Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Departamento de Informática e Estatística

ESTATÍSTICA BÁSICA PARA AS CIÊNCIAS AGRONÔMICAS E BIOLÓGICAS

Com Noções de Experimentação

Prof. Paulo José Ogliari, Dr.
Prof. Dalton Francisco de Andrade, PhD.

FLORIANÓPOLIS
Santa Catarina - Brasil
Abril - 2005

Sumário

1 Introdução Geral

1.1 A Ciência Estatística na Pesquisa Agronômica e Biológica

A estatística é uma ciência que se preocupa com o planejamento de uma pesquisa, envolvendo desde a forma de coleta das observações, obtidas em *experimentos* ou *levantamentos,* até a maneira como será feita a organização, a descrição, o resumo dos dados, e a avaliação e afirmação sobre características de interesse do pesquisador.

As análises estatísticas dependem da forma de como os dados sâo coletados, e o planejamento estatístico da pesquisa indica o esquema sob o qual os dados serão obtidos. Portanto, o planejamento da pesquisa e a análise estatística dos dados obtidos estão intimamente ligados.

Planejamento da pesquisa ⇒ Análise estatística

Dessa forma, o pesquisador deve possuir um razoável conhecimento de estatística para desenvolver suas pesquisas, ou, então, consultar um estatístico para auxiliá-lo. É importante frisar que esta consulta deve ser feita antes do início da pesquisa, ainda durante a fase de elaboração do projeto.

1.1.1 Forma de coleta dos dados

Em alguns casos, como por exemplo, na descrição de novas espécies florestais, os dados são obtidos através da simples observação de como o fenômeno acontece na natureza. Neste caso, não são feitas alterações no fenômeno em estudo. Outro exemplo, é o estudo sobre os efeitos da poluição ambiental de uma região sobre animais roedores de determinada espécie. Neste caso, um certo número de animais (amostra), capturados na região estudada, será analisado contando o número de micronúcleos existentes a cada cinco mil células (característica estudada).

Levantamento: observa-se o fenômeno na natureza

Por outro lado, em muitas outras situações, as observações precisam ser geradas e são feitas comumente sob condições controladas pelo pesquisador, e os fatos, eventos ou fenômenos

a serem estudados são forçados a sofrer variações sistemáticas, mediante a aplicação de "*tratamentos*". Na experimentação, entende-se por tratamento, as variações de um fator a ser estudado. Um exemplo disto, seria analisar a produção de milho mediante a aplicação de diferentes doses de nitrogênio. As diferentes doses de nitrogênio constituiriam os tratamentos. Os outros fatores, como por exemplo, diferenças na fertilidade e umidade do solo, existência de pragas e ervas daninhas, que poderão influir nos resultados obtidos (produção final de milho), são minimizados, tanto quanto possível, do ponto de vista prático. Neste caso temos então um experimento. A função do experimento é determinar as relações de causa e efeito, como por exemplo, verificar como as doses de nitrogênio (causa) influenciam na produção de milho (efeito).

Experimento: causa $\Rightarrow$ efeito

1.1.2 Erro Experimental ou Resíduo

Quando instala-se um experimento, desejamose verificar o efeito de diferentes tratamentos, sendo que, os demais efeitos, que não os de tratamentos, devem ser controlados ao máximo do ponto de vista prático. Portanto, as pulverizações com produtos químicos, as capinas, as mensurações, etc. devem ser feitas de modo o mais homogêneo possível em todo o experimento. Da mesma forma, a disponibilidade de água, a temperatura, a umidade e as sementes utilizadas, devem ser as mais similares possíveis. Acontece que, na prática, por maiores que sejam os esforços dos pesquisadores para homogeneizar todos esses efeitos, isto não é possível, sempre levando à ocorrência de variações casuais ou aleatórias. Isto pode ser verificado quando, ao repetir o experimento, sob condições as mais próximas possíveis do experimento anterior, obtemos resultados diferentes. Essas variações são chamadas de *erro experimental* ou simplesmente *erro*. É bom chamar a atenção que apesar do termo erro, isto não significa que o experimento foi mal feito. Muitos preferem o termo *resíduo* para caracterizar essas variações aleatórias. Vale a pena ressaltar que essas variações também ocorrem para dados obtidos através de levantamentos.

Finney (1952) diz que o propósito da ciência estatística é fornecer uma base objetiva para a análise de problemas nos quais os dados estão sujeitos a variação do acaso. Por maiores que sejam os conhecimentos de um pesquisador sobre, por exemplo, nutrição e fisiologia animal, ele jamais será capaz de predizer com exatidão qual vai ser o peso de um suíno criado sob determinadas condições. Existe um grande número de causas que fazem este resultado

variar, como, por exemplo, variações genéticas, de temperatura ambiental, umidade, doenças, etc. Assim, quando o elemento *acaso* está presente em um problema, dificuldades reais são introduzidas. Observe que estamos interessados em estudar os fenômenos ditos *aleatórios*, isto é, aqueles em que o elemento do acaso está presente.

É importante ressaltar que quase tudo que fazemos no nosso cotidiano são fenômenos aleatórios e, portanto, apresentam uma chance de ocorrência devido ao acaso. Assim sendo, seria desejável determinar qual é a sua probabilidade de ocorrência. Para tal finalidade precisamos estabelecer o modelo probabilístico adequado.

Fenômeno aleatório $\Rightarrow$ Modelo probabilístico

A seguir, vamos apresentar duas partes importantes da estatística, quais sejam: *análise exploratória de dados* e *inferência estatística*.

1.1.3 Análise Exploratória de Dados

Todo o trabalho de análise estatística inicia com a análise exploratória de dados. Em muitos casos, com uma boa análise exploratória de dados, atende-se aos objetivos da pesquisa (principalmente em alguns estudos realizados através de levantamentos), enquanto em outros, ela serve como uma primeira aproximação da análise final.

O conceito de estatística, como poderá ser visto ainda neste capítulo, é bastante amplo e engloba a noção usual que as pessoas têm do que seja estatística. Esse conceito usual logo relaciona a estatística com tabelas, gráficos, taxas, índices, nos quais os dados obtidos são representados. Assim, ouvimos falar da produtividade média do milho no Estado de Santa Catarina, índice pluviométrico mensal, anual, índice da inflação, taxa de desemprego, estatísticas da saúde pública, estatísticas da loteria, do aumento da produção de maçã em Santa Catarina, etc. Essa parte, utilizado para descrever fatos, é, de forma bastante apropriada, apresentado nos livros como análise exploratória de dados. Ela se preocupa com a organização, apresentação, simplificação e descrição (e não explicação) dos dados. Este enfoque de análise exploratória de dados foi introduzido por Tukey (1971), no seu livro: *Exploratory Data Analysis*. A análise exploratória de dados utiliza-se muito de técnicas visuais e procura vislumbrar alguma regularidade quase sempre presente num conjunto de dados, podendo sugerir modelos que possam ser utilizados na inferência estatística.

Exemplo. Foi feito um experimento para estudar a duração, em dias, do quinto estádio ninfal de *Triatoma klugi* com alimentação em galo. Os resultados são apresentados na tabela

Tabela 1.1: Valores da duração em dias do quinto estádio ninfal de *Triatoma klugi* com alimentação em galo, MIP, UFSC, Florianópolis, SC, 2001.

26	37	39	40	41	42	42
43	44	45	45	45	45	45
47	48	48	48	48	48	49
49	49	51	51	51	52	53
53	53	56	57	60	62	62

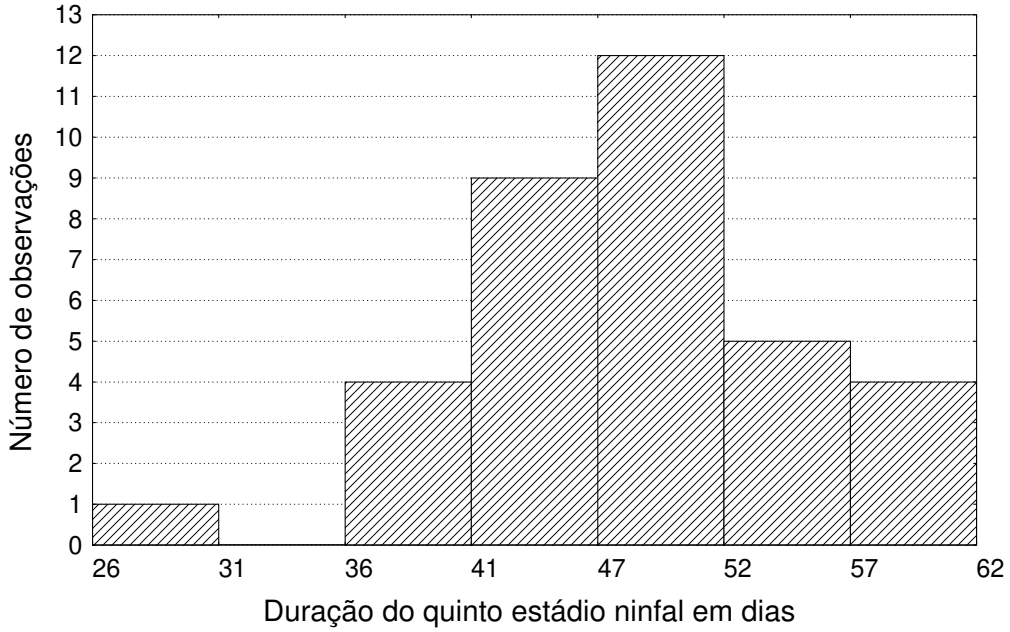


Figura 1.1: Histograma da duração, em dias, do quinto estádio ninfal de *Triatoma klugi*

1.1. Esses resultados foram representados através de um histograma dado na figura 1.1. Duas interpretações são: 1) um valor para representar os dados é igual a 48 dias; 2) observa-se no histograma uma cauda mais longa em direção aos valores menores, assim, diz-se que a distribuição é levemente assimétrica à esquerda, ou seja, existe uma concentração maior de valores em torno e acima do valor representativo. A análise exploratória de dados será estudada na seção 2.

1.1.4 Inferência Estatística

Há ainda todo um campo bastante amplo da ciência estatística que se refere à análise e à interpretação do conjunto total de dados, observando-se somente uma parte deles. Essa

parte, é conhecida como Estatística Indutiva ou Inferencial e normalmente escapa a noção corrente da grande maioria das pessoas.

Para deixar mais clara a finalidade da estatística inferencial, é necessário fazer a apresentação de dois conceitos fundamentais, que são: *População* e *Amostra*.

Uma população consiste de todos os valores possíveis de uma característica desejável. Os valores que compõem uma população, podem ser diferentes entre si, e a mesma pode apresentar um tamanho infinito ou finito porém desconhecido. Na experimentação a definição de população é conceitual. São exemplos de populações: todos os valores possíveis da produção de milho em kg/ha de uma cultivar; todos os pesos ao nascer de coelhos da raça gigante; todos os valores de diâmetro altura do peito de uma espécie do manguezal do Itacorubi; todos os valores de micronúcleos por cinco mil células examinadas de roedores de uma determinada região.

População: todos os valores possíveis de uma variável em estudo, observadas em unidades experimentais com uma ou várias características em comum.

Amostra é uma parte (subconjunto) da população. Exemplos: os pesos ao nascer de coelhos de uma ninhada pode ser uma amostra de uma população infinita; uma amostra será formada por 100 pesos de pacotes de café selecionados; 50 valores de micronúcleos por cinco mil células examinadas de peixes do gênero bagre selecionados; cinco valores de produção de milho da dose 1 de nitrogênio, cada um tomado num canteiro de $5 \times 2\ m^2$, etc.

Amostra: um suconjunto da população

É intuitivo que, quanto maior a amostra, mais precisas e confiáveis deverão ser as inferências realizadas sobre a população. Levando esse raciocínio ao extremo, concluiremos que os resultados mais exatos seriam obtidos pelo exame completo de toda a população, ao qual se costuma denominar de Censo ou Recenseamento. Porém, a utilização de amostras pode ser feita de tal maneira que se obtenham resultados confiáveis, em termos práticos, de forma equivalente ou até mesmo superiores aos que seriam conseguidos através do censo. Na experimentação biológica e agronômica, geralmente não temos acesso a toda a população, portanto, somos obrigados a trabalhar com amostras, por exemplo, não podemos conhecer todos os valores possíveis de produção de milho em kg/ha de uma cultivar; não podemos determinar todos os comprimentos de baleias de uma área de proteção. O fato é que não é

necessário examinar toda a população para se chegar às conclusões desejadas. Desde que o tamanho da amostra seja convenientemente determinado, e que a mesma seja representativa da população, ou seja, possua as mesmas características básicas da população no que diz respeito as variáveis que deseja-se pesquisar, inferencias suficientemente precisas e confiáveis podem ser realizadas.

Como exemplo, podemos citar o experimento que tem como objetivo verificar o comportamento da produção de milho sob o efeito de diferentes doses de nitrogênio. As doses foram definidas pelo pesquisador. Nesse caso, geralmente, a cultivar de milho escolhida para participar do experimento é a cultivar mais plantada na região. Os resultados são apresentados na tabela 1.2. Para cada dose de nitrogênio são plantados 5 canteiros de terra de $20m^2$ cada, portanto, o tamanho da amostra para cada dose de nitrogênio é 5,ou seja, foram feitas 5 repetições dos tratamentos. Para cada amostra existe uma correspondente população; cada população é formada por todos os valores possíveis de produção em kg/ha para a dose correspondente. Após realizada a análise estatística e a interpretação dos resultados a partir de um modelo que relacione a produção com as doses de nitrogênio, será indicada qual(is) a(s) melhor(es) dose(s) de nitrogênio para a cultura do milho.

A estatística inferencial, dada a sua grande importância, apresenta um grande número de métodos de análise. Seriam necessários vários cursos de estatística para estudá-los. É bom deixar claro que para se executar uma análise estatística, por mais sofisticada que seja o método utilizado, deve-se, primeiramente, proceder à análise exploratória dos dados.

Como já foi comentado anteriormente, uma característica dos experimentos biológicos e agronômicos, é que os seus resultados tendem a variar de repetição para repetição, ou, de outra forma, toda vez que se repetir o experimento, sob condições bastante semelhantes, os seus resultados não são os mesmos. Esta variabilidade nos resultados do experimento deixa o pesquisador com dúvidas quanto ao(s) melhor(es) tratamento(s). Neste caso, os métodos estatísticos irão auxiliá-lo.

Para ilustrar esta variação vamos considerar os resultados da tabela 1.2 relativos às produções de milho, em kg/ha, de cinco tratamentos, incluindo o controle (dose 0). O objetivo do experimento é comparar os cinco tratamentos com relação à produção. Mais especificamente pode-se estabelecer dois objetivos para o experimento, quais sejam: 1^{o}) testar a hipótese de que não existem diferenças entre os tratamentos; 2^{o}) estimar a diferença de produção entre dois tratamentos.

Todos os experimentos são conduzidos com estes dois objetivos: testar hipóteses e estimar as diferenças dos efeitos de tratamentos.

Com respeito ao teste de hipótese de que não há diferença entre as médias da dose 3 e

Tabela 1.2: Produção de milho em kg/ha, submetidos à diferentes doses de nitrogênio, no Oeste Catarinense, 1993.

Tratamentos	Repetições					Total	Média
	I	II	III	IV	V		
Dose 1	3200	1980	2220	2850	2100	12350	2470
Dose 2	4150	2330	3700	4050	2500	16730	3346
Dose 3	4380	2830	3420	3900	3080	17610	3522
Dose 4	4000	2630	3150	3780	2670	16230	3246
Controle	2850	1780	2100	2900	2010	11640	2328

o controle, por exemplo, observa-se uma diferença entre as duas médias de 3522-2328=1194 kg/ha, que é uma diferença bem considerável para a cultura do milho. Verificando-se os dados, observa-se que a produção da dose 3, na repetição II, foi inferior à produção do controle nas repetições I e IV. Isto indica que tem-se que levar em consideração à variabilidade dos dados ao se executar um teste de hipótese. Mais especificamente, vamos considerar a variabilidade da estatística de interesse, neste exemplo, a média amostral. Devido a esta variabilidade, os dados nunca concordam exatamente com a hipótese, e o problema é decidir se a diferença verificada é devida ao efeito do tratamento ou se é devida a variabilidade do acaso. Isto é conhecido como teste de significância. Essencialmente, um teste de significância é uma regra de decisão, com base nos resultados de um experimento, se deve-se rejeitar ou não rejeitar a hipótese. Esta técnica capacita o pesquisador a testar as suas hipóteses sobre a ação dos tratamentos, com a garantia de que a probabilidade de rejeitar a hipótese quando ela é verdadeira é pequena.

Com respeito a estimação da diferença de produção entre a dose 3 e o controle, descritivamente podemos dizer que para este experimento foi de 1194 kg/ha em favor da dose 3. Mas esta é uma medida que tem pouca importância, pois se o experimento fosse repetido para obter outras cinco repetições, essa diferença poderia se modificar. É mais importante pensar do seguinte modo. Suponha que seja praticável repetir o experimento continuamente, isto é, aumentar o número de repetições indefinidamente. A diferença média das produções entre as duas doses provavelmente irá estabilizar num determinado valor. Este valor pode ser considerado como sendo a diferença verdadeira entre as duas doses. Então o problema de resumir os dados pode ser colocado desta outra forma: o que pode-se dizer sobre a diferença verdadeira entre a dose 3 e o controle? Esses são problemas de inferência que serão tratados neste curso nas seções 6, 7 e 8.

1.1.5 Teoria da Probabilidade e seus Modelos

Vimos que o objetivo da estatística indutiva ou inferencial é tirar conclusões sobre populações com base nos resultados observados em amostras extraídas dessas populações. Como vamos trabalhar com uma amostra, o processo indutivo não pode ser exato. Ao se fazer inferências sobre a população, portanto, estamos sempre sujeitos a cometer erros, isto é, o pesquisador não pode fazer afirmativas com 100% de certeza. Isto, porém, não deve desesperançar o pesquisador, pois a estatística indutiva irá dizer até que ponto pode-se estar errando, isto é, qual é a probabilidade de erro. Por exemplo, pode-se afirmar com 95% de confiança que a diferença média de produção, em kg/ha de milho, entre a dose 3 e o controle, da cultivar A está entre 694 e 1589 kg/ha. Então é possível determinar limites dentro dos quais a verdadeira diferença deve encontrar-se, com um certo grau de certeza, dada por uma probabilidade, fixada pelo pesquisador. Esses intervalos são conhecidos em estatística como intervalos de confiança. A espinha dorsal da inferência estatística é a teoria da probabilidade, com seus modelos probabilísticos, a qual deve necessariamente fazer parte de um curso de estatística.

O que é um modelo no sentido geral da palavra? Modelo é uma versão simplificada de algum evento, fenômeno, acontecimento da vida real. Exemplos: um globo é uma versão simplificada do planeta terra; uma maquete de um prédio, um layout (distribuição interna), etc.

Um dos propósitos da ciência é descrever e fazer previsões de eventos do mundo real, do mundo no qual nós vivemos. Uma maneira pela qual isto é feito, é construindo-se modelos matemáticos (que são expressões matemáticas) que adequadamente descrevem os fenômenos do mundo real. Exemplo: desejamos fazer um estudo sobre a distribuição de uma espécie vegetal num habitat. Vamos supor que a distribuição dessa espécie no habitat é aleatória, casual, sendo assim, essa distribuição se ajustará ao que é conhecido como modelo de Poisson. Outro exemplo: suponhamos que 10 vacas de mesma idade e raça são tratadas com uma determinada ração A para aumentar a produção de leite (total da lactação). Admitimos que a probabilidade de aumento de produção na lactação é de $\pi = 0,65$. Então podemos estar interessados em saber qual é a probabilidade de exatamente 8 vacas aumentarem a produção na lactação. Nesse caso o modelo a ser usado é o binomial. Estes modelos serão estudados na seção 4.

Na construção de um modelo deve-se simplificar as coisas e certos pormenores devem ser desprezados, é claro que estes pormenores não devem ter importância para o entendimento do fenômeno em estudo. A resolução do problema matemático pode estar correta e, mesmo

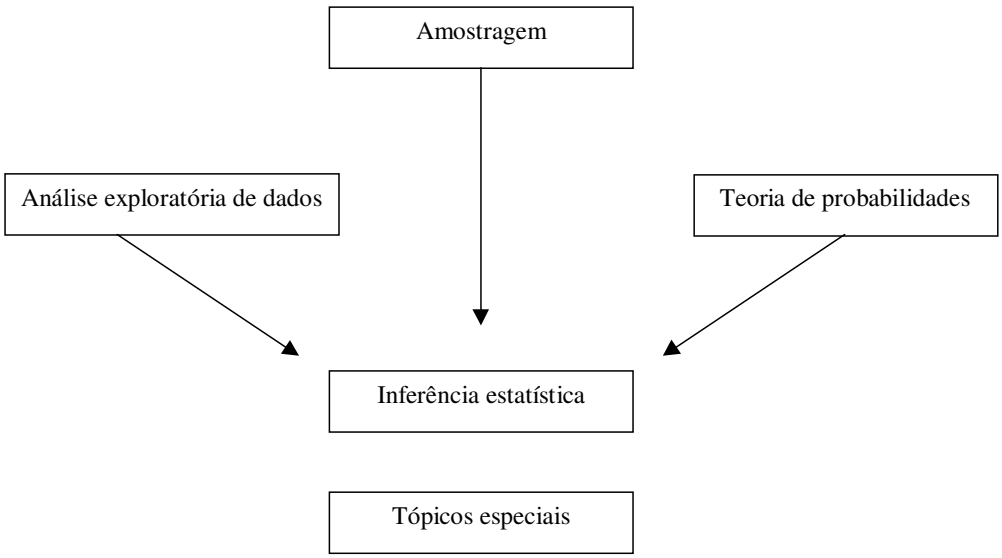


Figura 1.2: Esquema geral de um curso de estatística básica

assim, estar em grande discordância com os dados observados, simplesmente por que as hipóteses básicas feitas não são confirmadas. Por isso, é muito importante deduzir certas conseqüências do modelo e, a seguir, comparar esses resultados previstos pelo modelo com dados reais (observados). É a validação do modelo.

