$ e de $h_2(s)$???

Distâncias

- **Minkowski**

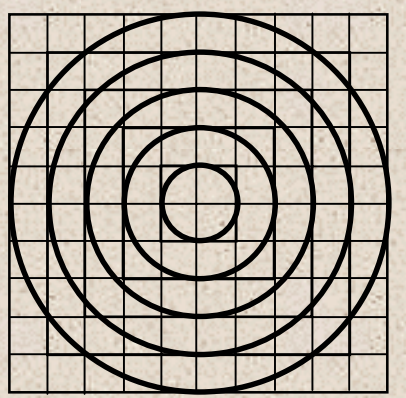
$$d_{12} = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{D} \left(\vec{v}_{1k} - \vec{v}_{2k} \right)^n}$$

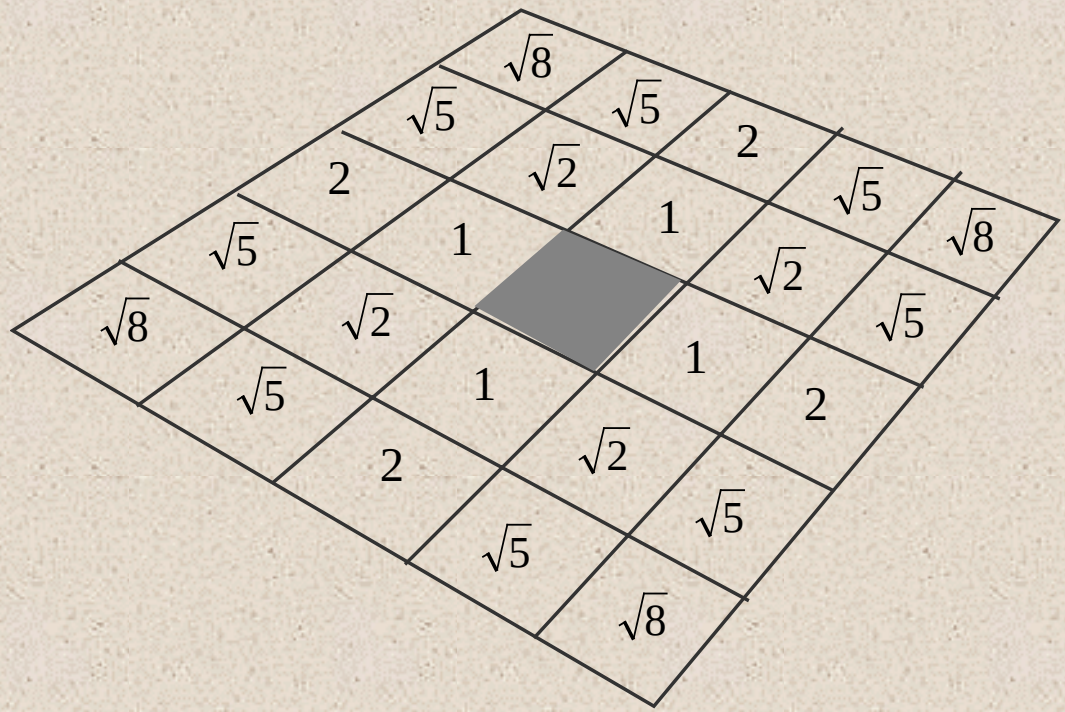


Distâncias

Euclidiana (Minkowski com *n* = 2)

$$d_{12}^{E} = \sqrt[2]{\sum_{k=1}^{D} \left(\vec{v}_{1k} - \vec{v}_{2k}\right)^2}$$