Para se desenvolver um curso básico completo de estatística, deve-se abordar os pontos ilustrados na figura 1.2. A ordem de apresentação dos pontos seria: 1) análise exploratória dos dados; 2) probabilidades; 3) obtenção das amostras através de levantamentos ou experimentos; 4) inferência estatística e 5) outros tópicos.

Como tópicos especiais em um curso pode-se citar: planejamento e análise de experimentos, análise de regressão e correlação.

1.2 A Estatística e o Método Científico

Nesta seção pretende-se mostrar como a estatística pode ajudar o pesquisador a resolver os problemas por ele identificados e colocados como sendo realmente importantes. Esta exposição será feita através de dois exemplos que foram desenvolvidos por um órgão de pesquisa do governo do Estado de Santa Catarina (EPAGRI S.A.) e pelo Centro de Ciências Biológicas da Universidade Federal de Santa Catarina (CCB/UFSC), respectivamente.

Quando se faz uma pesquisa científica o procedimento geral é formular hipóteses e testá-las. Inicialmente essas hipóteses são formuladas em termos científicos, dentro da área de es-

tudo (hipótese científica)[1], e em seguida devem ser expressas em termos estatísticos (hipótese estatística). É claro que deve haver uma correspondência perfeita entre estas duas hipóteses. Por exemplo, no caso do experimento de aplicação de diferentes doses de nitrogênio podemos formular a seguinte hipótese científica: é possível aumentar a produção de milho (kg/ha) através da aplicação de nitrogênio. E a seguinte hipótese estatística: existe diferenças entre as médias verdadeiras de produção de milho quando submetido a diferentes doses de nitrogênio. Para testar uma hipótese estatística, é preciso um conjunto de observações, isto é, é preciso coletar dados, valores a respeito do fato que estamos estudando, por exemplo, nós precisamos de dados sobre a produção de milho para as diferentes doses de nitrogênio, para que possamos testar a hipótese acima formulada. Como estamos tratando de experimentação, vamos obter nossas observações, nossos dados, através de um experimento, ou seja, as observações serão feitas sob condições controladas, os fatos ou fenômenos a serem estudados são planejados a sofrer variações sistemáticas, mediante a aplicação de tratamentos. Por exemplo, a produção de milho sofre variações devido a aplicação de diferentes doses de nitrogênio. Os efeitos dos outros fatores, que não as doses de nitrogênio, são minimizados tanto quanto possível, por exemplo, o efeito de diferenças de fertilidade do solo, ataque de pragas e doenças, invasoras, sombreamento, etc. A hipótese acima formulada vai ser testada por meio de uma análise estatística. Esta, por sua vez, depende de como foi instalado o experimento, ou seja, de como as observações foram obtidas. Com isso podemos verificar a grande importância de um bom planejamento inicial do experimento, esta fase inclusive é chamada de planejamento estatístico do experimento. Planejamento de experimento e análise estatística são feitos em seqüência e estão intimamente ligados. Por delineamento estatístico de experimento, entendemos o processo de planejamento do experimento de tal forma que os dados obtidos possam ser analizados através de métodos estatísticos, resultando em conclusões válidas e objetivas (Montgomery, 2001). Podemos resumir isto que foi dito, por meio da representação gráfica da circularidade do método científico (Peres e Saldiva, 1982), apresentada na figura 1.3.

Para fixar melhor a idéia de pesquisa científica estatisticamente planejada, vamos através de dois projetos de pesquisa, seguir as principais etapas do método científico.

Projeto 1: Recuperação de Ervais Nativos Através da Decepa

1) Identificação do problema. Inicia-se uma pesquisa científica com a definição do prob-

[1]Hipótese científica: Dado um problema bem definido, identificado, vamos imaginar uma explicação para algum aspecto do problema que nos tenha despertado interesse. Essa é a hipótese, e deve ser coerente com as observações importantes já feitas, aliada aos conhecimentos teóricos que o pesquisador possue sobre o assunto.

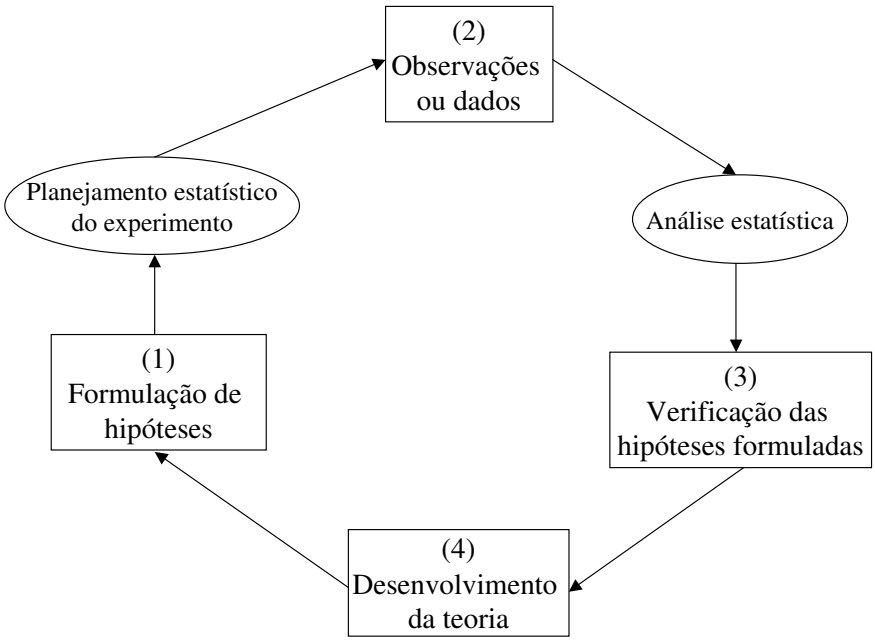


Figura 1.3: Circularidade do método científico

lema, juntamente com a formulação dos objetivos e hipóteses. No planejamento do experimento, é importante a participação de especialistas de diversas áreas, pois quanto maior o conhecimento adquirido, melhor o entendimento sobre o fenômeno em estudo e, isto, facilitará a solução final do problema.

Os ervais explorados para a produção de erva-mate são na grande maioria plantas nativas. Dada a grande demanda por erva-mate, as erveiras foram exploradas, isto é, extraída sua massa foliar, através de métodos inadequados; esta falta de manejo implicou na extinção de espécies e outras estão em vias de extinção, então, os ervais nativos ficaram em sua quase totalidade comprometidos. Buscando recuperar os ervais nativos, irá aplicar-se a técnica da decepa total das erveiras em diferentes níveis de altura.

2) Objetivo geral. Determinar o efeito da decepa em plantas adultas e danificadas de erveiras.

3) Objetivos específicos:

- Verificar a capacidade e comprimento de brotação;
- estudar a produção de massa verde;
- verificar a sobrevivência das erveiras decepadas.

4) Formulação da hipótese científica. É viável a recuperação de ervais nativos e improdutivos através da prática da decepa.

5) Escolha dos fatores que devem ser incluídos no estudo e seus correspondentes níveis (tratamentos). O pesquisador deve escolher os fatores a serem estudados, a faixa na qual esses fatores serão variados, e os níveis específicos utilizados no experimento. Neste projeto o fator, também conhecido como variável independente, é a decepa, e as alturas em que será realizada a mesma são os tratamentos (níveis do fator). Foram utilizadas quatro alturas de decepa (4 tratamentos), quais sejam: tratamento 1 - altura de decepa a 0,00 m do solo; tratamento 2 - altura de decepa a 0,30 m do solo; tratamento 3 - altura de decepa a 0,60 m do solo; tratamento 4 - altura de decepa a 0,90 m do solo. Este é um *experimento com um fator*.

6) Escolha da unidade experimental. As unidades experimentais são as que recebem os tratamentos e devem ser as mais homogêneas possíveis, para que quando submetidas a tratamentos diferentes, seus efeitos sejam facilmente detectados. Portanto, elas devem ser orientadas no sentido de minimizar o erro experimental. As unidades experimentais pode ser um animal, um conjunto de animais, uma pessoa, cinco mil células, uma planta, um conjunto de plantas, um vaso, um frango, cinco áreas de 5 cm^2 em um frango, um tubo de ensaio, etc. Nesse experimento, a unidade experimental é formada por 8 plantas de erva-mate de diâmetros bem próximos. Então, o tratamento 1 será aplicado a 8 plantas de erva-mate, o tratamento 2 a outras 8 plantas, e assim por diante, até o quarto tratamento. Embora tenhamos 8 medidas da variável resposta em cada unidade experimental, esses resultados não são repetições *independentes*. Na realidade, só temos um resultado *independente* para cada tratamento, a média das oito árvores para cada variável resposta em estudo.

A heterogeneidade das unidades experimentais é que determina os diferentes planos experimentais.

7) Escolha das variáveis que serão medidas nas unidades experimentais. Denominam-se de variáveis as características que serão mensuradas, avaliadas pelos pesquisadores nas unidades experimentais. As variáveis são pré-estabelecidas pelo pesquisador e devem medir diretamente os tratamentos de acordo com os objetivos do trabalho. Algumas variáveis medidas nesse experimento foram: percentagem de brotação, número de brotos, comprimento dos brotos, produção de massa verde para a indústria e sobrevivência das erveiras decepadas. O importante é que os dados devem ser objetivos, precisos e verdadeiros, isto é o mínimo que se espera de alguém que irá publicar um trabalho de pesquisa.

8) Determinação das regras e procedimentos pelos quais os tratamentos são atribuídos às unidades experimentais: delineamentos experimentais. Trata-se de normas de designar

os tratamentos às unidades experimentais e que definem os delineamentos experimentais. A estatística é bastante rica em planos (delineamentos) experimentais. É nesse item que a estatística participa fortemente do planejamento da pesquisa, ou seja, a sua contribuição é bastante grande, de tal forma que pode-se chamar esta etapa de planejamento estatístico do experimento. Veja figura 1.3. É importante na fase de planejamento da pesquisa, escolher adequadamente o delineamento, pois, caso contrário, pode-se ter muita dificuldade na análise estatística e, até mesmo, invalidar os resultados do experimento.

Neste experimento, os tratamentos foram atribuídos às unidades experimentais da seguinte forma. Primeiramente foram formados cinco blocos, onde cada bloco é constituído de 4 unidades experimentais (pois temos 4 tratamentos); como cada unidade experimental tem 8 plantas, então, um bloco tem 32 plantas. Os blocos estão controlando as diferenças de diâmetros entre as plantas, assim, o bloco I é formado por 32 plantas com diâmetros entre 10 e 13 cm (exclusive); o bloco II é formado por 32 plantas com diâmetros entre 13 e 16 cm (exclusive); o bloco III é formado por 32 plantas com diâmetros entre 16 e 19 cm (exclusive); o bloco IV é formado por 32 plantas com diâmetros entre 19 e 22 cm (exclusive) e o bloco V é formado por 32 plantas com diâmetros superiores a 22 cm. Portanto, cada tratamento será repetido 5 vezes, uma em cada bloco. Dentro de cada bloco houve o sorteio (aleatorização) de qual unidade receberá o tratamento 1, qual receberá o tratamento 2, e assim por diante. Este delineamento experimental é denominado de blocos completos ao acaso.

9) Coleta dos dados. Aqui são feitas as medidas das variáveis estabelecidas pelo pesquisador. As variáveis, logicamente, devem avaliar diretamente os efeitos dos tratamentos de acordo com objetivos do experimento. Também podem ser coletadas variáveis complementares, que serão úteis para explicar o comportamento dos tratamentos.

10) Análise estatística dos resultados. O objetivo da análise estatística é verificar as hipóteses formuladas no início da pesquisa científica. Por exemplo, comparar as médias de produção de massa foliar obtidas com cada uma das alturas de decepa, ou, estabelecer uma relação funcional entre a produção de massa foliar e a altura de decepa das plantas.

Existem excelentes softwares estatísticos para realizar as análises. A análise de resíduos é uma importante técnica para verificar, por exemplo, se o modelo é adequado.

11) Relatório final (publicação). Apresentar tabelas e gráficos de forma a mostrar os efeitos esperados, comparar os resultados obtidos com os objetivos do experimento para verificar se as questões propostas foram respondidas. Apresentar medidas de precisão das estimativas. Se possível, fazer referências a outras pesquisas similares e uma avaliação de todas as etapas com sugestões para possíveis alterações em pesquisas futuras.

A experimentação é uma importante fase do processo de aprendizagem, onde nós formu-

lamos hipóteses, realizamos o experimento para pesquisar sobre essas hipóteses e, de acordo com os resultados, formulamos novas hipóteses, e assim sucessivamente. Isto sugere que a experimentação é iterativa.

Projeto 2 - Análise de Alguns Aspectos da Dinâmica de Populações de Duas Amostras de *Biomphalaria tenagophila* Submetidas a Diferentes Concentrações de Matéria Orgânica no Meio.

1) *Identificação do problema.* A importância do genêro Biomphalaria no contexto da saúde pública brasileira deve-se ao fato de que dentre as 19 espécies que constituem este genêro, dez delas são encontradas no Brasil, sendo que três são hospedeiras intermediárias do *Schistosoma mansoni*, causador da esquistossomose mansoni, um dos mais importantes problemas de saúde pública em muitos países tropicais e subtropicais. Sua ocorrência é acentuada entre populações carentes de alguns países subdesenvolvidos. Segundo a Organização Mundial da Saúde, são estimados 200 milhões de pessoas como tendo sido contaminadas pelo *S. mansoni*, enquanto, outros 500 a 600 milhões correm o risco de contraí-la. As três espécies hospedeiras são: *B. straminea*; *B. glabrata* e *B. tenagophila*.

No Brasil, estima-se em 5,5 milhões de pessoas infectadas, isto parece ser uma subestimativa, pois o Instituto de Medicina Tropical (IMT), da Faculdade de Medicina da USP, estimou em 10 milhões o número de pessoas infectadas.

Em Santa Catarina, o primeiro foco de transmissão ocorreu em São Francisco do Sul, através da *B. tenagophila*. Hoje, tem-se registro de *B. tenagophila* em 26 municípios do nordeste do Estado.

Na Ilha de Santa Catarina, pesquisadores obtiveram registros de *B. tenagophila*, *B. oligoza* e *Drepanotrema sp*, em 8 pontos estratégicos.

Em consequência da alta endemicidade da esquistossomose no país, a distribuição dos planorbídeos vem sofrendo constantes investigações, sendo que especial atenção tem sido dada, ainda, ao controle da expansão das espécies vetoras, apesar que a área ocupada por cada uma das espécies vetoras do *S. mansoni*, está aumentando.

O genêro Biomphalaria apresenta uma grande tolerância a diferentes condições ecológicas, isto permitiu sua ampla distribuição geográfica. Muitos autores analisaram o comportamento reprodutivo e crescimento em função de uma série de variáveis, sendo que os efeitos de temperatura, tipo ou ausência de alimentação, influência do fotoperiodismo e densidade populacional são alguns que receberam maior atenção.

As condições do meio exigidas pelas biomfalárias para colonizar um ambiente, são: riquezas de microflora e matéria orgânica, pouca turbidez, boa insolação, pH em torno de

6 a 8, teor de NaCl abaixo de 3 por 1000 e temperatura média entre $20°C$ e $25°C$. Cabe aqui ressaltar, todavia, que as bionfalárias suportam modificações consideráveis nas características físicas, químicas e biológicas de seus ambientes, podendo, inclusive, utizar-se da estivação como uma estratégia para suportar a adversidade do meio.

Sabendo-se que os representantes do gênero Biomphalaria são constantementes encontrados em grande variedades de coleções de água doce, paradas ou pouco correntes, natural ou articialmente alagadas, que um único espécime é capaz de produzir, por autofecundação, uma população de numerosos indivíduos e que *B. tenagophila* está em provável extensão em Santa Catarina, torna-se importante estudar os fatores bióticos e abióticos que interferem na biologia, distribuição e adaptação aos ambientes por eles explorados. Assim sendo, o objetivo do presente trabalho é avaliar crescimento, desempenho reprodutivo, sobrevivência e fecundidade de duas amostras de *B. tenagophila*, considerando-se diferentes condições do meio.

2) *Objetivo geral.* Determinar o efeito de diferentes condições do meio (poluição) sobre a biologia de *B. tenagophila*.

3) *Objetivos específicos:*

- Verificar (estudar) o crescimento de *B. tenagophila*.
- Estudar o desempenho reprodutivo da espécie.

4) *Hipótese científica.* Num meio com poluição, o desenvolvimento biológico da espécie é prejudicado.

5) *Escolha do fator que deve ser incluído no estudo e seus correspondentes níveis.* Nesse projeto, o fator em estudo é *poluição*, também chamado de *variável independente*, os diferentes níveis de poluição são os *tratamentos*. Nesse trabalho foram utilizados dois tratamentos, quais sejam: 1) Sem poluição (com troca de água) e 2) com poluição (completa a água).

6) *Escolha da unidade experimental.* Nesse experimento a unidade experimental é um caramujo. Cada unidade experimental é formada por um copo de vidro (mini-aquário), com 60 ml de água deionizada, contendo um caramujo.

7) *Escolha das variáveis que serão medidas nas unidades experimentais.* Algumas variáveis avaliadas neste experimento foram: diâmetro em três diferentes tempos (nascimento, na $1^{\underline{a}}$ desova e no final do experimento); idade na $1^{\underline{a}}$ desova; número de ovos desenvolvidos; número de ovos viáveis; número de ovos inviáveis; número total de ovos.

8) *Determinação das regras e procedimentos pelos quais os tratamentos são atribuídos às unidades experimentais.* Nesse experimento a amostra total foi composta por 51 caramujos (i.é. 51 unidades experimentais). Através de um processo aleatório foram escolhidos 23

caramujos para receberem o tratamento T e 28 caramujos para receberem o tratamento C. A regra de estabelecer os tratamentos às unidades experimentais foi completamente ao acaso.

9) *Coleta de dados; Análise estatística dos dados e Relatório final.* Idem ao que foi comentado para o projeto 1.

1.3 Aspectos do Planejamento Estatístico de um Experimento

1.3.1 Experimentos com um Fator e mais de um Fator

Nos projetos 1 e 2, vimos dois experimentos com apenas 1 fator. No projeto 1 o fator é a decepa e, no projeto 2 é a poluição. Em muitos caso, temos experimentos com mais de um fator. Considere um experimento com cinco (5) doses de leite de vaca e cinco (5) doses de coagulante. Aqui temos 2 fatores em estudo, doses de leite e coagulante, com 5 níveis cada um, caracterizando um . É interessante salientar que a escolha dos fatores e seus níveis é incumbência do pesquisador. Nos experimentos fatoriais é possível estudar-se a *interação* que existe entre os fatores, isto é, como é o comportamento dos níveis de um fator dentro dos níveis do outro fator. A figura 1.4 ilustra o efeito da interação entre os fatores leite de vaca e coagulante.

Os fatores podem ser *quantitativos ou qualitativos.* A temperatura de um forno, os níveis de nitrogênio e de fósforo são exemplos de fatores quantitativos, enquanto que, fabricantes de drogas, diferentes locais e meios de cultura são fatores qualitativos.

É importante para o planejamento e a análise estatística distinguirmos as seguintes situações:

a) um pesquisador deseja conduzir um experimento para verificar o efeito do starter *"Lactobacillus plantarum"* em salame tipo italiano sobre o tempo de maturação dos mesmos. Para essa finalidade utilizou 3 concentrações do starter, quais sejam: $2,5 \times 10^5$; $5,0 \times 10^5$ e $10,0 \times 10^5$ células viáveis/grama de massa. Ele deseja saber se há diferenças entre as 3 concentrações. Portanto, nesse experimento, temos um fator (starter) de *efeito fixo*, isto é, as concentrações foram definidas pelo pesquisador, ou seja, não foi feita uma escolha aleatória dos níveis, assim, as conclusões desse experimento se referem apenas as concentrações utilizadas no experimento.

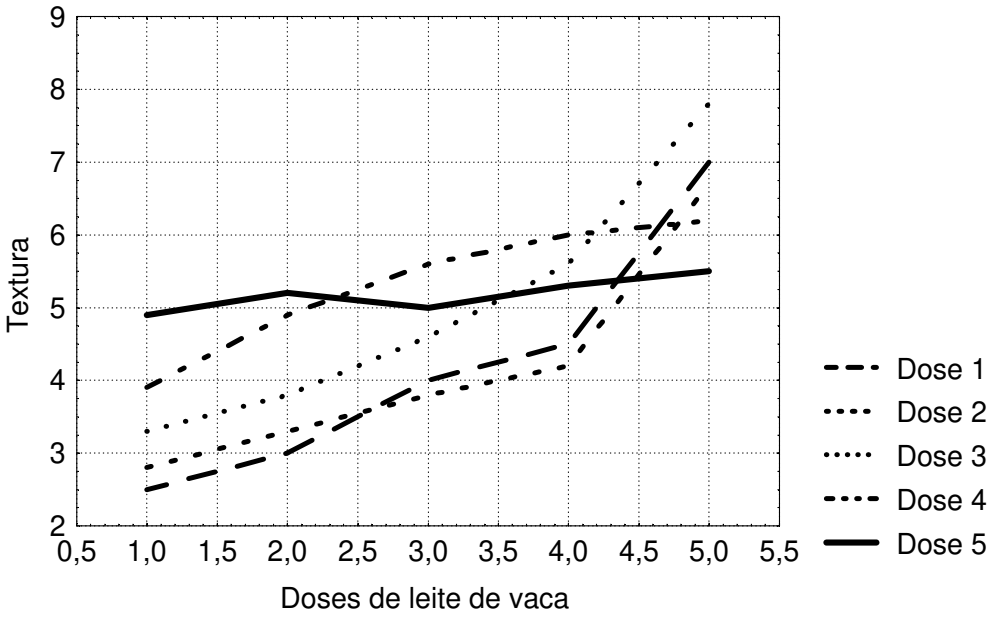


Figura 1.4: Efeito da interação entre doses de leite de vaca e doses de coagulante

b) um tecnologista quer comparar a qualidade de pão fabricado por diferentes padarias da cidade de Florianópolis. Neste caso, as padarias são os tratamentos. Ele deseja que seus resultados sejam válidos para todas as padarias de Florianópolis, então, em lugar de escolher intencionalmente algumas padarias que pretende compará-las, deverá sorteá-las a partir de algum procedimento que garanta a aleatoriedade, como por exemplo, a tabela de número aleatórios, dada no apêndice 7, assim, o pesquisador estará fazendo um experimento onde o fator é dito *aleatório*. Para saber se um efeito é aleatório, verifique se os tratamentos em comparação representam uma *amostra aleatória* de uma população. Se os tratamentos não são uma amostra aleatória, o efeito é fixo.