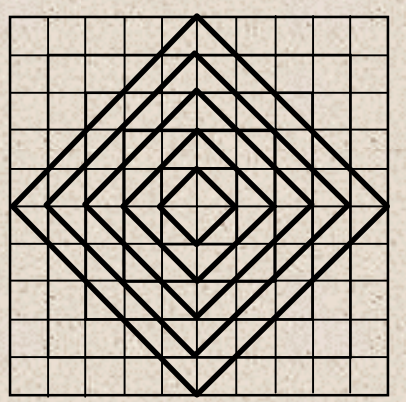


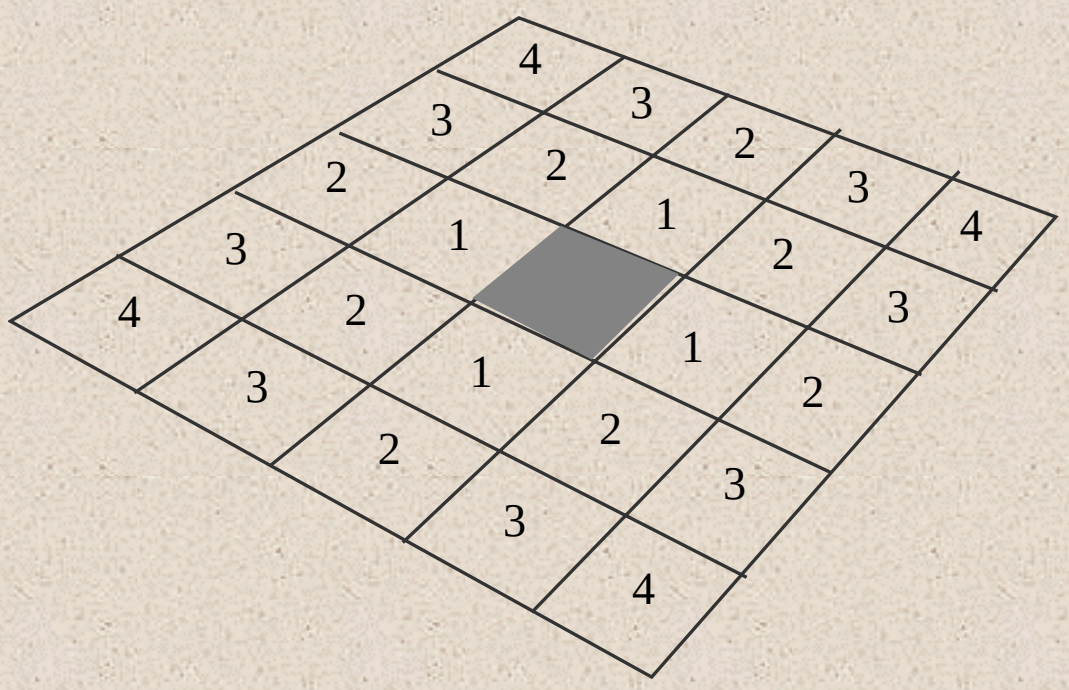


Distâncias

- **City Block ou Manhattan (Minkowski com *n* = 1)**

$$d_{12}^{C} = \sum_{k=1}^{D} \left| \vec{v}_{1k} - \vec{v}_{2k} \right|$$

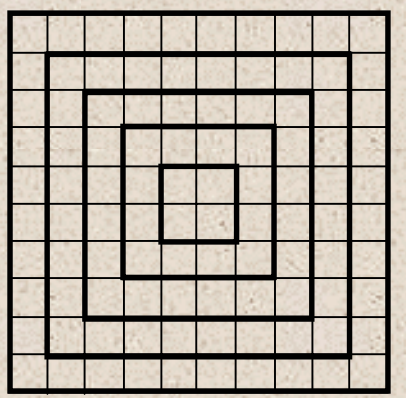


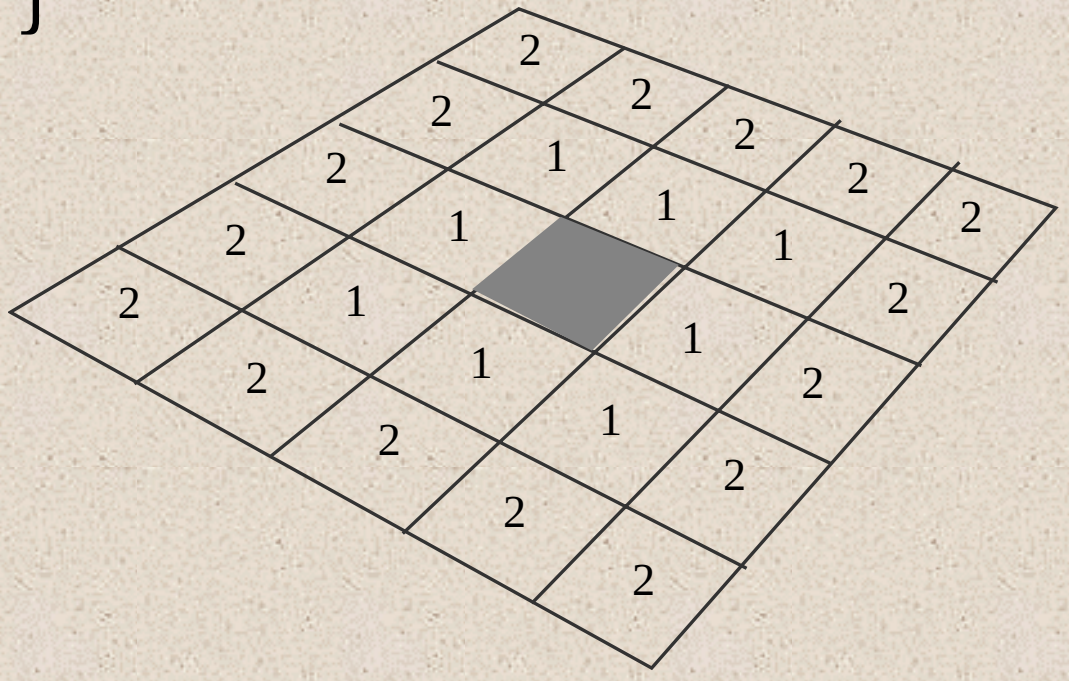


Distâncias

- **Chessboard**

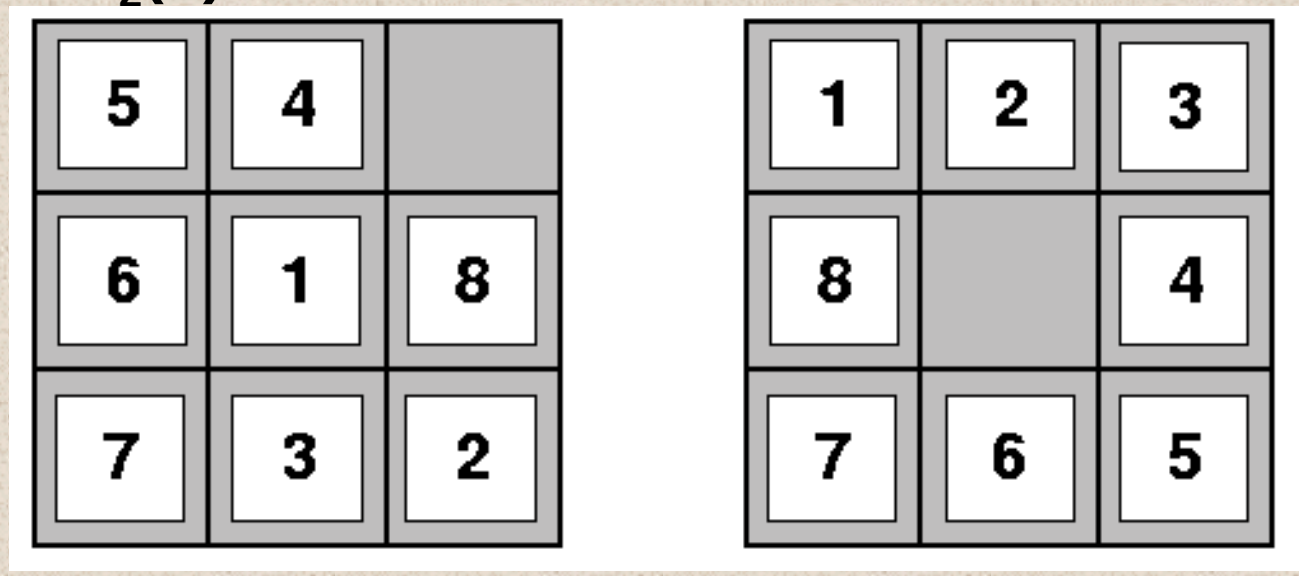
$$d_{12}^{X} = \max_{k}\left\{\left|\vec{v}_{1k} - \vec{v}_{2k}\right|\right\}$$