Sobre as conclusões pode-se dizer: 1) os fatores são fixos: neste caso, os resultados (conclusões) são válidos apenas para os níveis do fator que estão presentes no experimento e 2) os fatores são aleatórios: as conclusões são válidas para a população de níveis.

Os tratamentos são selecionados pelo pesquisador e deve ser feita de acordo com os objetivos do trabalho. Um bom conhecimento do material experimental e alguma idéia sobre os efeitos dos tratamentos são muito úteis para dar mais objetividade aos trabalhos.

As conclusões de um experimento dependem de como os dados foram coletados. No projeto 1 estudou-se 4 alturas de decepas e procurou-se controlar a idade das plantas por meio da blocagem, isto é, foram agrupadas as árvores com idades próximas). Caso não tivesse sido feito esse controle, o pesquisador não saberia dizer se as diferenças médias da variável resposta seriam devido às alturas de decepas ou da idade das árvores. Esse fato é

conhecido como *confundimento* de fatores e a variável idade é conhecida como *variável de perturbação* (em inglês: *nuisance variable*).

1.3.2 Tratamento Controle

É necessário quando não se conhece a eficiência dos tratamentos em estudo, ou quando a eficiência dos tratamentos é conhecida mas não é consistente em todas as condições. Nem todos os experimentos necessitam do tratamento controle. Exemplo: alta pressão em temperatura ambiente ($25°C$) e o experimento foi feito a $2°C$ (frango crú). O que é? O tratamento controle consiste em se realizar todos os procedimentos que são feitos nas unidades experimentais usadas para os outros tratamentos, exceto a aplicação do efeito em estudo. Exemplo: num estudo sobre aditivos em alimentos, um tratamento pode consistir de uma porção de um vegetal contendo um aditivo particular que é servido a um degustador. O tratamento controle consistiria de uma porção do mesmo vegetal servido ao degustador, na mesma situação experimental, exceto que não seria utilizado o aditivo no alimento. É fundamental que o tratamento controle seja conduzido nas mesmas condições experimentais dos outros tratamentos.

1.3.3 Variáveis e Covariáveis

O que pode constituir problema, as vezes, é a forma como a variável é medida, pois disso depende a precisão das observações e o tipo de análise a ser executada. Exemplo: se os valores da variável sabor de um alimento é dada numa escala de 1 a 10, pode-se aumentar a precisão e facilitar a análise, utilizando-se como observação, a média de 3 valores da mesma unidade experimental.

Quando temos uma variável que influencia as variáveis dependentes, chama-se a mesma de *covariável.* Exemplos: 1) se o tempo necessário para executar um experimento é 30 dias, e se a temperatura do ambiente tem influência na variável dependente (resposta), então, a temperatura deve ser mantida constante. Se isso não for possível, então, deve-se medir a temperatura para cada unidade experimental; 2) num experimento para comparar 4 meios de cultura em frangos congelados onde a variável dependente é a população de *Staphilococus aureus*, cada frango apresenta uma população inicial de Staphilococus diferente, neste caso, a população inicial de Staphilococus é a covariável; 3) Num experimento para estudar a produção de 10 variedades de soja, o número de sementes que germinam nos canteiros é

a covariável. Estas variáveis entram na análise como covariáveis e, observe que elas não podem ser controladas pelo pesquisador. Este fato é que as diferencia de uma variável de perturbação (*nuisance variable*).

1.3.4 Repetição e Casualização

Para que a metodologia estatística possa ser aplicada aos resultados de um experimento, é necessário obedecer a dois princípios básicos da experimentação, o da *repetição e da aleatorização* dos tratamentos. Um terceiro princípio, o *controle local*, pode ou não ocorrer num experimento.

A *Repetição* consiste, como o próprio nome indica, em repetir o mesmo tratamento várias vezes. O uso de repetições dos tratamentos é necessário para podermos calcular a variabilidade e, com isso, executar os testes estatísticos e, também, para fazer estimação intervalar dos efeitos dos tratamentos. De um modo geral, quanto maior o número de repetições, mais precisas vão ser as nossas estimativas. Na prática, o número de repetições vai depender muito dos recursos e material experimental disponível. O cálculo do tamanho da amostra é um dos principais itens do planejamento de um experimento e, a sua determinação, não é trivial, e exige que se tenha algum conhecimento sobre a variabilidade dos dados, a precisão e confiança desejadas nos resultados. Então, as principais finalidades do uso de repetições são: 1) dar uma estimativa do erro experimental; 2) aumentar a precisão de um experimento, reduzindo o desvio padrão das médias dos tratamentos e 3) estimação e testes de hipóteses. O que caracteriza uma repetição é que ela deve gerar um resultado independente.

A *aleatorização ou casualização* consiste no sorteio dos tratamentos às unidades experimentais por um processo bem definido, fixo; é necessária para termos certeza de que um tratamento não seja beneficiado ou prejudicado por alguma causa conhecida ou desconhecida, tais como: intensidade de luz, constituição genética, temperatura, umidade, ventilação, etc. É também fundamental para atender a suposição de que os dados são oriundos de uma amostra aleatória. Os métodos estatísticos requerem que as observações (ou os erros), sejam variáveis aleatórias independentemente distribuídas. A casualização faz com que esta suposição seja válida. O princípio da casualização é uma das principais contribuições dos estatísticos à ciência experimental, principalmente Ronald A. Fisher (1890 - 1962). Só a casualização garante que unidades com características diferentes tenham igual probabilidade de serem designadas para os diferentes tratamentos. Com a casualização, obtemos estimativas não tendenciosas das médias dos tratamentos e das diferenças entre as médias; obtemos uma estimativa não tendenciosa do erro experimental. Certas restrições podem ser incluídas

na casualização *(controle local)*, para levar em consideração alguma(s) fonte(s) de variação do material experimental. O delineamento em blocos completos ao acaso apresenta uma restrição.

1.4 Exercícios Propostos

1 - Planeje um experimento para comparar a produção de cinco variedades de milho.

2 - Planeje um experimento para testar o efeito da adubação nitrogenada (5 níveis), sobre a produção de milho.

3 - Planeje um experimento na sua área de pesquisa.

Para a resolução desses exercícios, entende-se que um experimento está planejado quando estão definidas:

1. enunciado do problema com formulação do objetivo geral, dos objetivos específicos e da(s) hipótese(s);
3. escolha do(s) fator(es) e de seus níveis que deve(m) ser incluído(s) no estudo;Faça uma descrição dos mesmos;
3. as variáveis respostas ou dependentes em análise e a forma como serão medidas;
4. a unidade experimental;
5. decidir sobre o número de unidades experimentais a serem associadas a cada tratamento.
6. a forma (maneira) como os tratamentos serão designados às unidades experimentais;
7. bibliografia.

2 Análise Exploratória de Dados

2.1 Organização, Resumo e Representação de Dados

2.1.1 Introdução

Como já comentamos anteriormente, a parte da Estatística que trata da organização, apresentação, resumo e descrição dos dados é conhecida como Análise Exploratória de Dados. Esta parte, geralmente limitava-se a construção de alguns tipos de gráficos (linhas, colunas e setores) e ao cálculo de algumas medidas de tendência central e de variabilidade, como, por exemplo, a média e a variância. Atualmente, foram desenvolvidas muitas outras técnicas (Tukey, 1971), principalmente visuais, através das quais procura-se estudar a regularidade presente nos dados. Esta análise permite que o pesquisador adquire um bom conhecimento e senso crítico sobre os seus dados observados.

Neste capítulo, através da Análise Exploratória de Dados, procuraremos tirar o máximo de informações de um conjunto de dados, ou seja, fazer todas as interpretações necessárias para responder aos objetivos de uma pesquisa.

Quando estamos trabalhando com um conjunto de dados, é bastante provável que o mesmo apresente algum tipo de regularidade, ou seja, um padrão de variação. Devido a esta regularidade presente nos dados é possível ajustar-se um *modelo*. Este é um dos principais objetivos da análise exploratória de dados, isto é, procurar estabelecer um modelo para um conjunto de dados, o qual possa ser utilizado na análise estatística inferencial. Exemplo do que seja um modelo no aspecto geral: vamos verificar o tipo de relacionamento entre a taxa de crescimento de uma pastagem cultivada no Planalto Catarinense e a temperatura do solo a 10 cm de profundidade no período de junho a novembro. A figura 2.1 mostra a distribuição dos pontos entre essas duas variáveis. De modo visual, podemos verificar que existe uma relação linear entre a temperatura do solo e a taxa de crescimento, desse modo, podemos traçar uma reta a "olhômetro", o mais próximo possível de todos os pontos, que será o nosso *modelo*. Evidentemente que os pontos não caem sobre a reta (pode ocorrer para alguns). A diferença entre os dados e o modelo é chamada de *erro*. Explicação sobre o termo do erro foi dado na seção 1.1.2.

Chama-se de *modelo* a parte da variabilidade dos dados que é explicada pelo mesmo e *erro* a parte da variabilidade dos dados não explicada pelo modelo. A figura 2.2 ilustra os Dados, a parte do modelo e a parte do erro para uma observação. Os dois componentes são igualmente importantes. O estudo denominado de Análise de Resíduos, nos fornece

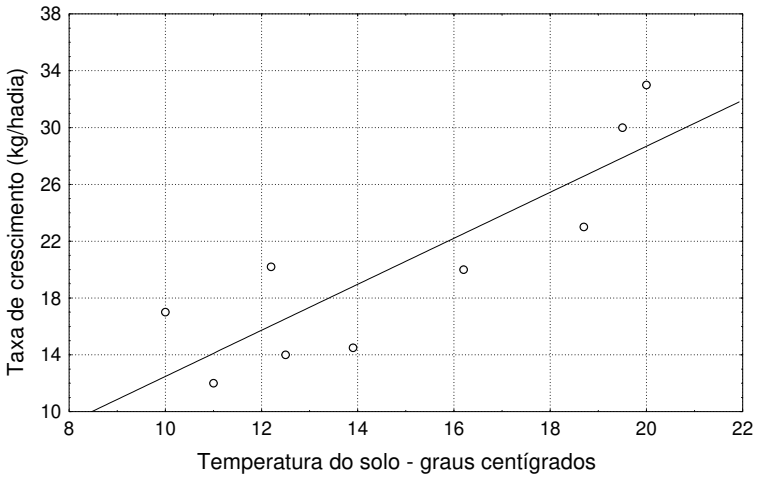


Figura 2.1: Relação entre temperatura do solo a 10 cm de profundidade e taxa de crescimento de uma pastagem de inverno no Planalto Catarinense

informação se a parte do modelo é adequada ou não para representar os dados, dentre outros aspectos importantes da análise de dados.

2.1.2 Classificação das Variáveis Selecionadas para o Estudo

Um pesquisador quando está realizando um determinado experimento ou levantamento, necessita avaliar certas características nas plantas, nos animais, instrumentos, pessoas, etc. Por exemplo, registrar o diâmetro altura de peito (DAP) de Avicenias do manguezal do Itacorubi, a produção de milho por hectare, a resistência ao ataque de pragas do feijão, fazer a contagem do número de vagens por planta, número de grãos por vagem, etc. Estas características chamam-se variáveis, porque originam valores que tendem a variar quando se fazem medidas sucessivas, por exemplo, vamos supor que plantemos quatro áreas de $30m^2$ de um híbrido de milho, com certeza vamos obter quatro valores diferentes de produção nessas áreas (unidades) experimentais.

Um pesquisador deve aprender a identificar quatro tipos de variáveis, que serão descritas através de um exemplo.

Exemplo. Um pesquisador instalou um experimento para avaliação do comportamento de híbridos de milho, para isso, tomou algumas medidas agronômcias que estão apresentadas na tabela 2.1

Muitas variáveis, tais como, tipo de grão e resistência à ferrugem, apresentam como resultado uma *qualidade* ou *atributo*, e outras variáveis, tais como, rendimento médio, ciclo

Tabela 2.1: Resultados de um experimento de competição de híbridos de milho para a região preferencial I com altitudes abaixo de 800m - safra:1987/1988

Híbridos	Rendimento médio (kg/ha)	Ciclo (dias)	Altura planta (cm)	Altura espiga (cm)	Tipo grão	Ferrugem [1] (escala)
1	6388	65	242	103	dentado	r
2	6166	65	258	134	semi-dentado	r
3	6047	65	240	104	semi-dentado	s
4	5889	66	243	108	semi-dentado	s
5	5823	69	257	128	dentado	ms
6	5513	68	241	108	semi-dentado	s
7	5202	64	235	108	dentado	r
8	5172	68	240	103	dentado	s
9	5166	69	253	123	dentado	ms
10	4975	70	250	117	semi-dentado	ms
11	4778	70	242	114	dentado	mr
12	4680	66	245	111	semi-duro	ms
13	4660	69	239	110	semi-duro	mr
14	5403	73	264	138	dentado	ms
15	5117	76	282	149	dentado	mr
16	5063	72	274	151	dentado	r
17	4993	71	279	134	semi-dentado	r
18	4980	72	274	140	dentado	ms
19	4770	73	244	140	dentado	r
20	4685	71	265	139	semi-duro	mr
21	4614	73	248	110	semi-dentado	r
22	4552	73	265	128	semi-dentado	r
23	3973	74	261	124	semi-dentado	mr
24	4550	71	259	129	semi-duro	s
25	5056	64	252	104	semi-duro	mr
26	4500	70	271	109	dentado	ms
27	4760	68	243	137	semi-duro	r
28	5110	66	252	141	semi-dentado	ms
29	4960	70	262	120	dentado	ms
30	4769	73	260	118	dentado	r
31	4849	74	250	119	semi-dentado	s
32	5230	71	255	138	semi-duro	s

[1]r=resistente; mr=moderadamente resistente; ms=m. susceptível; s=susceptível

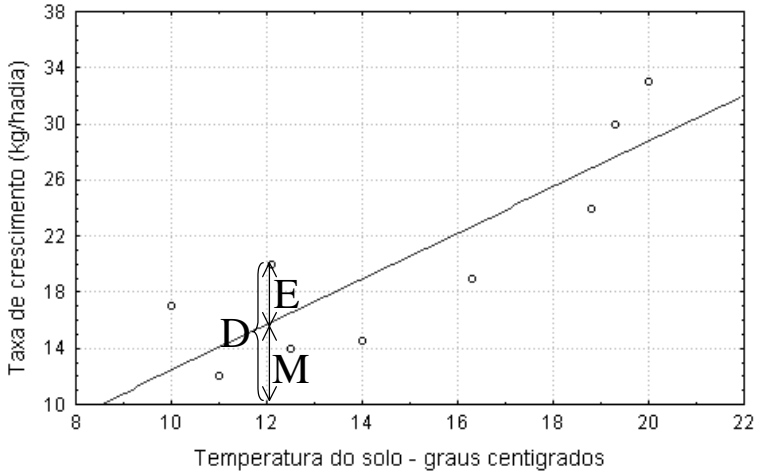


Figura 2.2: Os componentes de um modelo

da cultura, apresentam como resultado *medidas* ou *contagens*. As variáveis do primeiro tipo são chamadas de variáveis *qualitativas* e as do segundo tipo são chamadas de variáveis *quantitativas*.

Dentre as variáveis qualitativas podemos distinguir dois tipos:

- *variáveis qualitativas ordinais*: para estas variáveis existe uma ordem nos possíveis resultados da mesma. No exemplo, temos a resistência à ferrugem, dada numa escala. Outro exemplo podem ser, 1^{o} *grau* , 2^{o} *grau*, superior.

- *variáveis qualitativas nominais*: para estas variáveis não existe uma ordenação nos resultados. No exemplo, temos o tipo de grão como variável desse tipo. Outros exemplos, podem ser: germina/não germina, os cursos da UFSC (Agronomia, Ciências Biológicas, etc.), a côr da flor de soja.

Dentre as variáveis quantitativas também podemos distinguir dois tipos:

- *variáveis quantitativas discretas*: estas variáveis só podem assumir certos valores, em geral números inteiros e normalmente são resultantes de contagens. É possível formar uma lista (finita ou infinita) dos valores. No exemplo, a variável ciclo da cultura é discreta. Outros exemplos, podem ser: número de dias da emergência à floração, número de vagens por planta, número de grãos por vagem.

- *variáveis quantitativas contínuas*: estas variáveis assumem todos os valores possíveis dentro de um determinado intervalo. Esta variáveis, dependendo da precisão utilizada na medição, são capazes de diferenciar animais, plantas para valores muito pe-

quenos. São variáveis cujos resultados geralmente são fracionários. No exemplo, temos a variável rendimento médio de grãos de milho, altura da planta, altura de espiga.

A distinção entre variáveis contínuas e discretas é muitas vezes artificial, pois depende da aproximação (precisão) utilizada. Por exemplo, idade é uma variável de medida de tempo, portanto, por definição, é uma variável aleatória contínua, porém, em muitos casos ela é medida em anos completos (discretização da variável), o que a torna uma variável discreta. Serão tratadas como variáveis contínuas todas as que, pelo menos em teoria, possam assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

Para cada tipo de variável existem técnicas mais apropriadas para resumir as informações; entretanto, vamos verificar que técnicas usadas num caso podem ser adaptadas para outros, pois é possível transformar variáveis quantitativas em qualitativas e vice-versa. Por exemplo, sexo: $1 \rightarrow$ masculino e $0 \rightarrow$ feminino; rendimento: colocar em categorias, por exemplo, baixa, média e alta produção. O estudo de probablidades também apresenta os seus modelos de acordo com cada tipo de variável. Estes modelos serão estudados nas seções 3, 4 e 5.

2.1.3 Distribuições de Freqüências. Representação em Tabelas e Gráficos

Feita a coleta dos dados, através de censos, de levantamentos por amostragem (*Survey*, em inglês), ou de experimentos, os mesmos apresentam-se, geralmente, de maneira desorganizada, ainda sem valor informativo sobre o fenômeno em estudo, portanto, os mesmos devem ser organizados e resumidos, para possibilitarem a obtenção de informações úteis para o trabalho de pesquisa.

O estudo das distribuições de freqüências nos permite conhecer a forma, a maneira como os valores de uma variável se comporta, isto é, é possível ter uma boa idéia global dos valores, ou seja, da distribuição. Uma distribuição de freqüências pode ser representada em forma de tabela ou gráfico.

2.1.3.1 Distribuições de Freqüências de Variáveis Qualitativas. Representação em Tabelas

Feita a coleta dos dados relativa às variáveis definidas no início da pesquisa, o investigador tem interesse, agora, em conhecer o comportamento dessas variáveis considerando os elementos pesquisados, por exemplo, conhecer a distribuição da variável resistência à ferrugem pesquisada em 32 híbridos de milho, na região de Chapecó, SC.

Este estudo pode ser feito através da construção de distribuições de freqüências, chamando-se de frequência, por exemplo, o número de híbridos para a categoria S, MS, MR, e R, respectivamente. Chama-se, portanto, distribuição de freqüências, a correspondência entre categorias ou valores possíveis de uma variável e as respectivas freqüências. Inicialmente vamos representar as distribuições de freqüências em tabelas.

Alguns aspectos importantes devem ser levados em consideração na construção de uma tabela, quais sejam:

1. Toda tabela deve conter um título completo; as três questões que devem ser respondidas num título são: o quê se está estudando? onde foi feito o estudo? e quando?. O título deve ser colocado na parte superior da tabela.

2. Se os dados não são próprios deve-se indicar a fonte dos mesmos. Ela vai na parte inferior da tabela.

3. As notas e chamadas são utilizadas para fazer esclarecimentos de ordem geral e específicas, respectivamente. Ambas são numeradas, geralmente em algarismos arábicos, pode-se, ainda, utilizar letras minúsculas ou símbolos, como por exemplo, asterisco. Também são colocadas na parte inferior da tabela.

4. Os totais e subtotais devem ser bem destacados.

5. De preferência usar o mesmo número de casas decimais para os algarismos.

6. Não devem ser fechadas lateralmente.

7. Quando algum valor da tabela é nulo pela própria natureza do fenômeno em estudo, deve-se utilizar o hífen (-) para substituí-lo. Quando não se tem informação sobre algum valor deve-se colocar três pontos (...). Se existe dúvida sobre a exatidão da informação deve-se usar ponto de interrogação (?). Se algum valor for omitido para evitar individualização, deve-se usar a letra x. O símbolo de parágrafo (§) é utilizado para retificar uma informação publicada anteriormente.

Exemplo. A tabela 2.1 apresenta os dados sobre resistência à ferrugem de 32 híbridos de milho (coluna 7). A distribuição de freqüências para essa variável é apresentada na tabela 2.2, cuja construção passamos a discutir.