Heurísticas Admissíveis

- Por exemplo, para o 8-puzzle
  - $h_1(n)$ = número de quadrados em locais errados
  - $h_2(n)$ = distância Manhattan total



estado inicial

estado final

- $h_1(s) = 7$ $h_2(s) = 2+3+3+2+4+2+0+2 = 18$

Dominância

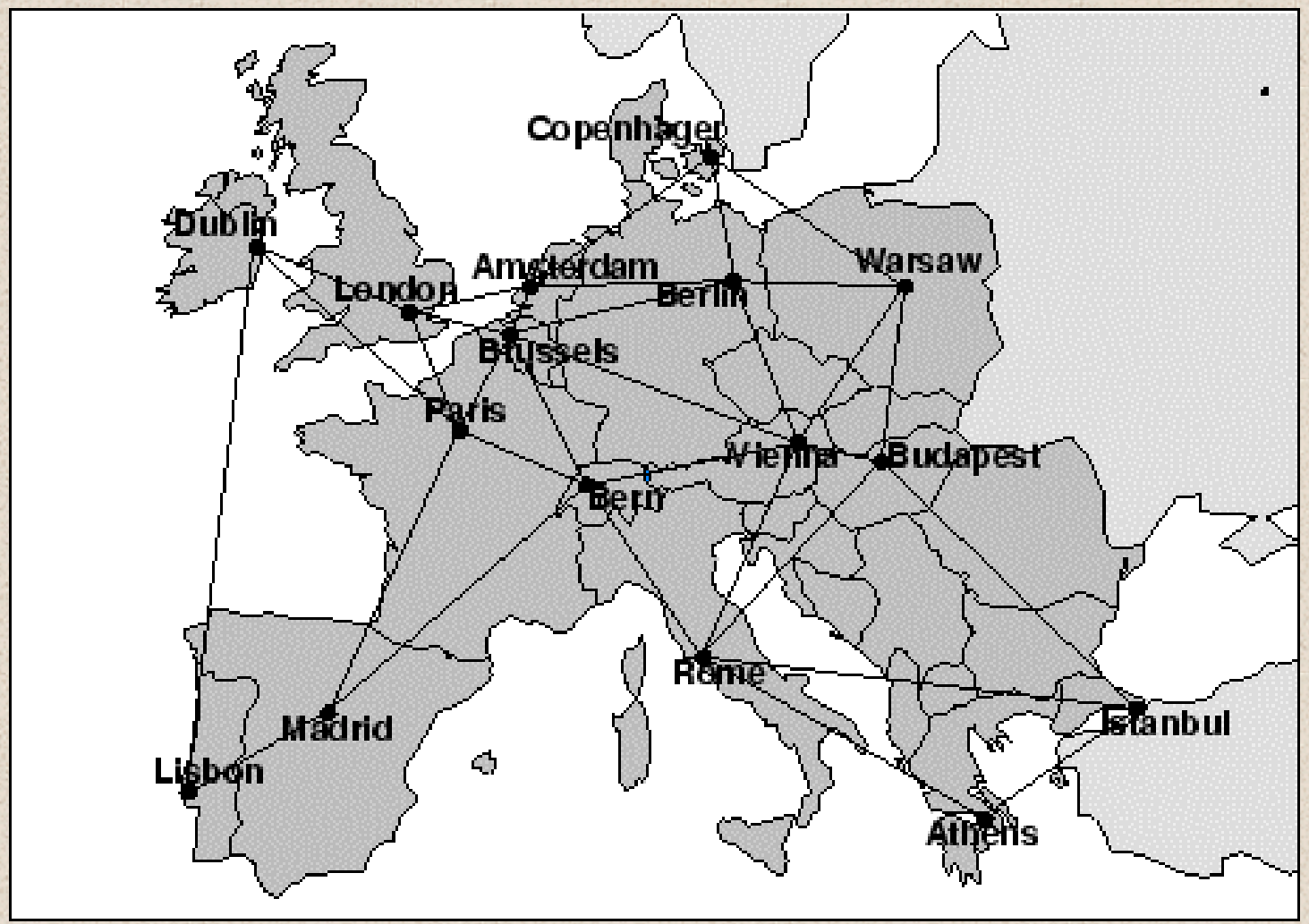
- Se $h_2(n) \geq h_1(n)$ para todo n (ambas admissíveis) então h_2 **domina** h_1 e é melhor para a busca