Na tabela 2.2, a primeira coluna mostra todas as categorias da variável resistência à ferrugem. Na segunda coluna temos as freqüências absolutas, resultantes da contagem de

Tabela 2.2: Distribuição de freqüências da resistência à ferrugem de 32 híbridos de milho recomendados para a região preferencial I com altitudes abaixo de 800m, 1987/88

Resistência à ferrugem	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem	% acumulada de satisfeito
R	10	0,313	31,250	31,250
MR	6	0,188	18,750	50,000
MS	9	0,281	28,125	-
S	7	0,219	21,875	-
TOTAL	32	1,000	100,000	

quantas observações se identificam com cada categoria. A notação para as freqüências absolutas é n_i, assim temos, $n_1 = 10$, $n_2 = 6$, $n_3 = 9$, $n_4 = 7$. A terceira coluna apresenta uma medida relativa de cada freqüência, obtida da divisão de cada freqüência absoluta pelo número total de observações, resultando nas proporções ou freqüências relativas ($f_i = n_i/n$). Por exemplo, a freqüência relativa da categoria R é calculada por: $f_1 = 10 \div 32 = 0,3125$. Multiplicando por 100 as freqüências relativas, temos as percentagens de ocorrências de cada resultado observado (coluna 4). A última coluna da tabela apresenta a porcentagem acumulada, dada pela porcentagem da respectiva coluna adicionada da(s) anterior(es) à ela. Por exemplo, os 50% da categoria MR é o resultado da adição de 18,75% e 31,25%. Observa-se na tabela 2.2 que temos praticamente 50% de híbridos resistentes e 50% de susceptíveis. Deixamos as categorias MS e S com traços pois não tem sentido prático o cálculo das porcentagens acumuladas neste caso, ou seja, não tem sentido afirmarmos que 100% dos híbridos são susceptíveis.

Essas medidas relativas são particularmente importantes na comparação entre distribuições de freqüências, como veremos a seguir em distribuições bidimensionais, isto é, quando temos duas variáveis em estudo. Quando temos mais do que duas variáveis o raciocínio é o mesmo.

Tabelas Bidimensionais

A tabela 2.3 mostra três distribuições de freqüências, uma para cada região preferencial. Dizemos que esta tabela é bidimensional, pois apresenta a distribuição de duas variáveis, quais sejam: 1) resistência à ferrugem e 2) região.

Como os totais marginais da tabela 2.3 são diferentes, e isto dificulta a interpretação, é interessante trabalhar com porcentagens, tornando, assim, os resultados comparáveis. As

Tabela 2.3: Distribuição de freqüências da resistência à ferrugem de híbridos de milho, segundo as regiões preferenciais

Resistência à	Regiões			TOTAL
ferrugem	Chapecó	Campos Novos	Içara	
R	10	3	12	25
MR	6	12	2	20
MS	9	3	3	15
S	7	1	2	10
TOTAL	32	19	19	70

Tabela 2.4: Distribuição das porcentagens da resistência à ferrugem de híbridos de milho, para as regiões preferenciais (Perfis colunas)

Resistência à	Regiões			TOTAL
ferrugem	Chapecó	Campos Novos	Içara	
R	31,2	15,8	63,2	35,8
MR	18,8	63,2	10,5	28,6
MS	28,1	15,8	15,8	21,4
S	21,9	5,2	10,5	14,3
TOTAL	100,0	100,0	100,0	100,0

porcentagens podem ser calculadas de três formas: 1) fixando-se os totais de linhas em 100%; 2) fixando-se os totais de colunas em 100% e 3) fixando-se o total geral em 100%. Isto vai de acordo com o objetivo da pesquisa, uma delas será a mais adequada.

Na tabela 2.4 fixamos os totais de colunas em 100%. Este tipo de distribuição serve para comparar a distribuição das regiões conforme a resistência à ferrugem, ou seja, para uma dada região podemos analisar a variável resistência à ferrugem. Com respeito a essa tabela, observamos que em Campos Novos a porcentagem de híbridos moderadamente resistentes é bem superior às outras duas regiões, 63,2% em Campos Novos contra 18,8% em Chapecó e 10,5% em Içara. Por outro lado, vemos que Içara apresenta a maior porcentagem de híbridos resistentes à ferrugem (63,2%), bem superior à Chapecó (31,2%) e Campos Novos (15,8%). Percebe-se que em Chapecó a distribuição é mais homogênea nas categorias da resistência.

Tabela 2.5: Distribuição das porcentagens da resistência à ferrugem de híbridos de milho (Perfis linhas)

Resistência à	Regiões			TOTAL
ferrugem	Chapecó	Campos Novos	Içara	
R	40,0	12,0	48,0	100,0
MR	30,0	60,0	10,0	100,0
MS	60,0	20,0	20,0	100,0
S	70,0	10,0	20,0	100,0
TOTAL	45,7	27,1	27,1	100,0

Tabela 2.6: Distribuição conjunta das porcentagens em relação ao total geral

Resistência à	Regiões			TOTAL
ferrugem	Chapecó	Campos Novos	Içara	
R	14,3	4,3	17,1	35,7
MR	8,6	17,1	2,9	28,6
MS	12,9	4,3	4,3	21,4
S	10,0	1,4	2,8	14,3
TOTAL	45,7	27,1	27,1	100,0

De outra forma, se desejamos saber, por exemplo, para os híbridos resistentes, qual a distribuição por região, devemos fixar os totais de linhas (Perfis linhas). Os resultados são dados na tabela 2.5. Em Campos Novos observamos uma baixíssima porcentagem de híbridos resistentes à ferrugem (12%); Chapecó e Içara apresentam praticamente a mesma porcentagem, 40% e 48%, respectivamente. Para a categoria MR, Campos Novos se destaca com 60%. Dos MS e S, Chapecó se destaca com 60% e 70%, respectivamente.

Na tabela 2.6, expressamos as porcentagens em relação ao total geral. Observamos que Campos Novos apresenta a maior porcentagem de híbridos moderadamente resistentes (17,1%). Içara apresenta a maior porcentagem de híbridos resistentes (17,1%), seguido de Chapecó com 14,3%.

Exercício resolvido

1. Um estudo sobre o tempo de vida de duas amostras de *Biomphalaria straminea*

Tabela 2.7: Número de indivíduos classificados segundo o tempo de vida, em dias, e condição a que as populações foram submetidas

Tempo de vida	Condição		Total
em dias	Agrupadas	Isoladas	
58 a 179	3	6	9
180 a 300	6	19	25
301 a 422	36	24	60
Total	45	49	94

(Amostra A: indivíduos agrupados numa bacia e Amostra I: indivíduos isolados em copos de vidro), produziu os resultados da tabela 2.7:

a) Dos indivíduos que tiveram tempo de vida entre 58 e 179 dias, qual a porcentagem deles para a condição Agrupados? e Isolados?

b) Qual a porcentagem de indivíduos para tempo de vida entre 180 e 300 dias e condição Isolados?

c) Dos indivíduos submetidos à condição de Agrupados, qual a porcentagem de indivíduos teve tempo de vida entre 301 e 422?

Observou-se 9 indivíduos com tempo de vida entre 58 e 179 dias, portanto, as porcentagens são dadas por: 3/9=33,33% e 6/9=66,67%, respectivamente. A resposta do item b) é: 19/94=0,2021=20,21%. Observou-se um total de 45 indivíduos submetidos a condição de Agrupados, portanto, a porcentagem dos que tem tempo de vida entre 301 e 422 é: 36/45=0,80=80%.

2.1.3.2 Representações Gráficas de Variáveis Qualitativas

As representações gráficas de tabelas de distribuições de freqüências permitem uma boa visualização da distribuição da variável. Podemos ter uma rápida e concisa visualização da variabilidade da variável. A utilização de gráficos para ilustrar os resultados de uma pesquisa sempre é recomendável. A construção de gráficos depende muito da habilidade artística de cada um. Não é objetivo deste livro entrar em detalhes sobre a construção de gráficos e, sim, somente comentar sobre alguns pontos que devem ser respeitados.

1. Os gráficos devem ser claros, simples, atrair a atenção e inspirar confiança.
2. Servem para realçar certos aspectos importantes de uma pesquisa.
3. O tamanho deve ser adequado à sua publicação em revistas, periódicos, cartazes, livros, etc.
4. Sempre devem ter um título completo e deve ser colocado na parte inferior do gráfico.
5. Devem ser construídos numa escala que não desfigure os fatos ou as relações que se deseja destacar.
6. Devem ser mais largos do que altos.
7. Deve-se sempre especificar (dar nome) e graduar (criar escala) os eixos.
8. Quando os dados não são próprios deve-se citar a fonte. Esta deve ser colocada na parte inferior do gráfico.
9. Pode-se usar notas para esclarecimentos gerais.

Nesta seção veremos os *gráficos de barras*, *colunas*, *setores* e *linhas*, que são particularmente importantes na representação de dados categorizados. Mostraremos os tipos padrões de gráficos. Os programas estatísticos como o Statistica, Statgraphics, Minitab, SPSS, SAS e, também, planilhas eletrônicas como o Excel, fornecem uma gama enorme de gráficos.

Os *gráficos de barras* tem por finalidade comparar grandezas, por meio de retângulos de igual largura, dispostos horizontalmente, e com alturas proporcionais as grandezas. Deve-se deixar uma distância entre os retângulos. É usado quando as inscrições a serem colocadas sob os retângulos forem muito extensas. Sempre que possível ordenar as barras em ordem decrescente. A figura 2.3 mostra o gráfico de barras da distribuição da tabela 2.2.

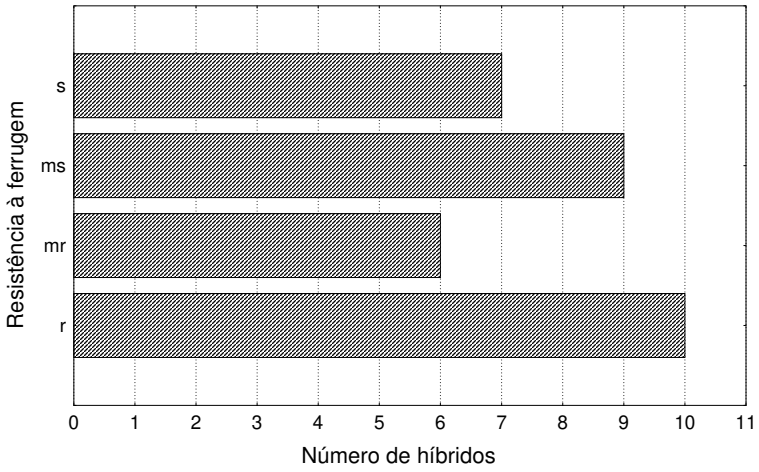


Figura 2.3: Distribuição de freqüências da resistência à ferrugem de híbridos de milho, para a região preferencial I, 1987/88

Para efetuar uma análise comparativa de várias distribuições, podemos construir um *gráfico de barras múltiplo*. A figura 2.4 mostra o gráfico de barras múltiplo da distribuição do tipo de grão e da resistência à ferrugem, cujos dados estão na tabela 2.1. Observe a necessidade de construção de uma legenda.

Quando os retângulos são colocados na posição vertical, temos os *gráficos de colunas*. A finalidade desse tipo de gráfico é a mesma dos gráficos de barras, isto é, servem para comparar grandezas. Eles devem ser preferidos aos gráficos de barras quando as legendas a se inscreverem sob os retângulos forem pequenas. Na figura 2.5 temos o gráfico de colunas para tipo de grão (os dados estão na tabela 2.1, coluna 6).

O *gráfico de setores* consiste em dividir a área total de um círculo em subáreas (setores) proporcionais às freqüências. É um gráfico ideal para representar dados de porcentagens. O número de setores deve ser adequado. Considerando o tipo de grão dentado da tabela 2.1, temos as seguintes porcentagens, 42,9%, 35,7%, 14,3% e 7,1%, para as categorias, moderadamente susceptível, resistentes, moderadamente resistentes e susceptível, respectivamente, cujo gráfico é dado na figura 2.6.

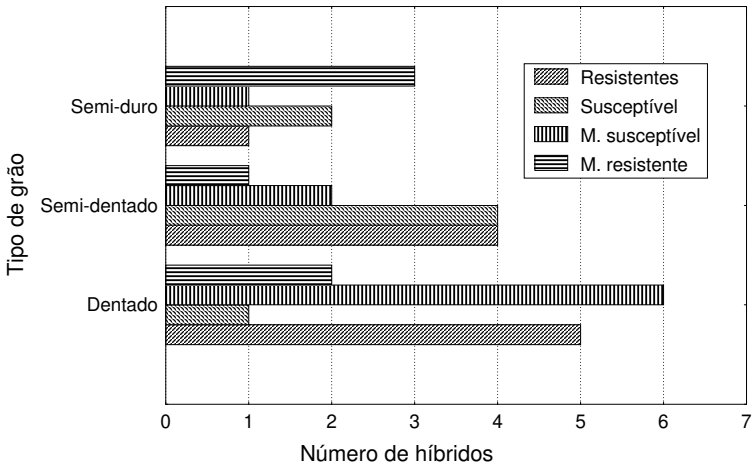


Figura 2.4: Distribuição das freqüências do tipo de grão e resistência à ferrugem de híbridos de milho, para a região I, 1987/88

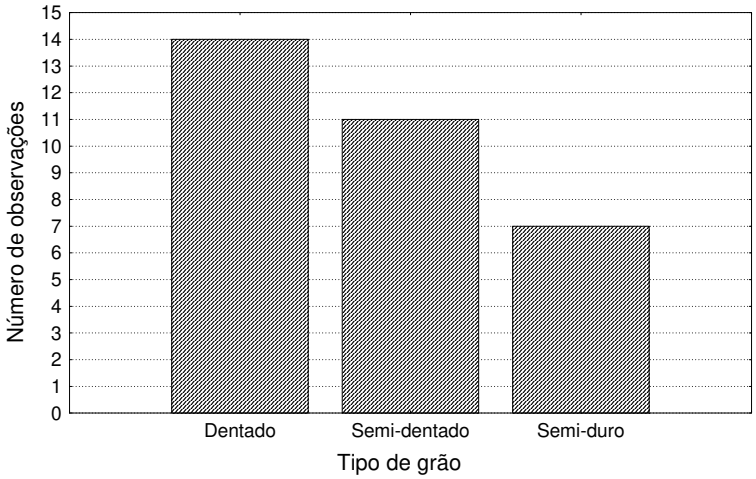


Figura 2.5: Distribuição das freqüências dos tipos de grão para 32 híbridos de milho, para a região I, 1987/88

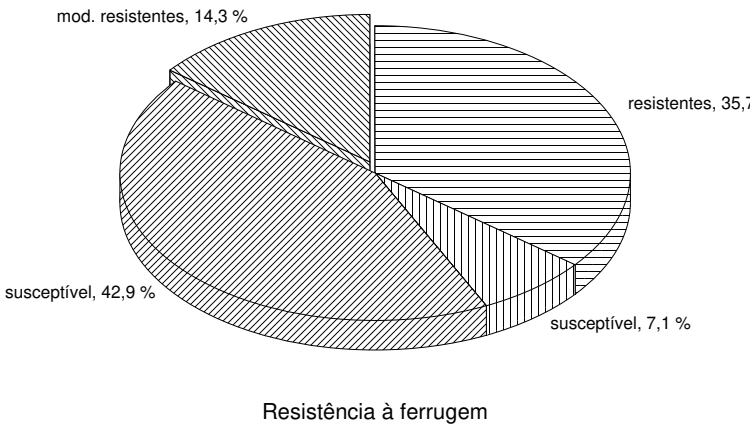


Figura 2.6: Distribuição das proporções (%) da resistência à ferrugem, para o tipo de grão dentado, para a região I, 1987/88

Os *gráficos de linhas* são adequados para dados ordenados ao longo do tempo (séries temporais) e servem para comparar distribuições. Na figura 2.7, apresentamos o gráfico de linhas da variável acidez em ácido lático (%) de 4 tratamentos, denominados aqui por PA, PB, PC e C.

Exercício resolvido

1. Um pesquisador está procurando verificar se existe associação entre hábito de crescimento (3=indeterminado trepador e 4=indeterminado prostrado) e porte (Tr=trepador, EB=ereto na base e Pr=prostrado) na cultura do feijão de vagem. Para esse fim foi conduzido um experimento na UFSC, safra 1991/92, cujos resultados estão na tabela 2.8.

a) Construa a distribuição de frequência conjunta para as variáveis hábito de crescimento e porte. Resposta tabela 2.9.

b) Faça um gráfico para a distribuição de freqüência conjunta do item a). Resposta figura 2.8.

2.1.3.3 Exercícios Propostos

1. Um pesquisador está procurando verificar se existe associação entre local (1= Rio vermelho; 2= Costa da lagoa) e número de abortos para crianças do sexo feminino. Para esse fim foi feito um levantamento, cujos resultados estão apresentados na tabela 2.10 (*Obs:* A unidade de amostragem é uma família):

a) Construa a distribuição de freqüências conjunta para as variáveis local e número de abortos.

b) Faça um gráfico para a distribuição de freqüências conjunta do item a).

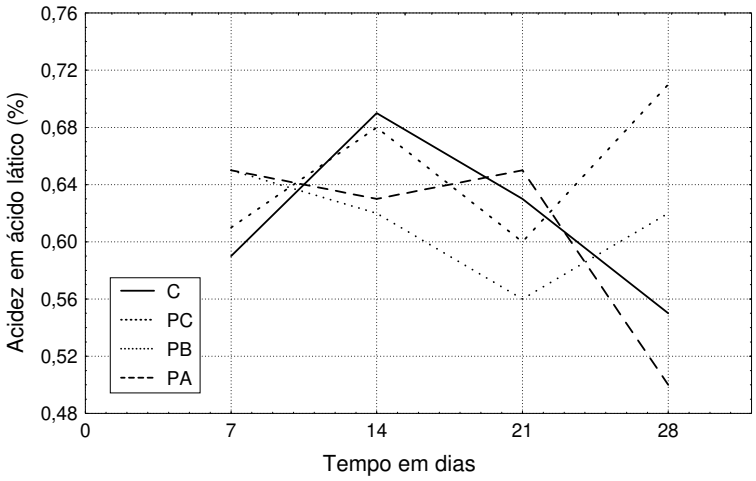


Figura 2.7: Comportamento da variável acidez em ácido lático (%) nos diversos tratamentos durante a maturação de salame tipo italiano,UFSC, 1992

Tabela 2.8: Hábito e porte para 50 materiais de feijão de vagem.

H	P	H	P	H	P	H	P	H	P
4	Tr	4	Tr	4	Tr	4	Pr	4	Tr
4	EB	4	Tr	4	Tr	4	Tr	3	Pr
3	Pr	3	Pr	3	Tr	4	Pr	3	Pr
4	Tr	3	Pr	4	Tr	3	Pr	3	Pr
4	Tr	3	Pr	4	Tr	4	Tr	4	Tr
4	Tr	3	EB	4	Tr	3	Pr	4	Tr
3	Pr	4	EB	4	Tr	4	Pr	4	Tr
3	EB	4	EB	4	Tr	3	Pr	4	Tr
4	Tr	4	Tr	3	Pr	4	Tr	3	Pr
4	Tr	4	Tr	4	Tr	4	Tr	4	Tr

Tabela 2.9: Distribuição conjunta do hábito de crescimento e porte na cultura do feijão de vagem, UFSC, 1991/92

Porte	Hábito de crescimento		Total
	3	4	
Trepador	1 6,3%	28 82,4%	29 58,0%
Ereto na base	2 12,5%	3 8,8%	5 10,0%
Prostrado	13 81,3%	3 8,8%	16 32,0%
Total	16 100,0%	34 100,0%	50 100,0%

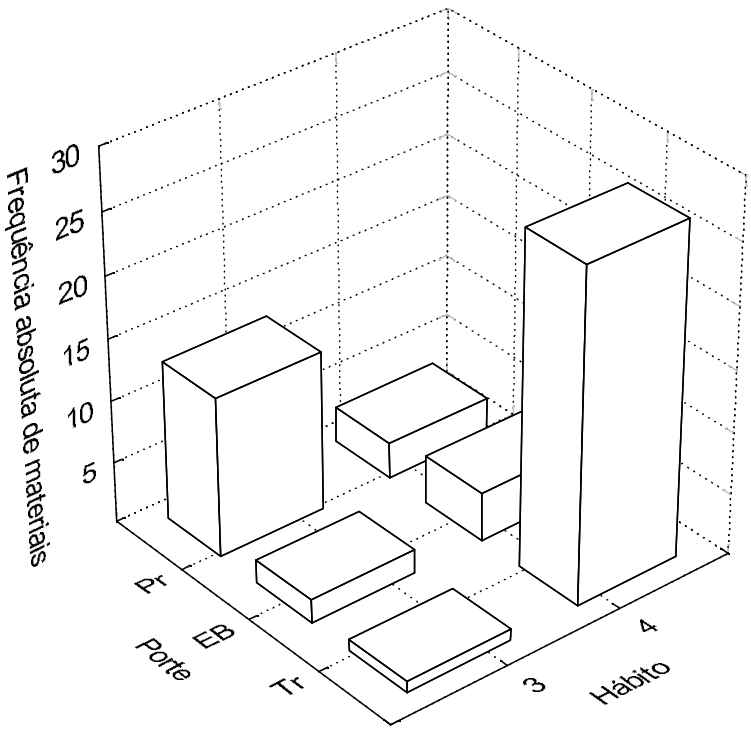


Figura 2.8: Gráfico da distribuição conjunta do item a).

Tabela 2.10: Resultados de um estudo sobre locais e ocorrência de aborto

Local	Aborto	Local	Aborto	Local	Aborto	Local	Aborto	Local	Aborto
2	0	2	0	2	0	1	1	1	0
2	0	2	1	2	0	1	1	1	0
2	1	2	1	2	1	1	1	1	0
2	0	2	1	2	1	1	0	1	0
2	0	2	1	2	2	1	2	1	0
2	0	2	1	2	0	1	1	1	0
2	0	2	0	2	0	1	0	1	0
2	2	2	0	2	0	1	0	1	0
2	2	2	0	2	0	1	0	1	0
2	0	2	0	2	1	1	0		
2	1	2	0	1	0	1	0		
2	1	2	0	1	0	1	0		
2	0	2	0	1	0	1	0		
2	0	2	0	1	1	1	0		

2. Um economista agrícola está estudando os fatores que afetam a adoção de uma nova variedade de arroz altamente produtiva. Os resultados obtidos estão na tabela 2.11.

a) Faça um gráfico para tabela 2.11, mostrando o comportamento da adoção segundo a situação de posse da terra (perfil linha). Faça a interpretação dos resultados.

3. Foi conduzido um experimento com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas cultivares de cebola: A) Bola Precoce-EMPASC 352 e B) Norte 14. Foram utilizadas para o teste de germinação, 4 repetições de 100 sementes, totalizando 400 sementes para cada cultivar. A variável de estudo é o número de sementes que germinam. Os resultados

Tabela 2.11: Distribuição conjunta de freqüências

Posse	Adoção		Total
	Adota	Não adota	
Proprietário	102	26	128
Vários arendatários	42	10	52
Único arendatário	5	2	7
Total	149	38	187

Tabela 2.12: Germinação de sementes para duas cultivares de cebola.

	Germinação		
Cultivares	Germinaram	Não germinaram	Total
Bola Precoce	392	8	400
Norte 14	381	19	400
Total	773	27	800

Tabela 2.13: Distribuição conjunta das variáveis local e peso de mexilhões

Local	Peso			Total
	[7;20)	[20;33)	[33;46)	
Mangue	21	12	2	35
Sambaqui	1	14	19	34
Total	22	26	21	69

obtidos estão na tabela 2.12. Faça um gráfico mostrando o comportamento das cultivares com relação à germinação das sementes. Faça a interpretação dos resultados.

4. A tabela 2.13 representa a distribuição conjunta das variáveis local de coleta e peso de mexilhões. Faça um gráfico para representar a distribuição conjunta. Obtenha uma conclusão relevante.

2.1.3.4 Tabelas de Contingência

É muito freqüênte nas Ciências Biológicas o interesse em verificar se duas variáveis qualitativas apresentam-se *associadas*, isto é, se o conhecimento de uma variável ajuda a entender uma outra variável. Construindo uma distribuição de freqüência conjunta das duas variáveis, ou seja, uma tabela de contingência, podemos satisfazer de forma exploratória esse objetivo. Vamos verificar que a simples construção da distribuição conjunta das freqüências será um poderoso instrumento para ajudar na compreensão dos dados. Como veremos, as tabelas construídas na seção anterior, são chamadas de tabelas de contingência e serão agora introduzidas formalmente.

Para se construir uma tabela de contingência, deve-se observar conjuntamente as duas variáveis nos elementos em estudo. Por exemplo, vamos observar para cada aluno, o grau de satisfação com o curso e o preparo dos professores. Se desejamos descrever a variável grau de satisfação com o curso, sabendo-se que a mesma tem associação com o preparo dos

Tabela 2.14: Distribuição conjunta de freqüências das variáveis A e B, observados em n elementos

	B				
A	B_1	B_2	...	B_r	TOTAIS
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1r}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2r}	$n_{2.}$
.	.	.	...	.	.
A_s	n_{s1}	n_{s2}	...	n_{sr}	$n_{s.}$
TOTAIS	$n_{.1} = \sum_{i=1}^{s} n_{i1}$	$n_{.2} = \sum_{i=1}^{s} n_{i2}$	...	$n_{.r} = \sum_{i=1}^{s} n_{ir}$	$n_{..} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} n_{ij}$

professores, fica mais fácil compreender a primeira variável.

Vamos considerar que a variável A tenha s categorias, $A_1, A_2, ..., A_s$ e a variável B tenha r categorias, $B_1, B_2, ..., B_r$. Por exemplo, a variável grau de satisfação com o curso tem 5 categorias, quais sejam: 1 - muito bom; 2 - bom; 3 - médio; 4 - baixo e 5 - muito baixo. A variável preparo dos professores também tem 5 categorias, no caso, idênticas à primeira variável.

Se observarmos as duas variáveis, A e B, em um grupo de n elementos, objetos ou pessoas, teremos uma classificação como a indicada na tabela 2.14, a qual é chamada de *tabela de contingência*.

Na tabela 2.14, n_{11} representa o número de elementos classificados na categoria A_1 e B_1 simultaneamente, em outras palavras, é a freqüência observada de elementos que pertencem a categoria A_1 e B_1 simultaneamente. Os valores $n_{i.} = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}$, $n_{.j} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}$ e $n_{..} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} n_{ij}$ representam os totais de linhas, colunas e o total geral, respectivamente.

Exemplo. Na tabela 2.15 apresenta-se a distribuição conjunta da resistência à ferrugem e tipo de grão para os 32 híbridos de milho.

Cada casela dá a frequência observada de híbridos que pertencem a categoria A_i e B_j, $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$, simultaneamente. Assim, observamos na casela (1;1), 5 híbridos resistentes à ferrugem e com o tipo de grão dentado, e assim por diante.

Observem que os totais de colunas nos fornece a distribuição de freqüências da variável resistência à ferrugem, enquanto os totais de linhas nos dão a distribuição de freqüências da variável tipo de grão. Tecnicamente estas distribuições são chamadas de *distribuições marginais*, então, temos a distribuição marginal da variável resistência à ferrugem (totais de

Tabela 2.15: Distribuição conjunta das freqüências das variáveis resistência à ferrugem e tipo de grão para 32 híbridos de milho, 1987/88.

Tipo de grão	Resistência à ferrugem[1]				Totais
	R	MR	MS	S	
Dentado	5	2	6	1	14
Semi-dentado	4	1	2	4	11
Semi-duro	1	3	1	2	7
Total	10	6	9	7	32

[1] R = resistente; MR = moderadamente resistente; MS = moderadamente susceptível; S = susceptível.

Tabela 2.16: Distribuição conjunta das percentagens das variáveis resistência à ferrugem e tipo de grão para 32 híbridos de milho, 1987/88.

Tipo de grão	Resistência à ferrugem[1]				Totais
	R	MR	MS	S	
Dentado	35,7	14,3	42,9	7,1	100,0
Semi-dentado	36,4	9,1	18,2	36,4	100,0
Semi-duro	14,3	42,8	14,3	28,6	100,0
Total	31,2	18,8	28,1	21,9	100,0

[1]R = resistente; MR = moderadamente resistente; MS = moderadamente susceptível; S = susceptível.

colunas) e a distribuição marginal do tipo de grão (totais de linhas), enquanto que a tabela toda representa a *distribuição conjunta* das duas variáveis.

Como os totais marginais da tabela 2.15 são diferentes, torna-se difícil fazer alguma interpretação. Para facilitar, podemos incluir as freqüências relativas, em porcentagem, que podem ser calculadas em relação aos totais de linhas, colunas ou em relação ao total geral. Os totais (linhas, colunas ou geral) em porcentagens são comparáveis, pois reduz-se as freqüências a um mesmo total.

A tabela 2.16 apresenta as porcentagens calculadas em relação aos totais de linhas. Sendo assim, vamos estudar a distribuição da resistência à ferrugem para cada um dos diferentes tipos de grãos (os perfis são as linhas).

Interpretação: observa-se, para os híbridos selecionados, um indicativo de *associação*

entre a resistência à ferrugem e o tipo de grão, pois, enquanto o tipo de grão semi-duro apresenta a menor porcentagem de resistência à ferrugem (14,3%), o tipo de grão semi-dentado apresenta a menor porcentagem de moderadamente resistentes (9,1%) e o tipo de grão dentado apresenta a menor porcentagem de híbridos suscetíveis à ferrugem (7,1%). Podemos verificar esta *associação* de outra forma. Observamos na amostra selecionada que 31,2% dos híbridos são resistentes (R) à ferrugem. Ora, se não existe associação (dependência) entre as variáveis, esperaríamos esta mesma porcentagem (31,2%) para todos os 3 tipos de grãos. Observamos, na amostra de híbridos, uma porcentagem de 35,7% para dentado, 36,4% para semi-dentado e 14,3% para semi-duro, este último resultado bastante abaixo dos 31,2% esperados. Isto nos leva a acreditar que realmente existe associação entre a resistência à ferrugem e o tipo de grão dos híbridos de milho amostrados.

Exercícios resolvidos

1. Para os dados da tabela 2.8 podemos considerar que o hábito está associado com o porte? justifique.

Sim, pois verificamos que para o hábito de crescimento 3, 81,3% dos materiais apresentam porte prostrado. Por outro lado, para hábito 4, 82,4% dos materiais apresentam porte trepador. Procure entender esta associação através do gráfico da figura 2.8

2. Os dados da tabela de contingência 2.17 tem por objetivo analisar a segregação dos dados de uma progênie de uma espécie "X" segregando para dois fatores: precocidade e virescência (tipo de deficiência de clorofila). Sabe-se que a precocidade é recessiva em relação à ciclo tardio e é controlada, neste caso, por um par de genes. O tipo virescente também é recessivo em relação ao normal e controlado por um par de genes.

a) Fixe os totais de colunas em 100%. Resposta tabela 2.17.

b) Faça um gráfico para a tabela, verificando a distribuição da precocidade segundo a virescência (perfil coluna). Resposta figura 2.9.

c) Os dois pares de genes são herdados independentemente ou há evidência de associação? justifique com apresentação de valores. Existe uma associação fraca entre as variáveis, pois para virescência normal observa-se que 77,11% apresentam precocidade tardia. Observa-se quase a mesma porcentagem (75,83%) para virescente e tardio. Portanto, não houve uma mudança razoável quando mudamos de nível de virescência, indicando associação fraca.

3. A tabela de contingência 2.18 refere-se ao número de pássaros de uma particular espécie, classificados de acordo com duas variáveis qualitativas, que são: 1º) local da floresta e 2º) estação do ano. Os pássaros foram observados alimentando-se de acordo com as duas variáveis. Um pesquisador levantou a hipótese (no início do trabalho), de que os pássaros alimentam-se nestes 3 locais da floresta nas mesmas proporções na primavera e no outono.

Tabela 2.17: Segregação de dois caracteres numa progênie da espécie "X"

Precocidade	Virescência				Total	
	Normal		Virescente			
Tardio	3470	77,11%	910	75,83%	4380	76,84%
Precoce	1030	22,89%	290	24,17%	1320	23,16%
Total	4500	100,00%	1200	100,00%	5700	100,00%

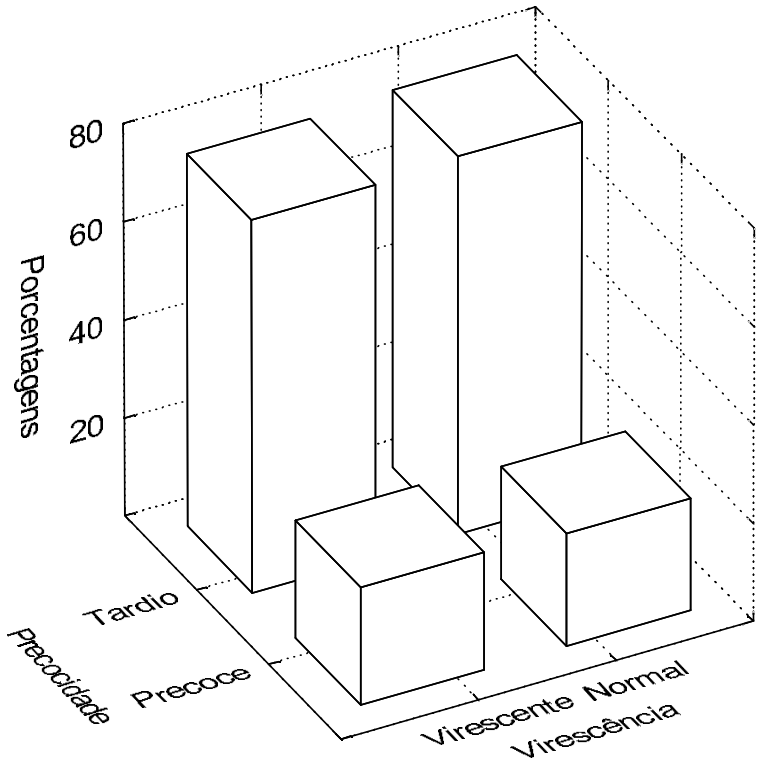


Figura 2.9: Distribuição da precocidade segundo a virescência

Tabela 2.18: Distribuição conjunta das variáveis local e estação

Estação	Local da Floresta						Total	
do ano	Árvores		Arbusto		Chão			
Primavera	30	50,8%	20	33,9%	9	15,3%	59	100,0%
Outono	13	21,3%	22	36,1%	26	42,6%	61	100,0%
Total	43	35,8%	42	35,0%	35	29,2%	120	100,0%

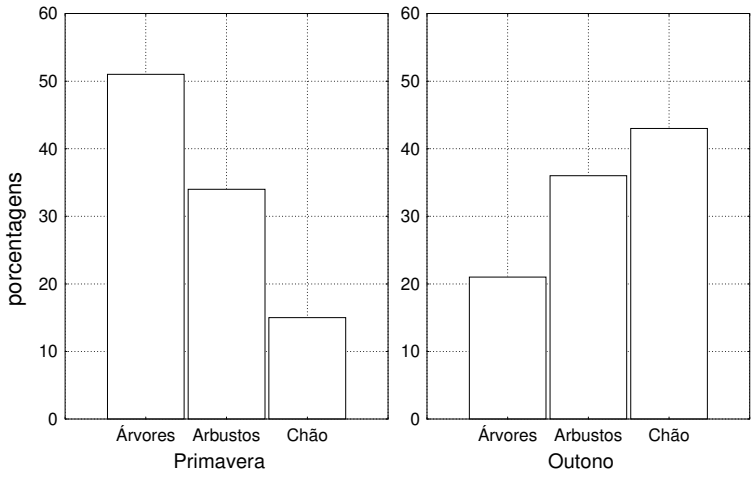


Figura 2.10: Associação entre local e estação

Em outras palavras, o pesquisador formulou a hipótese de que não existe associação entre as duas variáveis. Você aceita ou rejeita a hipótese formulada pelo pesquisador? justifique. Resposta: rejeitamos a hipótese formulada. Na primavera 50,8% dos pássaros alimentam-se nas árvores, enquanto que no outono, o comportamento muda, isto é, a maior porcentagem (42,6%) alimentam-se no chão. Faça um gráfico de barras múltiplo para representar os dados da tabela acima e visualizar esta associação. Resposta na figura 2.10.

2.1.3.5 Exercícios Propostos

1. Um economista está estudando os fatores que afetam a adoção de uma nova variedade de arroz altamente produtiva. Ele deseja saber se a adoção é afetada pela situação de posse da terra. Os resultados obtidos numa amostra de 187 agricultores estão organizados na tabela de contingência 2.11. O que o economista pode concluir?

2. Um estudo é realizado a fim de avaliar a eficiência de uma nova vacina antigripal, a qual foi administrada aos membros de uma pequena comunidade. A vacina foi administrada em duas doses, ao longo de duas semanas. Algumas pessoas tomaram as duas doses, outras tomaram apenas a $1^{\underline{a}}$ dose e outras não tomaram qualquer dose. A tabela 2.19 mostra os resultados obtidos para um total de 1000 habitantes dessa comunidade. Esses dados apresentam uma evidência suficiente para garantir que tal vacina foi bem sucedida, reduzindo o número de casos de gripe nessa comunidade? Em outras palavras, verifique se existe associação nesta tabela. Justifique com valores de proporções obtidas fixando-se os totais de linhas em 100%.

3. Utilizando os dados da tabela 2.19, responda:

a) faça um gráfico para a distribuição conjunta das porcentagens obtidas no exercício 2;

Tabela 2.19: Distribuição conjunta das variáveis

Estado	Vacinação			Total
de saúde	Não-vacinados	Uma dose	Duas doses	
Gripados	24	9	13	46
Não-gripados	289	100	565	954
Total	313	109	578	1000

b) calcule a proporção de não-vacinados entre os indivíduos não-gripados;
c) calcule a proporção de não-gripados e que usaram duas doses de vacina.

4. De acordo com os dados da tabela 2.10, podemos dizer que a ocorrência de aborto está associada com o local? Justifique.

5. Com os dados da tabela 2.12, verifique se existe dependência (associação) entre as cultivares e a germinação de sementes. Justifique.

6. Para os resultados da tabela 2.13 você concluiria que o peso está associado com o local? Justifique com os dados de percentagens.

7. Faça um gráfico para a tabela 2.16 e observe a associação existente entre o tipo de grão e a resistência à ferreugem.

2.1.3.6 Coeficiente de Contingência de Pearson

Vamos agora pensar que estamos interessados em obter uma medida estatística que indique se existe ou não relação entre duas variáveis e qual a magnitude desta, isto é, a grandeza da associação. Aqui, desejamos fazer um estudo da associação ou dependência entre duas variáveis categorizadas. No caso de estarmos trabalhando com variáveis quantitativas, estas podem ser transformadas em variáveis categorizadas. Exemplo de categorização de uma variável quantitativa: seja a variável rendimento de uma variedade transformada em três categorias:$<$ 1500 kg/ha (rendimento baixo), $\geq$ 1500 e $\leq$ 3000 (rendimento normal) e $>$ 3000 (rendimento alto).

Uma medida de associação que pode ser utilizada nesse caso é o *coeficiente de contingência de Pearson*, representado pela letra C^*. Podemos através deste coeficiente, por exemplo, verificar a grandeza da associação entre o local da floresta onde os pássaros se alimentam e a estação do ano, veja tabela 2.18. Outro exemplo, verificar a magnitude da associação entre a adoção de tecnologia e a situação de posse da terra, veja a tabela 2.11.

Antes de passarmos ao estudo detalhado do cálculo do coeficiente de contingência de Pearson, vamos, sem muitos detalhes, citar e indicar os cálculos de outras duas estatísticas

para o estudo de associação.

A primeira delas é o coeficiente de associação de Yule, para tabelas 2×2, dado por:

$$Q = \frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}{(f_{11}f_{22} + f_{12}f_{21})},$$

que varia de -1 a 1, onde, f_{11} representa a freqüência de ocorrência da categoria 1 da variável A e a categoria 1 da variável B, e assim para os demais termos. Por exemplo, para a tabela 2.17 temos:

$$Q = \frac{(3470.290 - 910.1030)}{(3470.290 + 910.1030)} = \frac{69000}{1943600} = 0,04.$$

Concluimos que existe uma associação muito fraca entre as duas variáveis, pois o valor de Q é próximo de zero.

Um outro coeficiente é o de Cramér, para tabelas $l \times c$ (l = número de linhas e c = número de colunas da tabela), dado por:

$$V = \sqrt{\chi^2/n(min(l-1, c-1))},$$

que varia de 0 (zero) a 1;onde $min(l-1, c-1)$ é o mínimo entre o número de linhas(l) menos 1 e o número de colunas(1) menos 1; n é o total geral de freqüências da tabela; a estatística χ^2, leia-se Qui-Quadrado, será mostrada em detalhes ainda nesta subseção. Para os dados da tabela 2.18, temos $V = 0,3541$. De acordo com este coeficiente, a associação entre as duas variáveis é moderada para fraca.

Como foi dito inicialmente, a construção da distribuição conjunta das freqüências, nos ajuda bastante na interpretação dos resultados. Na tabela 2.18, temos a distribuição conjunta de freqüências das variáveis local da floresta e estação do ano. Observe que para facilitar a interpretação dos resultados, os totais de linhas foram fixadas em 100%. A interpretação já foi feita anteriormente e o resultado foi um indicativo de associação entre o local da floresta e a estação do ano. Vamos, agora, utilizar este exemplo para mostrar todos os passos no cálculo do coeficiente de contingência de Pearson.

Independência de Variáveis

Quando se constroi uma distribuição conjunta de freqüências, um dos principais objetivos, é procurar estabelecer a associação existente entre as variáveis, isto é, desejamos conhecer o grau de dependência entre as variáveis, pois conhecendo o grau de dependência entre elas, podemos prever o melhor resultado de uma variável sabendo-se o resultado da outra. Por exemplo, se desejamos saber o local da floresta onde os pássaros se alimentam, se nos tivermos informação sobre a estação do ano, vamos ter condições de estimar com maior precisão o

local onde os pássaros se alimentam, pois existe uma dependência entre o local da floresta e a estação do ano.

A dependência não é no sentido de que uma *determina* a outra. Por exemplo, num estudo para verificar se existe associação entre a satisfação com o emprego e os salários percebidos, não significa que melhorando as condições de trabalho (satisfação), vai melhorar os salários.

Em primeiro lugar, observamos que, independentemente da estação do ano, 35,8% dos pássaros se alimentam nas árvores, 35% nos arbustos e 29,2% no chão.

Ora, se existe independência entre o local da floresta e a estação do ano, esperamos estas mesmas porcentagens para cada categoria da estação do ano. Comparando-se as frequências, podemos interpretar que existe dependência entre as variáveis.

Quando existe dependência entre as variáveis é interessante conhecer a magnitude dessa associação, ou seja, conhecer se a associação é fraca, moderada ou forte. Portanto, é importante termos uma medida de associação entre variáveis categorizadas.

Medida de Associação Entre Duas Variáveis Categorizadas

Trataremos do coeficiente de contingência de Pearson, representado pela letra C^*, que descreve num único número a dependência entre duas variáveis.

Teoricamente este valor varia entre 0 (zero) e 1 (um), $0 \leq C^* \leq 1$, sendo nulo quando as variáveis são independentes. Quando existe uma associação perfeita entre as duas variáveis, o coeficiente de contingência de Pearson vale 1.

Para o cálculo do coeficiente é necessário, em primeiro lugar, calcularmos uma outra estatística, chamada de Qui-Quadrado, e representada pela letra grega χ elevada a potência 2. Então, passamos de imediato ao cálculo do χ^2, através do exemplo da tabela 2.18.