- Custos típicos:
  - d = 14
    - Aprofundamento Iterativo = 3.473.941 nodos
    - $A^*(h_1)$ = 539 nodos
    - $A^*(h_2)$ = 113 nodos
  - d = 24
    - Aprofundamento Iterativo = muitos nodos
    - $A^*(h_1)$ = 39.135 nodos
    - $A^*(h_2)$ = 1.641 nodos

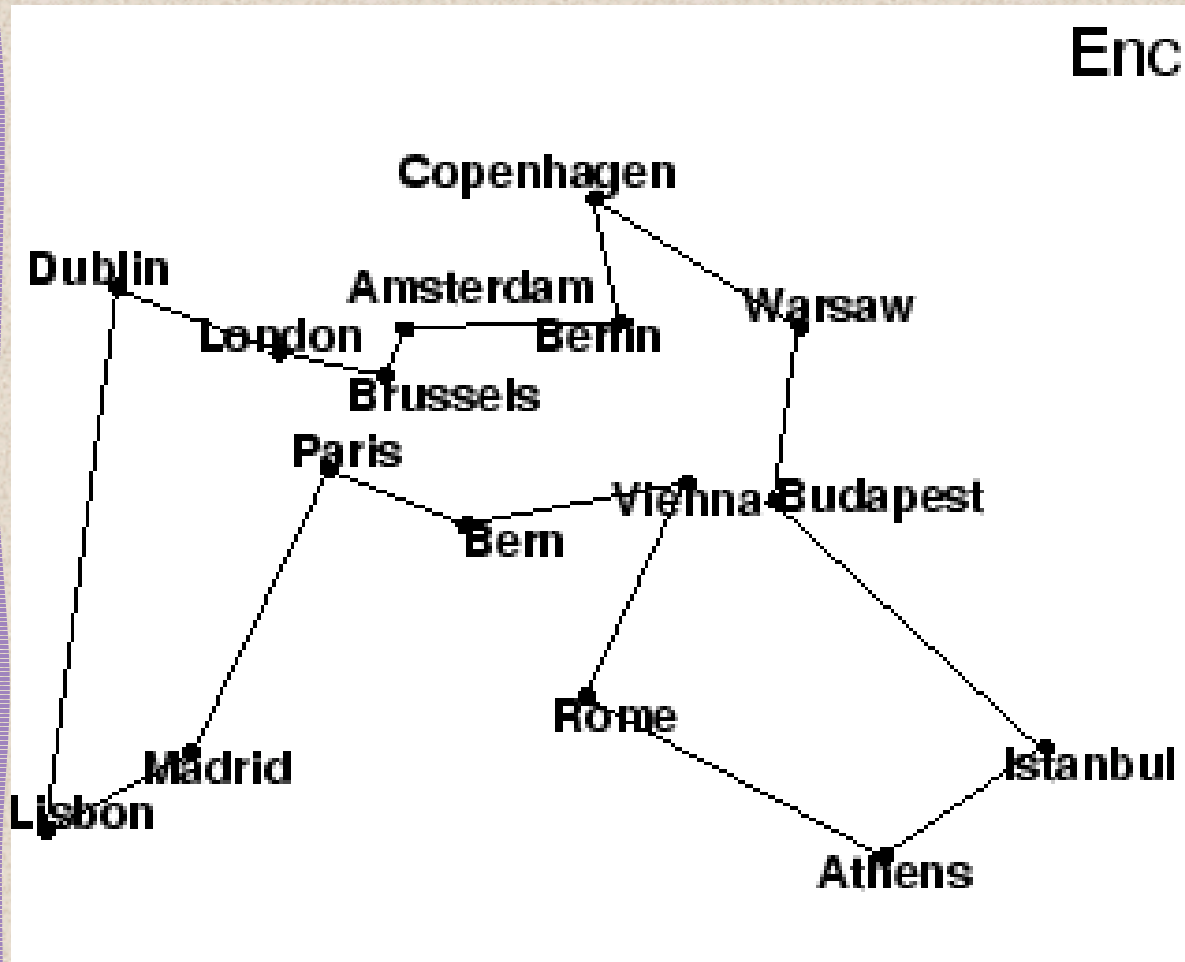
Problemas Relaxados

- Muitas vezes, uma boa heurística para um problema relaxado pode ser uma boa heurística para um problema relaxado
- Heurísticas admissíveis podem ser derivadas do custo de uma solução exata a partir de uma versão relaxada do problema.
- Se as regras do 8-puzzle forem relaxadas para que um quadrado possa se mover para qualquer lugar, então $h_1(n)$ dá a solução de caminho mais curto
- Se as regras forem relaxadas para que um quadrado possa mover-se para qualquer quadrado adjacente, então $h_2(n)$ dá a solução com caminho mais curto
- Para o problema do caixeiro viajante (TSP)
  - Permitir caminhar sobre qualquer estrutura que conecte todas as cidades $\rightarrow$ Minimum Spanning Tree

TSP relaxado



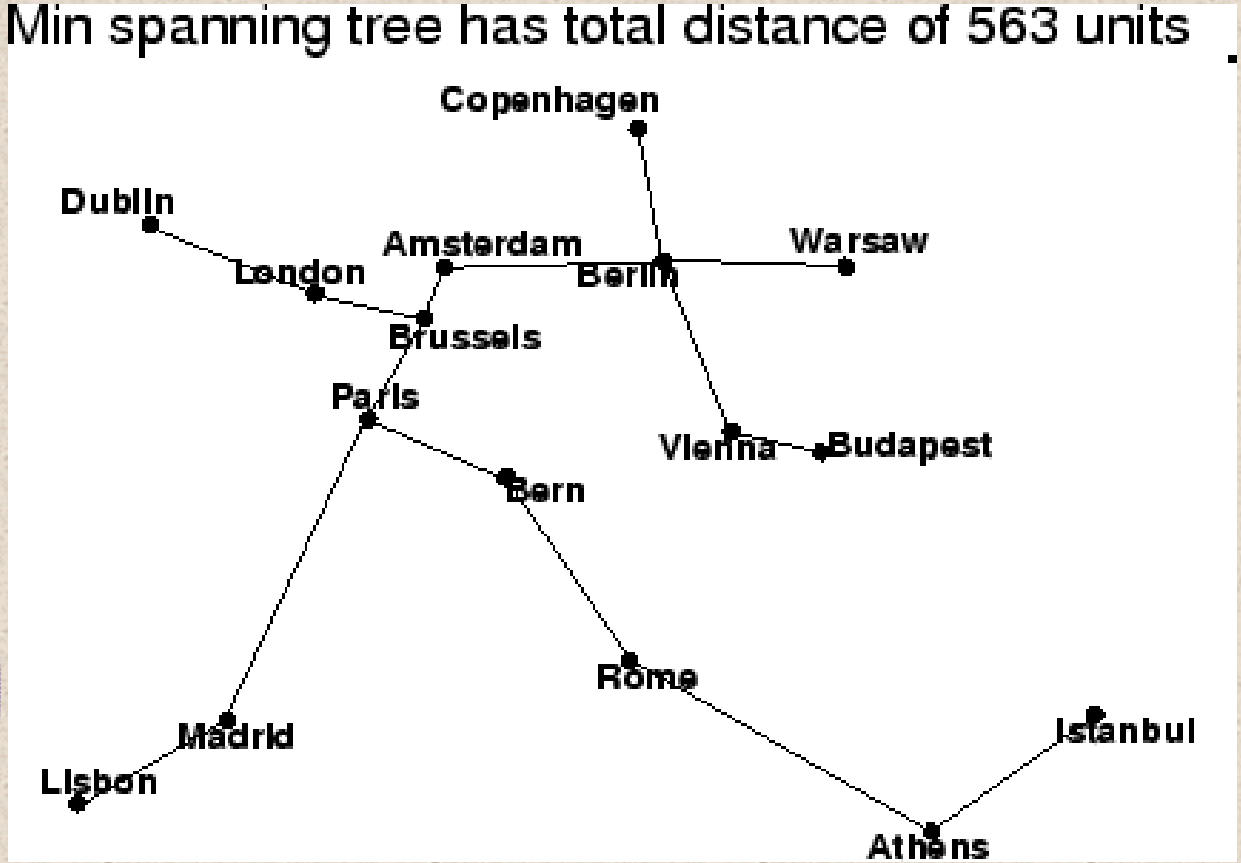
TSP (solução)