Na hipótese de independência, esperamos para local da floresta árvores e estação primavera, $59 \times 0,358 = 21,122$ pássaros; para local da floresta árvores e estação outono, esperamos $61 \times 0,358 = 21,838$ pássaros, e assim para todas as caselas restantes da tabela. Um modo prático de se encontrar as *freqüências esperadas* sob a hipótese de independência, é dado por:

$$fe_{11} = \frac{n_{1.}n_{.1}}{n..} = \frac{59 \times 43}{120} = 21,141.$$

A notação fe_{11} indica a freqüência esperada para a estação primavera (linha 1) e local árvores (coluna 1). Se o leitor não está lembrado desses índices, veja novamente a tabela 2.14.

Para a casela 21, isto é, estação outono (linha 2) e local árvores (coluna 1), temos:

$$fe_{21} = \frac{n_{2.}n_{.1}}{n..} = \frac{61 \times 43}{120} = 21,858.$$

Tabela 2.20: Frequências observadas e esperadas sob a hipótese de independência

Estação	Local da Floresta			Total
do ano	Árvores	Arbusto	Chão	
Primavera	30 21,14	20 20,65	9 17,21	59
Outono	13 21,86	22 21,35	26 17,79	61
Total	43	42	35	120

Tabela 2.21: Desvios entre as frequências observadas e esperadas, no caso de independência das variáveis

Estação	Local da Floresta		
do ano	Árvores	Arbusto	Chão
Primavera	8,86	-0,65	-8,21
Outono	-8,86	0,65	8,21

A diferença verificada na segunda casa decimal entre os dois procedimentos de cálculo é devido à aproximações. Fazemos a mesma operação para as demais caselas. Todas as freqüências observadas e esperadas sob a hipótese de independência, estão demonstradas na tabela 2.20. Encontre esses valores. Observando-se a tabela 2.20 podemos verificar as discrepâncias existentes entre os valores observados e esperados caso as variáveis fossem independentes. Na tabela 2.21, apresentamos os desvios entre os valores observados e os esperados. A estatística Qui-Quadrado (χ^2), que é uma medida de afastamento global da hipótese de independência, isto é, quanto maior o valor do χ^2, maior será o grau de associação entre as duas variáveis, é calculado através da seguinte expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{lc} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \tag{2.1}$$

onde, o_i é a freqüência observada da i-ésima casela; e_i é a freqüência esperada da i-ésima casela; l é o número de linhas e c é o número de colunas. Para o exemplo, temos:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{8,86^2}{21,14} + \frac{-0,65^2}{20,65} + \frac{-8,21^2}{17,21} + \frac{-8,86^2}{21,86} + \frac{0,65^2}{21,35} + \frac{8,21^2}{17,79} \\ &= 3,7133 + 0,0205 + 3,9166 + 3,5910 + 0,0198 + 3,7889 \\ &= 15,0501. \end{aligned}$$

É fácil perceber que se $\chi^2 = 0$, as duas variáveis são independentes e que se $\chi^2 > 0$ indica

associação das variáveis. O valor de Qui-Quadrado não possui um limite superior, pois varia de 0 (zero) a $+\infty$ (mais infinito). Na seção 8.5.2 iremos fazer o teste de qui-quadrado, que é um teste confirmatório, no sentido de poder afirmar se existe ou não associação significativa (estatisticamente comprovada) entre as variáveis.

Descritivamente, Karl Pearson propôs o chamado coeficiente de contingência, representado pela letra C, definido por:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}, \tag{2.2}$$

onde n é o número total de observações. Para o exemplo em estudo temos:

$$C = \sqrt{\frac{15,0501}{15,0501 + 120}} = 0,3338,$$

indicando que existe associação, porém podemos dizer que a associação é fraca.

Quando existe uma associação perfeita, esse coeficiente não atinge o valor 1, por isso, foi sugerido uma correção, a qual consiste em calcular,

$$C^* = \frac{C}{\sqrt{(t-1)/t}}, \tag{2.3}$$

onde t é o mínimo entre o número de colunas e o número de linhas da tabela de contingência. Para o exemplo, onde $t = 2$, temos:

$$C^* = \frac{0,3338}{\sqrt{(2-1)/2}} = 0,4721.$$

Agora, temos uma associação moderada entre as variáveis. Devemos considerar as variáveis como moderadamente associadas.

Exercício resolvido

1. Para os dados da tabela 2.9, obter o coeficiente de contingência de Pearson e interpretar.

O valor de qui-quadrado é:

$$\chi^2 = 7,3877 + 3,4766 + 0,1000 + 0,0470 + 12,1278 + 5,7072 = 28,8464.$$

O valor do coeficiente de confingência é:

$$C = \sqrt{\frac{28,8464}{28,8464 + 50}} = 0,6049.$$

Portanto, com a correção temos:

$$C^* = \frac{0,6049}{\sqrt{1/2}} = 0,8554.$$

Conclusão: existe forte associação entre hábito e porte.

2.1.3.7 Exercícios Propostos

1. Com os dados da tabela 2.10, calcule o coeficiente de contigência de Pearson e conclua.
2. Com os dados da tabela 2.8, calcule o coeficiente de contigência de Pearson e conclua.
3. Com os dados da tabela 2.12, calcule o coeficiente de contingência de Pearson e interprete.
4. Calcule o coeficiente de contingência de Pearson e o de Cramér para os dados da tabela 2.13. Faça a interpretação.

2.1.3.8 Distribuições de Freqüências de Variáveis Quantitativas: Diagrama de Pontos, Gráfico de Colunas e Histograma

Inicialmente faremos uma breve introdução sobre o estudo de distribuições de frequências para variáveis aleatórias quantitativas e, após, discutiremos as técnicas para este estudo.

Quando a variável em estudo é quantitativa, discreta ou contínua, as principais características a serem observadas numa distribuição de frequências são:

1. *valor típico ou representativo*, que como o próprio nome indica, corresponde a escolha de um único valor para representar todo o conjunto de valores;

2. *assimetria*, por exemplo, no estudo da distribuição da renda (em número de salários mínimos) das famílias brasileiras, a grande maioria das famílias apresentam baixo rendimento familiar, enquanto que uma minoria apresenta altos rendimentos, isto provoca uma cauda longa à direita da distribuição, tornando-a assimétrica, veja figura 2.37;

3. *dispersão*, é uma medida da concentração dos dados em torno do valor típico. É necessário ter um valor referência para poder compará-lo;

4. *valores discrepantes ou "outliers"*, são valores muito pouco prováveis de ocorrerem na distribuição, algumas vezes são valores que se distanciam demais dos outros. É importante realizar um estudo para saber a razão da ocorrência desses valores, pode-se citar 3 principais causas: 1) erro de transcrição de dados; 2) algum fato importante ocorreu durante o trabalho e 3) o valor é verdadeiro e deve ser considerado como tal;

5. *formação de subgrupos*, por exemplo, ao estudar-se a distribuição das alturas dos alunos, pode-se chegar a conclusão que existem dois grupos, formados de acordo com o sexo.

No caso do estudo de distribuições de frequências de variáveis quantitativas podemos estabelecer duas situações, quais sejam:

- 1º) a variável é contínua, nesse caso, é necessário a criação de classes de ocorrências, pois não existem ou são poucos os valores que se repetem. Observação: quando temos poucos valores, isto é, o nosso conjunto de valores não é grande, em torno de 25, a distribuição pode ser representada por meio de um *diagrama de pontos*, ou seja, cada observação corresponde a um ponto na reta dos reais. Esta técnica será mostrada em seguida.

- 2º) a variável é discreta, nesse caso, temos duas situações: a) quando temos poucos resultados diferentes da variável, fazemos a contagem dos dados para cada valor da variável. Exemplos, o número de plantas sadias de mandioca colhidas na área útil da parcela (área de 19,44 m^2) varia no intervalo de 23 a 27 plantas (5 valores diferentes), número de grãos por vagem de soja. Nesse caso diz-se que não há perda de informação e as distribuições de frequências são feitas de forma idêntica às variáveis qualitativas (categorizadas). Também pode-se fazer o diagrama de pontos; b) quando temos muitos valores diferentes da variável procedemos de forma idêntica ao de variável contínua, isto é, vamos criar faixas de ocorrência. Por exemplo, ciclo da cultura de 150 genótipos de feijão.

Passamos, agora, ao estudo da construção das distribuições de frequências para variáveis aleatórias quantitativas. Os métodos abordados são: Diagrama de Pontos, Dados Agrupados em Classes e Ramo-e-Folhas.

Diagrama de Pontos

Quando temos poucas observações de uma variável em estudo (até aproximadamente 25), a distribuição pode ser representada por um diagrama de pontos, isto é, cada observação corresponde a um ponto na reta dos números reais. É possível representar duas ou mais distribuições no mesmo diagrama, para isso basta identificar cada distribuição por um símbolo diferente (criar uma legenda). A figura 2.11 ilustra esse diagrama com os pesos ao nascer de 24 bezerros machos das raças Charoleza e Gir, em kg. Os dados para as duas raças são:

Charoleza	47	45	37	41	46	47	34	25	40	45	48	40
Gir	40	43	44	46	48	51	54	55	56	57	55	54

Interpretação do diagrama de pontos:

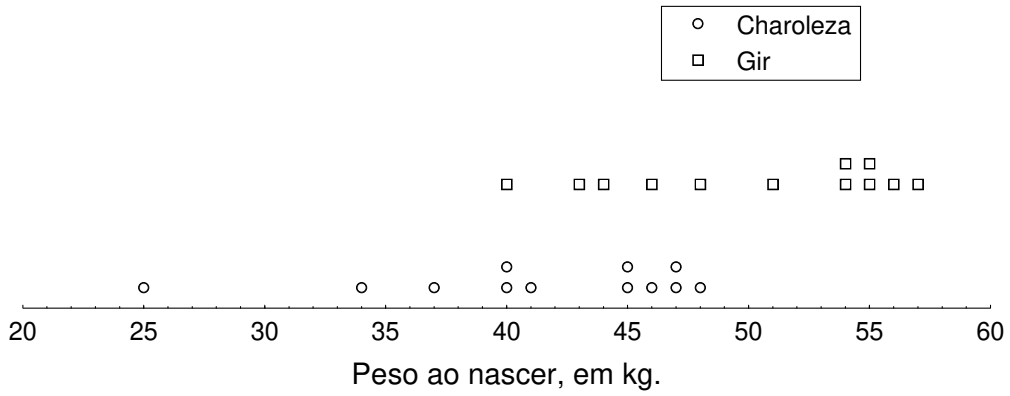


Figura 2.11: Distribuição de freqüências do peso ao nascer de bezerros da raça Charoleza e Gir (kg)

- Observamos que os pesos ao nascer de bezerros da raça Charoleza são menos dispersos (estão mais próximos) do que a raça Gir. Portanto, os bezerros da raça Charoleza são mais homogêneos quanto ao peso ao nascer.

- Ambas as distribuições são assimétricas à esquerda, pois temos poucos valores e mais espalhados no lado esquerdo das distribuições, isso gera uma cauda mais longa à esquerda.

- Os valores representativos para as raças Charoleza e Gir são, 42 kg e 53 Kg, respectivamente. Estes valores dividem as distribuições aproximadamente ao meio, por exemplo, existem 6 pontos abaixo de 42 e 6 pontos acima de 42.

- O valor 25 kg, na raça Charoleza, está bem afastado do restante da distribuição, assim, podemos considerá-lo como um valor discrepante.

- Não observamos formação de subgrupos em nenhuma das distribuições (raças).

Exercício resolvido

1. Para comparar o ganho médio de peso, GMP, em gramas por dia, de porcos submetidos a duas dietas diferentes, D_1 e D_2, foi conduzido um experimento com 20 porcos. Dez porcos

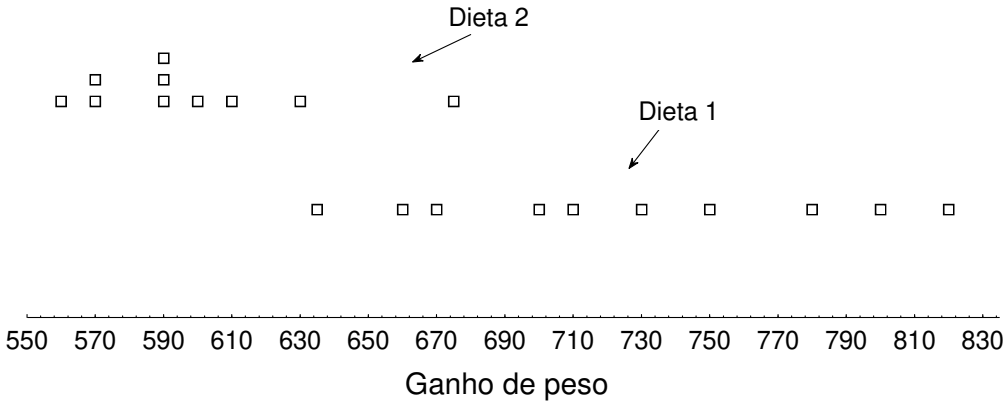


Figura 2.12: Diagrama de pontos para duas dietas de porcos

foram submetidos a cada uma das dietas. Os resultados para esse experimento foram:

Dieta 1		Dieta 2	
635	820	675	600
780	670	570	610
660	580	590	560
610	700	590	630
710	570	590	570

Construir um diagrama de pontos para verificar se existe evidência de diferenças entre os dois tratamentos (dietas). O diagrama de pontos é dado na figura 2.12. Conclua para as duas dietas quanto à dispersão, assimetria, valores representativos e discrepantes.

A dieta 1 apresenta maior dispersão do que a dieta 2. A dieta 2 apresenta assimetria à direita (tem uma cauda mais longa para a direita), enquanto que a dieta 2 é aproximadamente simétrica. Os valores representativos são 715 e 590, para as dietas 1 e 2, respectivamente. O valor 675, na dieta 2, está mais afastado da distribuição dos demais valores. Os dados indicam que a dieta 1 é superior a dieta 2. Para fazermos uma afirmação sobre a diferença entre duas médias devemos realizar um teste de hipóteses, que será tratado no capítulo 8.

Exercícios propostos

1. Os dados da tabela 2.22 correspondem à variável número de brotos por explante de abacaxi avaliada em dois meios de cultura (dois tratamentos). Construir um diagrama de pontos e comparar os dois meios de cultura quanto à:

a) dispersão;

b) assimetria;

c) valores representativos;

Tabela 2.22: Número de brotos por explante de abacaxi

Meio 1	47	35	23	21	23	26	18
	30	22	36	22	21	19	
Meio 2	13	11	15	24	20	20	19
	18	22	22	20	17	25	

Tabela 2.23: Distribuição de frequências e proporções (em %) do número de plantas sadias de mandioca, Chapecó, SC, 1984

Número de plantas	Frequência	Proporção	Porcentagem	Porcentagem acumulada
23	1	0,0333	3,33	3,33
24	3	0,1000	10,00	13,33
25	4	0,1333	13,33	26,67
26	8	0,2667	26,67	46,67
27	14	0,4667	46,67	100,00
TOTAL	30	1,0000	100,00	

d) valores discrepantes;

e) formação de subgrupos.

Distribuição de Freqüências de Variáveis Discretas Sem Perda de Informação

A construção de distribuições de freqüências de variáveis discretas, quando os diferentes valores observados da variável não são muitos, é feita de forma idêntica às variáveis qualitativas (categorizadas). Vamos fazer a contagem para cada valor observado da variável em estudo. Como exemplo, vamos estudar a distribuição do número de plantas sadias de mandioca colhidas na área útil da parcela. As freqüências e porcentagens são dadas na tabela 2.23. Na primeira coluna da tabela temos os valores observados da variável, quais sejam: 23, 24, 25, 26 e 27.

Representação Gráfica de Variáveis Discretas Sem Perda de Informação

Nesse caso, podemos citar os gráficos de ordenadas e os gráficos de colunas. A seguir apresentamos os dois tipos de gráficos, figuras 2.13 e 2.14, para o exemplo do número de plantas sadias de mandioca (Tabela 2.23)

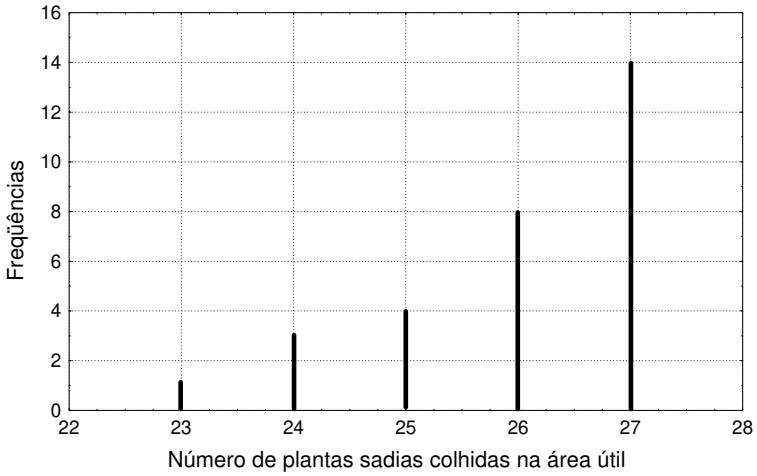


Figura 2.13: Diagrama de ordenadas do número de plantas sadias de mandioca

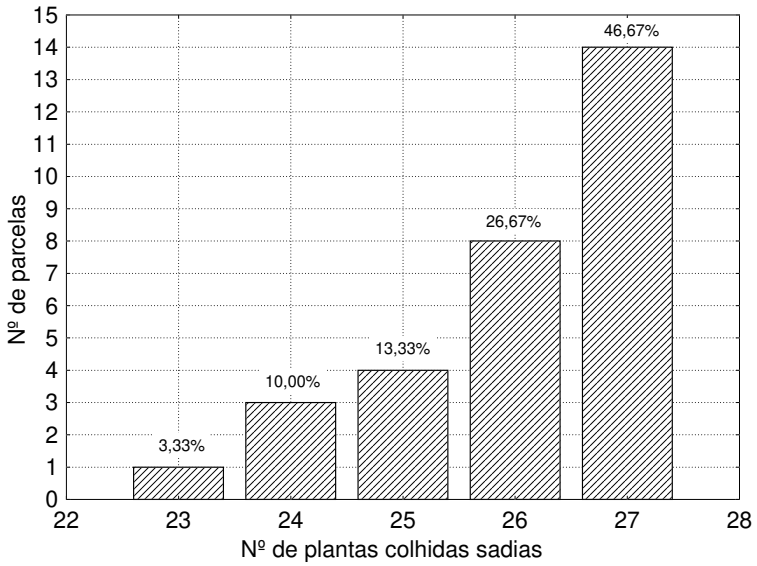


Figura 2.14: Gráfico de colunas do número de plantas sadias de mandioca, Chapecó, SC, 1984

Observamos que 47% das unidades experimentais (parcelas) deram como resultado 27 plantas sadias (total de plantas/unidade); somente 3% das unidades apresentaram como resultado 23 plantas sadias. A distribuição é assimétrica à esquerda (cauda longa para o lado esquerdo da distribuição). Um valor representativo seria o 27. Não observamos valores discrepantes. Não faremos uma conclusão para a dispersão pois não temos duas ou mais distribuições para comparação.

Exercício proposto

1. Deseja-se estudar o comportamento da variável número de ovos inviáveis de *Biomphalaria taenagophila* (caramujo) em ambiente poluído. Para isso tomou-se uma amostra de 23 caramujos, obtendo-se os seguintes resultados:

9	11	10	0	4	4	5	12	4	1	2	8
4	7	1	11	10	3	14	3	2	28	4	

Faça uma representação gráfica para os dados (gráfico de ordenadas ou de colunas). Faça a interpretação do gráfico.

Dados Agrupados em Classes

Quando temos muitas observações de uma variável quantitativa em estudo (acima de 25), é recomendável a formação de intervalos de valores, isto é, construir classes de ocorrências. Por exemplo, uma classe pode ser de 8 a 16 cm de comprimento de camarão. Quanto ao número de classes que deve ser usado, existe alguma recomendação. Este número não poderá ser muito grande (maior que 15) e nem muito pequeno (menor que 5). Mas também não há um rigor muito grande quanto ao número de classes a ser usado. Pode-se deixar como compromisso do pesquisador decidir sobre o número de classes a ser usado. Ninguém melhor do que a pessoa que conhece o fenômeno em estudo para decidir sobre a melhor representação da distribuição. Sempre que for possível, recomenda-se utilizar classes com a mesma amplitude.

Os dados da tabela 2.24 referem-se aos rendimentos médios, em kg/ha, de 32 híbridos de milho recomendados para a região Oeste Catarinense. Vamos considerar estes dados para ilustrar a construção da distribuição de freqüências em classes. As classes podem ser definidas de acordo com resultados lógicos da variável, por exemplo, definir 5 classes com amplitudes de 500 kg. Outra forma é decidirmos pelo número de classes a ser utilizado e, a seguir, fazer a divisão da amplitude total dos dados pelo número de classes, sendo que, o resultado encontrado será a amplitude de cada classe. Por exemplo, amplitude total dos dados da tabela 2.24 é $\triangle = 6388 - 3973 = 2415$ kg/ha. Se desejamos ter 5 classes, isso

Tabela 2.24: Rendimentos médios, em kg/ha, de 32 híbridos de milho, região Oeste, 1987/88

3973	4660	4770	4980	5117	5403	6166
4500	4680	4778	4993	5166	5513	6388
4550	4685	4849	5056	5172	5823	
4552	4760	4960	5063	5202	5889	
4614	4769	4975	5110	5230	6047	

Tabela 2.25: Distribuição de freqüências de 32 híbridos de milho recomendados para o Oeste Catarinense, 1987/88

Rendimento médio	Freqüência absoluta	Freqüência acumulada	Freqüência relativa	Freq. rel. acumulada	Porcentagem	Porcentagem acumulada
3973 ⊢ 4456	1	1	0,0313	0,0313	3,13	3,13
4456 ⊢ 4939	12	13	0,3750	0,4063	37,50	40,63
4939 ⊢ 5422	13	26	0,4063	0,8126	40,63	81,26
5422 ⊢ 5905	3	29	0,0937	0,9063	9,37	90,63
5905 ⊢ 6388	3	32	0,0937	1,0000	9,37	100,00
TOTAL	32		1,0000		100,00	

implica que a amplitude de cada classe será igual a $\triangle_i = 2415/5 = 483$ kg/ha. Veja a primeira coluna da tabela 2.25. Nesta tabela temos a distribuição de freqüências completa da variável em estudo.