Encoding :

Dublin
London
Brussels
Amsterdam
Berlin
Copenhagen
Warsaw
Budapest
Istanbul
Athens
Rome
Vienna
Bern
Paris
Madrid
Lisbon

TSP relaxado

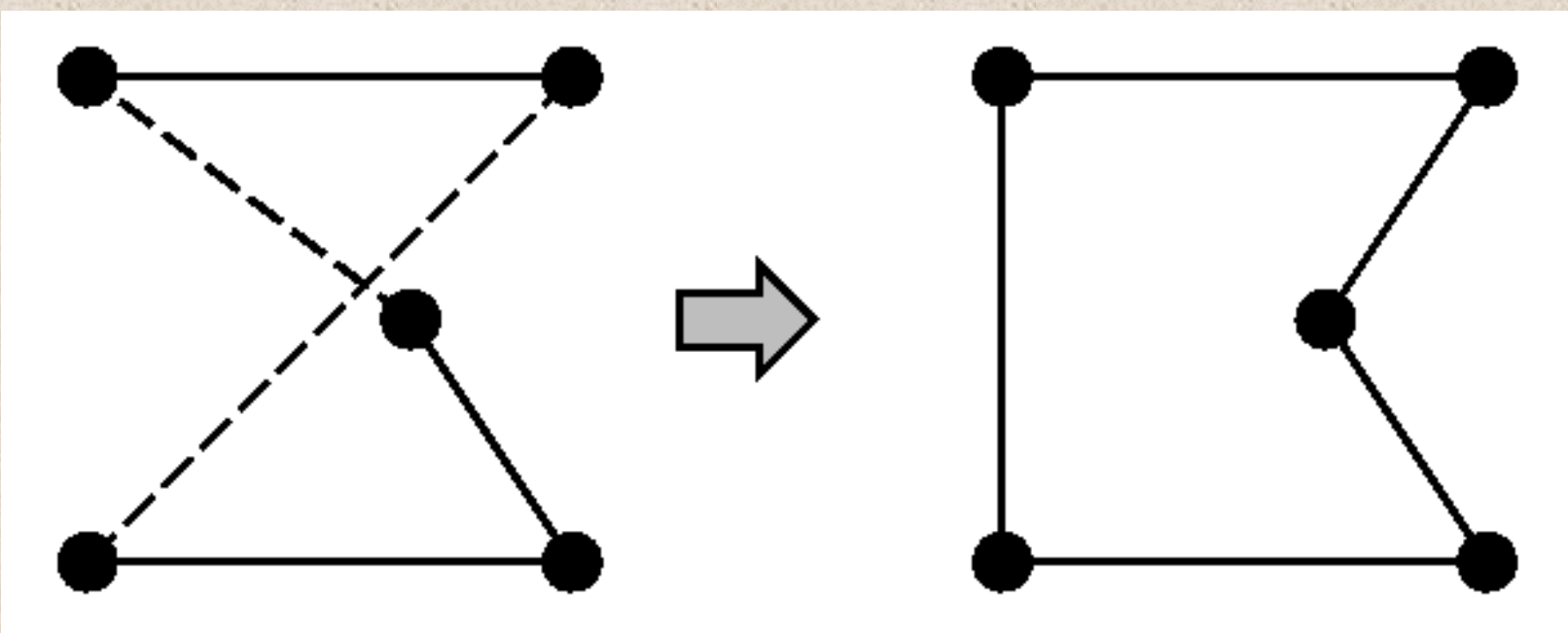


Algoritmos de Melhoramento Iterativo

- Em muitos problemas de otimização, o caminho é irrelevante; o estado objetivo é a solução
- Então, o espaço estado é o conjunto completo de todas as configurações
  - Encontrar configuração ótima, por exemplo, TSP
  - Ou encontrar configurações satisfazendo restrições, por exemplo, n-rainhas
- Em tais casos, podem ser usados algoritmos de melhoramento iterativo.
  - Manter um único estado atual e tentar melhorá-lo
  - Espaço constante. Adequado para buscas on-line e off-line

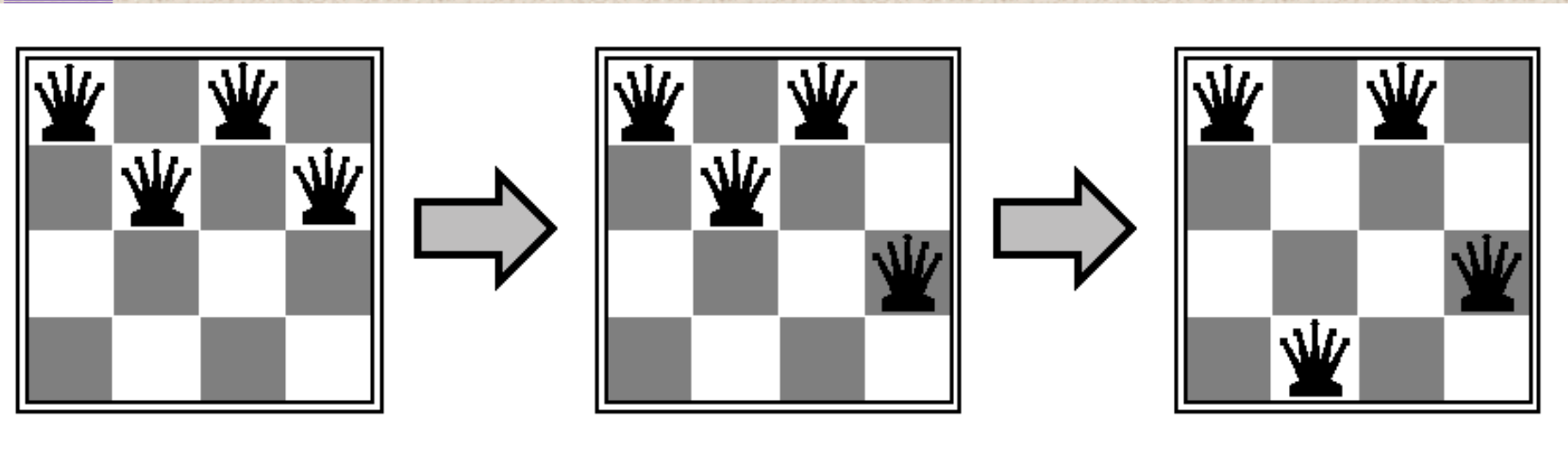
Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

- Encontre o caminho mais curto que visite todas as cidades pelo menos uma vez



Exemplo: Problema das n-Rainhas

- Por n Rainhas em um tabuleiro n x n sem que duas rainhas ocupem a mesma linha, nem a mesma coluna e nem a mesma diagonal



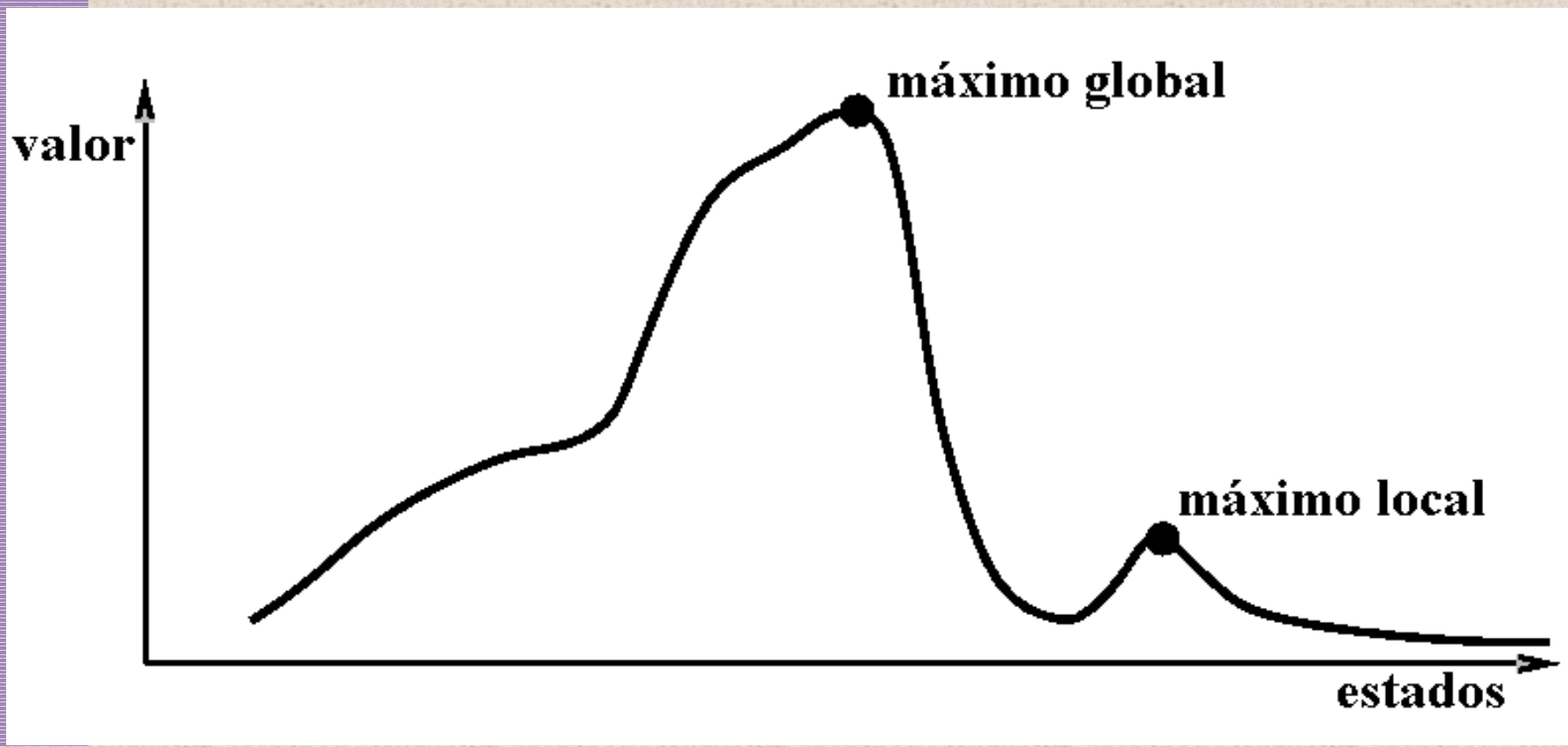
Hill-climbing ou Descida/Subida de Gradiente