A freqüência absoluta ou simplesmente freqüência de classe (segunda coluna da tabela), representada por n_i, é o número indicativo da quantidade de valores, indivíduos, itens, elementos, etc. pertencentes a essa classe. A freqüência absoluta acumulada de uma classe é a soma da freqüência dessa classe com as freqüências das classes anteriores (coluna 3). A freqüência relativa ou proporção, representada por f_i, é definida pelo quociente da freqüência absoluta da classe e o número total de observações, ou seja, $f_i = n_i/n$, onde $n = 32$ (coluna 4). Também temos a freqüência relativa acumulada, calculada da mesma forma que a freqüência absoluta acumulada (coluna 5). A porcentagem (coluna 6) é a forma que a maioria das pessoas entendem, é mais explícito, tem maior êxito, e é simplesmente a multiplicação das proporções por 100, isto é, $100 \times f_i$. Da mesma forma podemos ter as freqüências percentuais acumuladas (coluna 7).

A representação gráfica dessas distribuições recebe um nome especial, *histogramas*, e é mostrado na figura 2.15. É um gráfico de colunas justapostas em que a altura de cada coluna

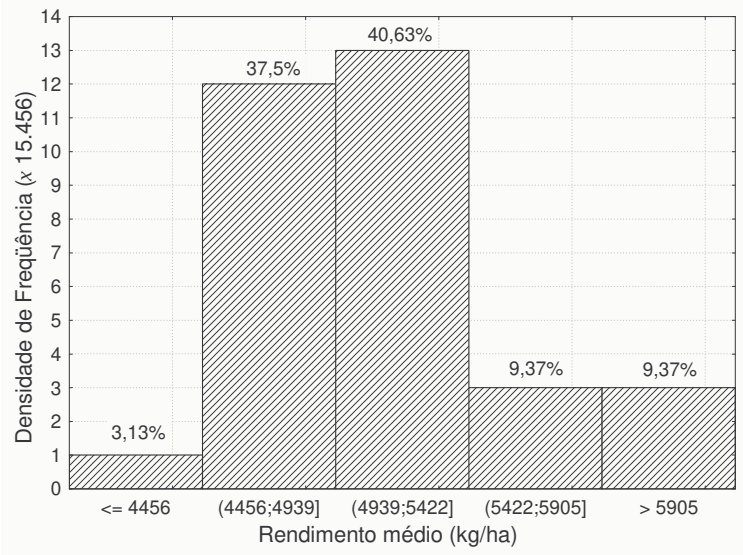


Figura 2.15: Histograma dos rendimentos médios, em kg/ha, de 32 híbridos recomendados para o Oeste Catarinense, 1987/88

é proporcional a freqüência absoluta ou porcentagem de ocorrências da classe, de modo que a soma das áreas dos retângulos seja igual a 1 ou 100%. A altura de cada retângulo é denominada de densidade de freqüência e é dada por:

$$d_i = \frac{n_i}{n \times \triangle_i}.$$

No exemplo da figura 2.15 temos $n \times \triangle_i$=$32 \times 483 = 15.456$, para todas as classes, pois estas apresentam a mesma amplitude. Para a classe 2, $d_2 = 12/(15.456) = 0,000776$.

As amplitudes de classes nem sempre são iguais para todas as classes da mesma distribuição de freqüência. As vezes isto ocorre pela própria natureza da pesquisa. Por exemplo, deseja-se discrimar melhor os baixos salários; ou as idades menores da primeira relação sexual de jovens. Neste caso, é necessário tomar alguns cuidados com a análise e construção do histograma, pois os $\triangle_i$ assumem valores diferentes. Deve-se usar os valores da densidade de freqüência no eixo das ordenadas, também conhecido como eixo dos $Y's$. Não é possível fazer-se uma interpretação de um valor específico da densidade de freqüência, pois como o nome indica, só faz sentido verificar-se o comportamento dentro de um intervalo ou no geral.

Uma representação gráfica alternativa ao histograma é o *polígono de freqüências*, e o seu uso é particularmente importante quando deseja-se comparar duas ou mais distribuições, pois é possível representar-se diversas distribuições no mesmo gráfico. Para construir um polígono de freqüências basta colocar num gráfico os pares $(n_i; s_i)$, e uní-los com uma linha, onde s_i corresponde ao ponto médio da $i-$ésima classe. Por exemplo, o ponto médio da

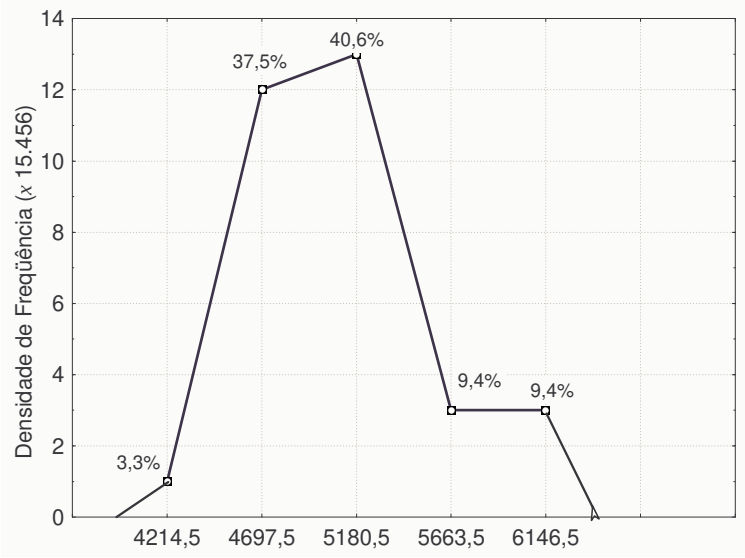


Figura 2.16: Polígono de freqüências dos rendimentos médios, em kg/ha, de 32 híbridos recomendados para o Oeste Catarinense, 1987/88

primeira classe, s_1, é igual a (4456+3973)/2=4214,5, portanto, o par $(n_1; s_1)$ é dado por $(1; 4214,5)$. Usar o mesmo procedimento para os 4 pares restantes. Esse gráfico para a variável rendimento de grãos de híbridos de milho é mostrado na figura 2.16.

Interpretação. A interpretação pode ser feita através da tabela de distribuição de freqüências, histograma ou do polígono de freqüências. A maioria dos híbridos (78%), apresentam uma produção entre 4456 e 5422 kg/ha. Um valor representativo para esses dados seria 5000 kg/ha. Temos aproximadamente 50% dos valores abaixo de 5000 kg/ha, conseqüentemente, 50% acima deste valor. Existe uma tendência dos dados se concentrarem próximo ao valor representativo e, a medida que se afastam do valor típico, a concentração diminui. A distribuição dos dados apresenta uma pequena assimetria à direita, pois a cauda à direita é um pouco mais longa. Desconsiderando o valor 3973 kg/ha, a amplitude de variação dos valores está dentro do esperado, vai de 4500 a 6388 kg/ha, isto é, a dispersão dos valores não é muito grande. Seria bom verificar por que um híbrido produziu razoavelmente menos que os demais. Não se observa formação de subgrupos.

Comentários:

1 Limites indeterminados ou classes abertas. É até comum aparecer tabelas de distribuições de freqüências em que a $1^{\underline{a}}$ classe e/ou a última, apresentam o limite inferior e/ou superior indefinidos. Deve-se, sempre que possível, evitar esse tipo de limites, pois dificulta no trabalho descritivo dos dados, principalmente no que diz respeito ao cálculo

Tabela 2.26: Altura de brotos de explantes de abacaxi

1,00	1,18	1,21	1,27	1,34	1,37	1,43	1,47	1,52	1,68
1,01	1,19	1,25	1,30	1,35	1,37	1,43	1,47	1,57	1,73
1,08	1,19	1,26	1,31	1,36	1,39	1,44	1,49	1,61	1,77
1,11	1,20	1,27	1,34	1,36	1,41	1,46	1,50	1,62	

Tabela 2.27: Distribuição de freqüências da variável altura de brotos de explantes de abacaxi.

Altura	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Percentagem
1,00 $\vdash$ 1,13			
1,13 $\vdash$ 1,26			
1,26 $\vdash$ 1,39			
1,39 $\vdash$ 1,52			
1,52 $\vdash$ 1,65			
1,65 $\vdash$ 1,78			
Total	39	1,0000	100,00

de estatísticas.

2 O número de classes estabelecido para a distribuição de freqüências é bastante subjetivo, pois trata-se de uma análise exploratória de dados. Então, o número de classes deve ser o suficiente para nos dar uma boa idéia do fenômeno, deve por em evidência a regularidade do fenômeno. Assim, vale a pena salientar, que a decisão sobre o número de classes cabe ao pesquisador.

Exercícios resolvidos

1. Os dados da tabela 2.26 foram obtidos de um experimento desenvolvido para avaliar o comportamento "In Vitro" de abacaxi (*Ananas comosus*) cv. Primavera e refere-se a variável altura dos brotos de explantes, em cm. (dados ordenados crescentemente).

a) Preencha a tabela de distribuição de freqüências 2.27.

b) Construa um histograma.

c) Faça algumas interpretações relevantes.

d) Pode-se dizer que esta amostra é oriunda de uma população com distribuição normal? Justifique. Observação: leia mais adiante o tópico *O modelo normal*.

As freqüências absolutas, relativas e percentagens para as 6 classes são dadas por: 4, 6, 12, 10, 4, 3, 0,1026, 0,1538, 0,3077, 0,2564, 0,1026, 0,0769, 10,26, 15,38, 30,77, 25,64, 10,26 e 7,69, respectivamente. O histograma é dado na figura 2.17. A distribuição é aproximada-

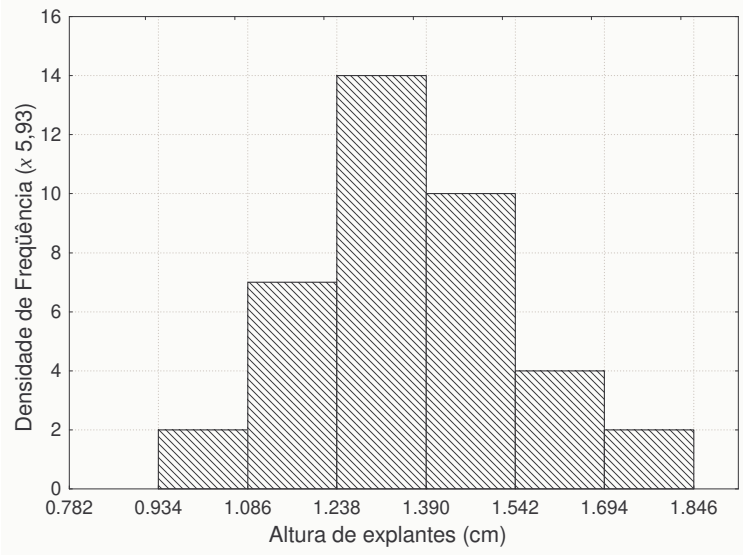


Figura 2.17: Histograma da altura de explantes de abacaxi

Tabela 2.28: Área foliar específica de *Cecropia glazioui*

Borda da mata					Mata fechada				
0,2145	0,3458	0,3796	0,4125	0,4657	0,5521	0,6780	0,7126	0,7894	0,8564
0,2540	0,3482	0,3815	0,4142	0,4670	0,5841	0,6842	0,7154	0,7912	0,8654
0,2592	0,3487	0,3874	0,4182	0,4823	0,6284	0,6898	0,7179	0,8023	0,8665
0,2891	0,3490	0,3924	0,4326	0,4862	0,6357	0,6945	0,7256	0,8046	0,9214
0,2971	0,3547	0,3931	0,4358	0,4921	0,6489	0,6950	0,7321	0,8451	0,9421
0,3013	0,3574	0,3971	0,4573	0,5010	0,6570	0,6970	0,7783	0,8467	0,9573
0,3279	0,3648	0,4015	0,4582	0,5231	0,6704	0,7125	0,7884	0,8468	0,9689

mente simétrica. Um valor representativo do conjunto de dados é 1,36. Não observa-se valor discrepante. Pode-se dizer que a variável altura de explantes de abacaxi segue aproximadamente uma distribuição normal.

2. Os dados da tabela 2.28 são relativos a resposta à variação de luz no crescimento das plantas, medido através da área foliar específica após 60 dias, da espécie *Cecropia glazioui*, em amostras situadas em borda de mata e mata fechada, com intensidade de luz média de 10,6% e 0,87%, respectivamente. A espécie *C. glazioui* é uma planta pioneira, heliófita, perenifólia, seletiva higrôfila, ocorrendo preferencialmente em capoeiras e capoeirões de derrubadas recentes.

Compare as duas amostras através do polígono de freqüências múltiplo. Por polígono de

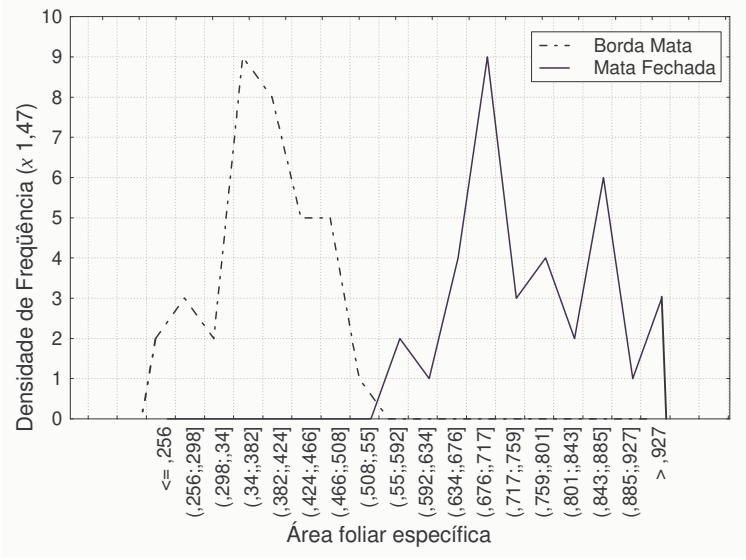


Figura 2.18: Polígono de freqüências múltiplo da área foliar específica de *C. glazioui*

Tabela 2.29: Biometria total de *Macrobrachium potiuna*

25,60	27,75	29,95	32,20	33,90	34,75	35,20	36,00	37,10	39,20	41,75	44,05
25,90	28,30	31,25	32,20	33,95	34,80	35,55	36,70	38,90	39,55	42,80	45,20
25,90	29,05	31,70	33,75	34,75	35,10	35,65	37,05	39,10	40,45	43,95	46,74

freqüências múltiplo, entende-se que no mesmo gráfico (plano cartesiano), vamos representar as duas amostras (borda da mata e mata fechada), por duas linhas poligonais fechadas. O polígono de freqüências múltiplo é dado na figura 2.18.

Observa-se que o crescimento foi maior na mata fechada do que na borda da mata, com valores representativos de 0,70 e 0,40, respectivamente. A dispersão dos dados é maior na mata fechada. A distribuição é mais simétrica na amostra da borda da mata, com os dados concentrando-se mais na parte central.

2.1.3.9 Exercícios Propostos

1. Os dados da tabela 2.32 referem-se a biometria total, em mm, do *Macrobrachium potiuna* (Müller, 1880) da família Palaemonidae. Obs. os dados encontram-se ordenados.
a) Construa a tabela de distribuição de freqüências com 6 classes para os dados.
b) Construa o histograma.
c) Indique um valor representativo para os dados; comente sobre a assimetria; esta amostra é oriunda de uma população com distribuição aproximadamente normal? justifique.

2. Dispõe-se de uma relação de 36 produções em kg/ha de milho do município de Chapecó

Tabela 2.30: Distribuição de freqüências do rendimento de milho para Chapecó e Campos Novos

Rendimento Chapecó	Freq. absoluta	Rendimento Campos Novos	Freq. absoluta
$4200 \vdash 4552$	1	$6613 \vdash 7095$	1
$4552 \vdash 4904$	3	$7095 \vdash 7577$	2
$4904 \vdash 5256$	5	$7577 \vdash 8059$	4
$5256 \vdash 5608$	8	$8059 \vdash 8541$	13
$5608 \vdash 5960$	8	$8541 \vdash 9023$	7
$5960 \vdash 6312$	6	$9023 \vdash 9505$	7
$6312 \vdash 6664$	5	$9505 \vdash 9987$	2
Total	36		36

e uma relação de 36 produções, também em kg/ha, do município de Campos Novos. A tabela de distribuição de freqüências é dada em 2.30. Construa o polígono de freqüências múltiplo. Com base no polígono de freqüuência múltiplo, discuta e compare as duas distribuições quanto as principais características.

O Modelo Normal

Uma distribuição de freqüências muito importante em estatística, é aquela onde os dados se distribuem simetricamente em torno de um valor central, de tal forma que os dados estão em maior quantidade na região próxima desse valor e, a medida que se afastam desse valor, a concentração diminui. Um grande número de métodos de análise estatística se fundamentam nessa distribuição, denominada *distribuição normal ou Gaussiana*, devido a Karl Gauss (1777-1855). A representação gráfica deste modelo, que será estudado com detalhes no capítulo 5, é dada na figura 2.19 .

A distribuição das alturas de explantes de abacaxi, em cm, está representada na figura 2.20. A princípio, dá para dizer que os dados seguem um modelo normal, pois a distribuição é aproximadamente simétrica em torno do valor médio, com maior concentração em torno deste e pouca concentração nas extremidades.

2.1.3.10 Ramo-e-Folhas

Tanto os histogramas, como os demais tipos de gráficos vistos anteriormente, dão uma boa

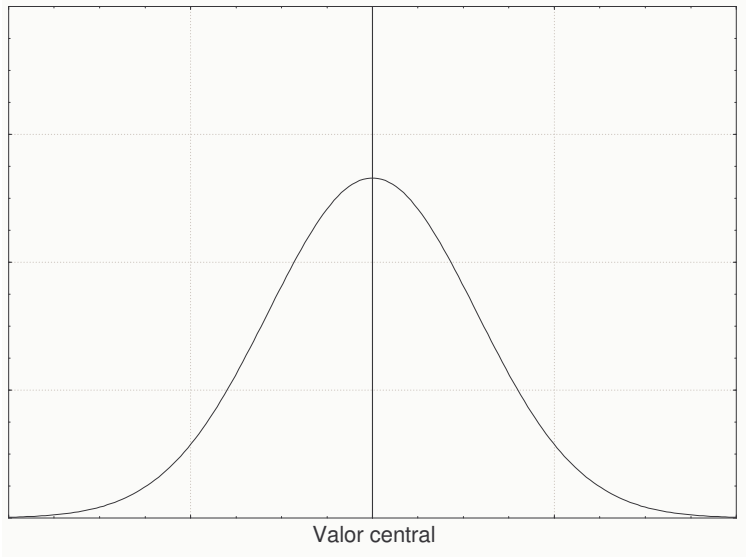


Figura 2.19: A representação gráfica do modelo Normal ou Gaussiano

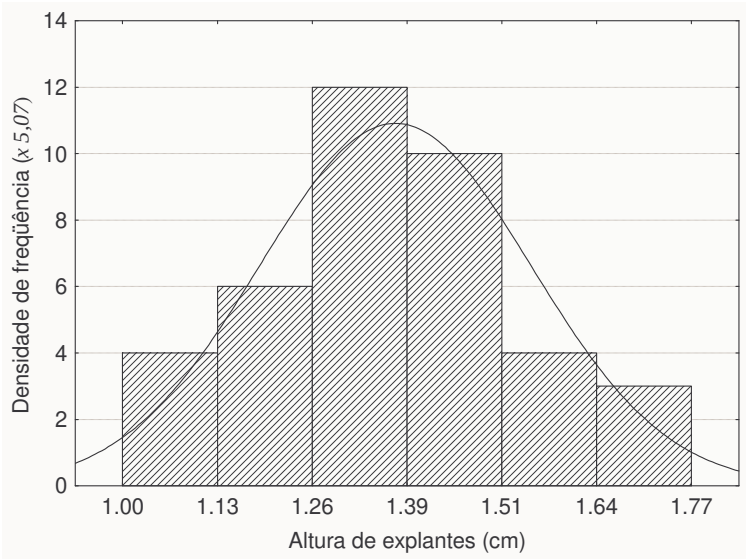


Figura 2.20: Comparação da distribuição das alturas de explantes de abacaxi e o modelo normal

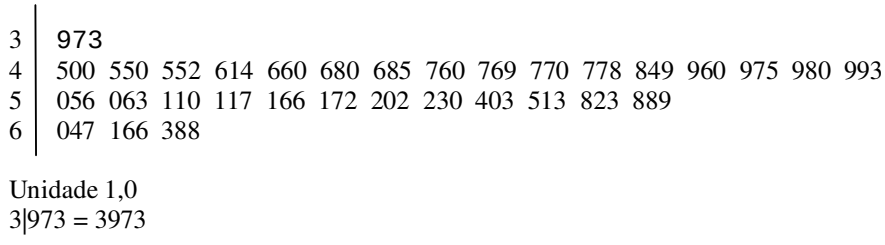


Figura 2.21: Ramo-e-folhas do rendimento médio, em kg/ha, de 32 híbridos de milho

idéia da forma da distribuição da variável em estudo, isto é, do comportamento dos dados. Um outro modo de representação de um conjunto de valores, com o objetivo de se ter uma idéia geral dos dados, é o ramo-e-folhas. Uma vantagem do ramo-e-folhas sobre o histograma é que no primeiro não há perda de informação dos dados, pois trabalha-se com todos os dados originais. É possível, também, através do ramo-e-folhas obter-se algumas outras informações mais gerais sobre os dados, o que será mostrado através de um exemplo. O ramo-e-folhas é útil quando o conjunto de dados não é muito numeroso, pois, caso contrário, a interpretação torna-se difícil.