- **É como escalar o Everest sob densa neblina e sofrendo de amnésia**

function HILL_CLIMBING(*problema*) **returns** um estado solução
inputs: *problema*, um problema
local variables: *atual*, um nodo
próximo, um nodo
atual ←FAZ_NODO(ESTADO_INICIAL[*problema*])
loop
nodo ← Sucessor de Maior Valor a partir de (*atual*)
if VALOR[*próximo*] < VALOR[*atual*]
then return *atual*
atual ← *próximo*
end

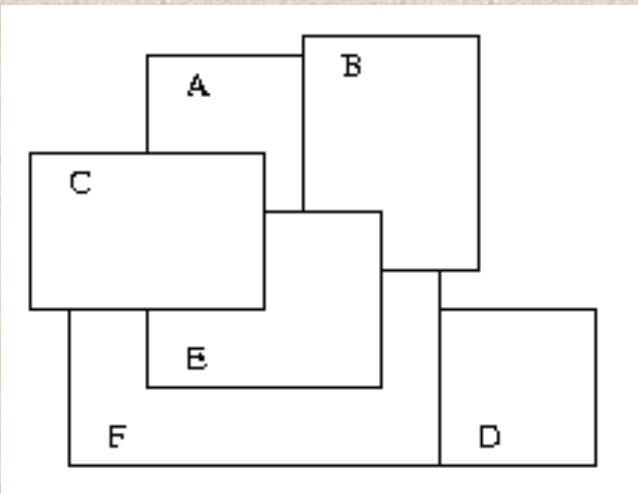
Hill-climbing - problema

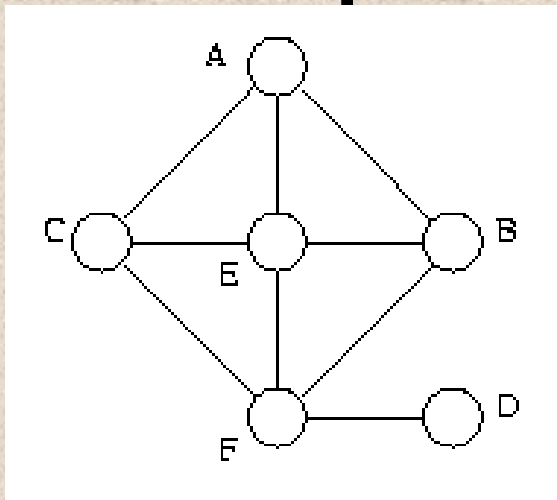
- Dependendo do estado inicial, pode ficar preso em um máximo local



Hill-Climbing (Busca Local)

- O problema de colorir um mapa





Simulated Annealing

- **IDÉIA:**
  - **fugir do máximo local permitindo alguns movimentos “ruins”, mas gradualmente decrescendo seu tamanho e freqüência**

function SIMULATED_ANNEALING(*problema, escala*) **returns** um estado solução

inputs: *problema*, um problema
escala, um mapeamento do tempo pela temperatura

local variables: *atual*, um nodo
próximo, um nodo
T, uma temperatura controlando a probabilidade de dar passos pra baixo

atual ←FAZ_NODO(ESTADO_INICIAL[*problema*])

for *tempo* ←1 **to** ∞

T ← *escala*[*tempo*]

if *T* = 0 **then return** *atual*

próximo ← um sucessor aleatoriamente selecionado de (*atual*)

ΔE ← VALOR[*próximo*] – VALOR[*atual*]

if ΔE > 0 **then** *atual* ← *próximo*

else *atual* ← *próximo* somente com uma probabilidade $e^{\Delta E/T}$

end

Propriedades do Simulated Annealing

- Na “temperatura” fixa T, a probabilidade de ocupação do estado é dado pela distribuição de Boltzman

$$p(x) = \alpha e^{\frac{E(x)}{kT}}$$

- T decrescendo suficientemente lento $\Rightarrow$ sempre alcança o melhor estado
- Esta é, necessariamente, uma garantia interessante?
- Concebido por Metropolis et al, 1953 para modelagem de processos físicos
- Amplamente utilizado para layout de VLSI, planejamento de linhas aéreas