Exemplo (com discussão sobre a construção do ramo-e-folhas). Nas figuras 2.21, 2.22 e 2.23 temos os ramos-e-folhas da variável rendimento de grãos de híbridos de milho. A idéia básica para construir um ramo-e-folhas é dividir cada observação em duas partes; a primeira parte, que será denominada de ramo, é colocada à esquerda de uma linha vertical; a segunda parte, que serão denominadas de folhas, é colocada à direita dessa linha vertical. O critério de divisão da observação é decisão do pesquisador. Ele vai procurar um ramo-e-folhas que represente bem o fenômeno biológico/agronômico. Assim, para os rendimentos de híbridos de milho, considerando, por exemplo, o valor 3.973, o 3 (parte do milhar) é o ramo e 973 (centena) é a folha, fazemos esta mesma divisão para todos os demais valores.

Na figura 2.21 temos apenas 4 ramos (fazendo analogia com o número de classes do histograma que deverá ser entre 5 e 15), ou seja, reduziu-se muito os dados. Para aumentar o número de ramos podemos subdividí-los em duas partes, garantindo que os ramos sejam equiprováveis, isto é, tenham a mesma chance de receber uma observação, assim, os ramos com o símbolo * recebem valores de 000 a 499 e os ramos com o símbolo ∘ recebem valores de 500 a 999. Esse ramo-e-folhas é mostrado na figura 2.22.

Podemos ainda subdividir os ramos em 5 partes, da seguinte forma: os ramos com o símbolo ⋆ recebem valores na faixa 000 a 199; ramos com o símbolo • recebem valores na faixa 200 a 399; ramos com o símbolo ▷ recebem valores na faixa 400 a 599; ramos com o símbolo ∘ recebem valores na faixa 600 a 799 e ramos com o símbolo ▲ recebem valores na

```
3* |
3o | 973
4* |
4o | 500 550 552 614 660 680 685 760 769 770 778 849 960 975 980 993
5* | 056 063 110 117 166 172 202 230 403
5o | 513 823 889
6* | 047 166 388

Unidade 1,0
3o|973=3973
```

Figura 2.22: Ramo-e-folhas do rendimento médio, em kg/ha, de 32 híbridos de milho

```
3^ | 973
4* |
4. |
4> | 500 550 552
4o | 614 660 680 685 760 769 770 778
4^ | 849 960 975 980 993
5* | 056 063 110 117 166 172
5. | 202 230
5> | 403 513
5o |
5^ | 823 889
6* | 047 166
6. | 388
6> |

Unidade 1,0
3^|973 = 3973 kg/ha
```

Figura 2.23: Ramo-e-folhas do rendimento médio, em kg/ha, de 32 híbridos de milho

faixa 800 a 999. Este ramo-e-folhas é dado na figura 2.23.

Interpretação: No primeiro ramo-e-folhas não observa-se que o valor 3973 esta distante da distribuição dos demais valores, isso indica que o ramo-e-folhas com apenas quatro ramos não é adequado. O segundo ramo-e-folhas nos indica claramente a existência de um híbrido (3.973) com produção abaixo dos demais. Observamos que existe uma queda brusca no lado esquerdo e uma queda mais suave no lado direito, portanto, a distribuição é assimétrica à direita. Esta distribuição parece não seguir o modelo normal. Os valores estão bastante concentrados na faixa entre 4500 e 5400 kg/ha. Um valor típico para representar este conjunto de dados é 5000 kg/ha. No ramo-e-folhas da figura 2.23 observa-se 5 híbridos com altos rendimentos e cujos valores se distanciam dos demais. Se o interesse é encontrar híbridos

Tabela 2.31: Altura de calos, em cm, de *Mandevilla velutina*

0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20
0,34	0,34	0,38	0,38	0,39	0,42	0,42	0,42
0,43	0,45	0,50	0,54	0,56	0,57	0,60	0,61
0,61	0,64	0,66	0,80	0,81			

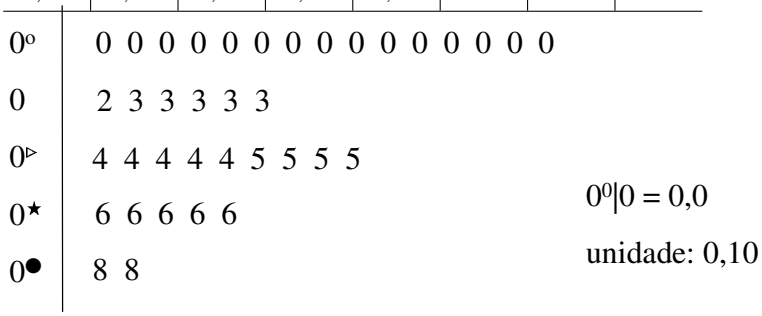


Figura 2.24: Ramo-e-folhas da altura de calos

com alta produtividade esses cinco são os de maior interesse no estudo. O híbrido com baixa produção tornou-se mais evidente, o que também é desejável. Observação: A escolha do número de ramos é equivalente a escolha do número de classes no histograma.

Exercícios resolvidos

1. Os dados da tabela 2.31 referem-se a uma avaliação da formação de calos, mais especificamente, da altura de calos em cm, após um período de 30 dias "in vitro" para os explantes de procedência do cerrado da espécie *Mandevilla velutina*. Obs. é importante que os calos não se desenvolvam, pois quanto menor eles forem, maior será o desenvolvimento das plantas.

a) Construa um ramo-e-folhas com cinco ramos. Resposta: veja figura 2.24

b) Faça algumas conclusões a respeito dos dados. Podemos concluir que a distribuição é assimétrica à direita; um valor representativo do conjunto de dados é 0,38 cm; não apresenta *outliers*; a grande maioria (80,1%) dos valores está na faixa de 0,0 a 0,57; não apresenta subgrupos. 2.24.

2. Os dados da tabela 2.32 referem-se aos pesos da carne de mexilhões do manquezal. Construa um ramo-e-folhas para os dados. Resposta: veja figura 2.25. Observe nesta figura que houve uma " quebra" nos ramos. A partir da quebra, cada valor é um múltiplo de 10, isto é, 10, 20 e 30. No ramo 1^o vão os valores na faixa de 10 até 14,99 e, no ramo $\underline{1}$ vão os valores na faixa de 15 até 19,99. E assim para os demais ramos. Esta construção

Tabela 2.32: Dados de peso da carne, em gramas, de mexilhões do manguezal

9,49	9,54	9,53	11,13	11,76	12,69	12,92
12,92	13,04	14,05	14,88	16,22	16,38	16,92
17,64	18,17	18,53	19,17	19,65	19,80	19,81
20,01	21,60	21,99	22,74	23,71	25,14	25,34
25,67	26,79	27,20	30,20	30,85	33,97	36,35

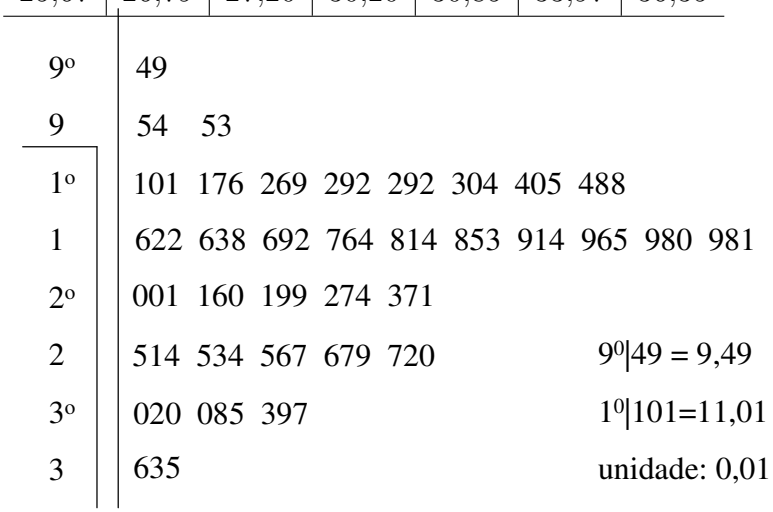


Figura 2.25: Ramo-e-folhas do peso da carne de mexilhões do manguezal

do ramo-e-folhas foi necessária pois, se não tivéssemos feito esta quebra no ramo, teríamos muitos ramos, o que tornaria muito difícil a interpretação.

2.1.3.11 Exercícios Propostos

1. Os dados da tabela 2.32 correspondem a variável altura de plantas, medida em cm, para dois tratamentos. O tratamento 1 é o controle (testemunha), isto é, não foi feita a inoculação do rizóbio nas plantas. O tratamento 2 corresponde à aplicação do rizóbio nas plantas. A fim de comparar os dois tratamentos faça um ramo-e-folhas para cada um dos tratamentos. Quais os valores para representar os dois tratamentos? Qual dos dois tratamentos apresenta maior dispersão? Comente sobre a assimetria das distribuições. Têm valores discrepantes? Pode-se dizer que estas duas amostras são oriundas de duas populações com distribuição pelo menos aproximadamente normal? justifique?

2. Faça um ramos-e-folhas da variável duração do primeiro estádio ninfal de *Triatoma*

Tabela 2.33: Altura de plantas para dois tratamentos

Controle	25	29	29	30	31	31	32	32	33	33
	35	36	36	37	37	38	38	40	41	43
Com rizóbio	34	36	39	39	40	41	41	41	42	44
	44	45	45	46	46	47	47	49	49	51

klugi, em dias, alimentadas em galo, cujos valores são:

21	21	21	22	22	22	22
23	23	23	23	23	25	26
28	28	28	30	30	33	35
35	36	39	39	40	40	42
42	45	46	46	48	50	59

a) Qual o valor representativo do conjunto de valores?

b) Comente sobre a assimetria da distribuição.

c) Pode-se considerar algum(ns) valor(es) como sendo discrepante(s)?

2.2 Algumas Medidas e Modelo para Variáveis Quantitativas

2.2.1 Medidas de Tendência Central

2.2.1.1 Média, Mediana e Moda

Procuramos até aqui interpretar um conjunto de dados através do estudo de distribuição de freqüências, diagrama de pontos e do ramo-e-folhas, o que já foi um grande avanço no sentido de conhecer o comportamento da(s) variável(is) em estudo. Porém, um conjunto de dados pode reduzir-se a uma ou apenas algumas medidas numéricas que representam todo o conjunto original dos dados. Estas medidas são de muito mais fácil compreensão do que os dados originais, esta é uma grande virtude da estatística, isto é, reduzir um conjunto de dados em apenas algumas medidas facilmente compreensíveis. Por exemplo, para conhecer o rendimento típico de híbridos de milho, podemos calcular a média ou a mediana dos resultados da variável. É importante chamar a atenção desde já, que sempre que for apresentada uma medida de tendência central é necessário apresentar também uma medida de variabilidade, dispersão, que serão tratadas na próxima seção.

O objetivo dessa seção é apresentar as principais medidas de tendência central, as quais são assim chamadas devido ao fato dos dados naturalmente tenderem a se concentrar em

torno desses valores centrais. As três medidas de tendência central mais utilizadas para resumir um conjunto de dados são:

- A média aritmética
- A mediana
- A moda

Estas medidas aplicam-se para dados isolados, como também para dados organizados numa distribuição de freqüências em classes, sendo assim, será mostrado o procedimento de cálculo dessas medidas para os dois casos, quais sejam: 1) dados isolados e 2) agrupados em classes.

A *média aritmética* é a idéia que ocorre a grande maioria das pessoas quando se fala em média; como ela possui certas propriedades importantes, ela é a medida de posição mais utilizada. Contudo, ela pode nos levar a erros de interpretação, assim, a *mediana* pode ser a medida mais recomendada em muitas situações. Ainda nesta seção indicaremos estas situações.

A média aritmética (Me), é a soma dos valores numéricos de uma variável dividida pelo número deles. Por exemplo, considere os pesos ao nascer, em kg, de 10 bezerros da raça Charoleza:

47	51	45	50	50	52	46	49	53	51

Assim, a média, será:

$$Me = \frac{47 + 51 + 45 + 50 + 50 + 52 + 46 + 49 + 53 + 51}{10} = 49,4kg.$$

Genericamente, a Me, quando todos os valores são diferentes uns dos outros, é dada por:

$$Me(X) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.4}$$

onde n é o número de dados da amostra e X é uma variável em estudo, por exemplo, peso ao nascer. A letra grega $\sum$, leia-se sigma (maiúscula), como pode ser visto na equação 2.4, representa um somatório, isto é, uma soma de valores.

Agora, quando temos um conjunto de n valores de uma variável X, dos quais n_1 são iguais a x_1, n_2 são iguais a x_2,...., n_k são iguais a x_k, então, a média aritmética de X é dada por:

$$Me(X) = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_ix_i}{n} \tag{2.5}$$

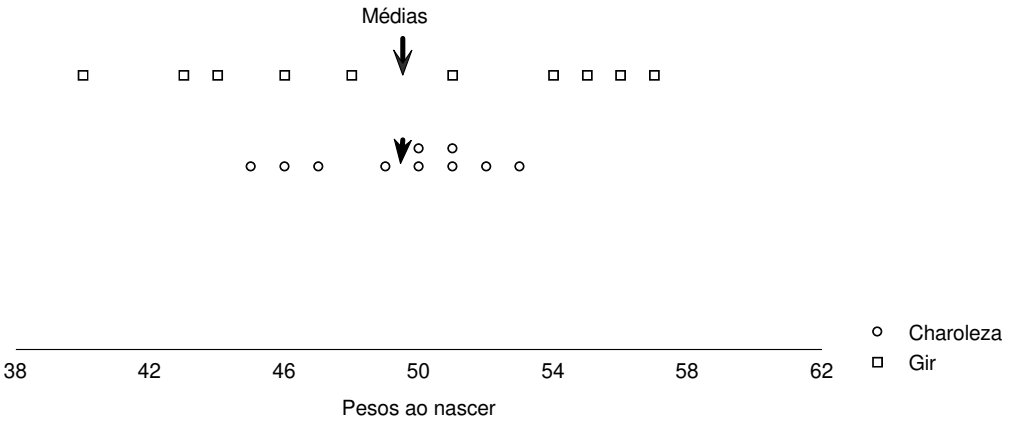


Figura 2.26: Diagrama de pontos para peso ao nascer das raças Charoleza e Gir

onde k é o número de valores diferentes da variável em estudo. Se $f_i = n_i/n$ representa a freqüência relativa da observação x_i, então, Me pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Me(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i.$$

Exemplo. Para os dados dos pesos ao nascer de bezerros da raça Charoleza, com $k = 8$ valores diferentes, temos:

$$\begin{aligned} Me(X) &= \frac{(1\times 45)+(1\times 46)+(1\times 47)+(1\times 49)+(2\times 50)+(2\times 51)+(1\times 52)+(1\times 53)}{(1+1+1+1+2+2+1+1)} \\ &= (0,10\times 45)+(0,10\times 46)+(0,10\times 47)+(0,10\times 49)+(0,20\times 50)+ \\ &+ (0,20\times 51)+(0,10\times 52)+(0,10\times 53) \\ &= 49,4kg. \end{aligned}$$

Exercício. Os valores da variável peso ao nascer de uma amostra de 10 bezerros da raça Gir foram:

51	40	46	48	54	56	44	43	55	57

Encontre a média aritmética da amostra dos pesos ao nascer de bezerros da raça Gir.

O diagrama de pontos para as duas raças é dado na figura 2.26. Percebe-se que os dois conjuntos de dados são bastante diferentes, entretanto, apresentam a mesma média, então, a média aritmética, por si só, tem muito pouco valor científico. É preciso alguma medida de variabilidade para acompanhar a média. Isto será visto na próxima seção.

A principal restrição ao uso da média aritmética é que a mesma é muito sensível a valores excessivamente altos ou baixos (valores discrepantes ou "*outliers*"). Ela é uma medida bas-

tante adequada quando os dados apresentam pelo menos aproximadamente uma distribuição normal. Quando a distribuição é assimétrica deve-se utilizar preferencialmente a mediana.

No caso em que os dados estão agrupados em classes de ocorrências, a expressão da média aritmética é dada por:

$$Me = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i s_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} f_i s_i$$

onde n_i, f_i e s_i são a freqüência absoluta, freqüência relativa e o ponto médio da i-ésima classe, respectivamente, e k é o número de classes do histograma.

Exemplo. Para a distribuição de freqüências da tabela 2.25, que diz respeito aos rendimentos, em kg/ha, de híbridos de milho, a média aritmética tem como resultado, $Me(X) = 5105,031kg$. Vamos ao cálculo.

$$\begin{aligned} Me(X) &= 0,0313(4214,5) + 0,3750(4697,5) + 0,4063(5180,5) + 0,0937(5663,5) + 0,0937(6146,5) \\ &= 5105,031\ kg \end{aligned}$$

Observação: em termos computacionais, os programas estatísticos calculam a média facilmente, sem a necessidade de formar as classes.

Acontece, muitas vezes, que determinados valores de um conjunto de dados são mais importantes que os demais, ou seja, tem pesos diferentes, merecendo assim um tratamento especial.

Exemplo. Os tubérculos de batatas sementes são classificados, para efeito de comercialização, em quatro tipos de tamanhos (diâmetros), a saber:

- Tipo I - maior que 50 mm até 60 mm inclusive (50 a 60];
- Tipo II - maior que 40 mm até 50 mm inclusive (40 a 50];
- Tipo III - maior que 28 mm até 40 mm inclusive (28 a 40];
- Tipo IV - de 23 mm até 28 mm inclusive [23 a 28].

As batatas sementes são comercializadas em caixas de 30 kg. Um agricultor produziu 500 caixas em um hectare (10.000 m^2), assim distribuídas:

- 100 caixas do tipo I → preço: 1500 u.m./cx;
- 180 caixas do tipo II → preço: 3500 u.m./cx;
- 140 caixas do tipo III → preço: 3000 u.m./cx;

- 80 caixas do tipo IV → preço: 1600 u.m./cx.

Qual o preço médio, por caixa, obtido pelo agricultor? Podemos usar a expressão 2.5 para obter esse valor. Temos que a variável X é o preço da caixa de batata semente, portanto, x_1 é o preço da caixa do tipo I, e assim por diante; n_i é o número de caixas produzidas por cada tipo, $i = 1, 2, 3, 4$. Vamos ao cálculo.

$$\begin{aligned} Me(X) &= \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} n_i} = \frac{(100 \times 1500) + (180 \times 3500) + (140 \times 3000) + (80 \times 1600)}{100 + 180 + 140 + 80} \\ &= \frac{1328000}{500} = 2656,00 \ u.m. \end{aligned}$$

Propriedades da Média Aritmética

A média aritmética possui algumas propriedades importantes, dentre as quais vamos discutir duas. Antes de apresentá-las vamos ver o que significa um desvio ou resíduo de um dado em relação a sua média. Esse desvio é calculado como:

$$d_i = x_i - \bar{x}.$$

Assim, existem desvios positivos, negativos e nulos. Para os dados de pesos ao nascer de bezerros da raça Charoleza, temos:

d_1=45-49,4=-4,4	d_2=46-49,4=-3,4	d_3=47-49,4=-2,4	d_4=49-49,4=-0,4	d_5=50-49,4=0,6
d_6=50-49,4=0,6	d_7=51-49,4=1,6	d_8=51-49,4=1,6	d_9=52-49,4=2,6	d_{10}=53-49,4=3,6

A primeira propriedade é que a soma dos desvios calculados em relação a média aritmética do conjunto de dados é nula:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i = 0.$$

No exemplo: -4,4-3,4-2,4-0,4+0,6+0,6+1,6+1,6+2,6+3,6=0.

A segunda propriedade é que a soma dos quadrados dos desvios em relação a média é um mínimo. Formalmente, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \text{mínimo}.$$

Veremos a utilização dessas propriedades quando tratarmos do estudo de medidas de dispersão.

Uma segunda medida de tendência central é a *mediana*. A mediana divide um conjunto de dados ao meio, onde 50% dos valores se posicionam abaixo da mediana, e 50% dos valores

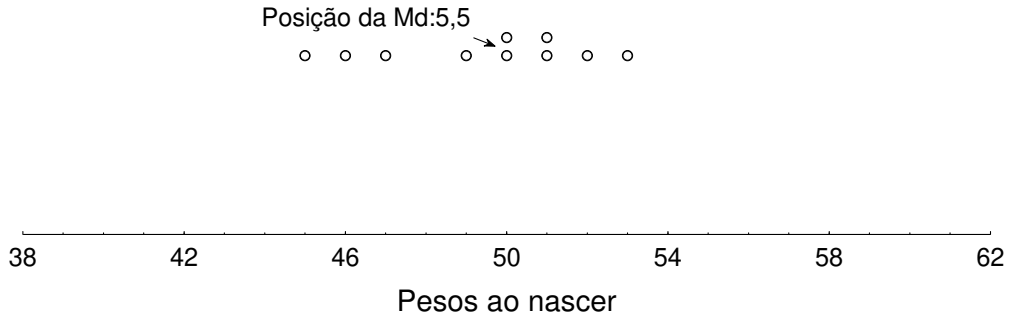


Figura 2.27: Diagrama de pontos para peso ao nascer da raça Charoleza - cálculo da mediana

se posicionam acima da mediana, portanto, a mediana, é uma medida baseada na ordenação dos dados (*rank*, em inglês).

Definição: a mediana de um conjunto de valores, é o valor Md que ocupa a posição $(n+1)/2$, quando os dados estão ordenados crescentemente. Se $(n+1)/2$ for fracionário, toma-se como mediana, a média dos dois valores de posições mais próximas a $(n+1)/2$.

Exemplo. Vamos calcular a mediana dos pesos ao nascer de bezerros, em kg, da raça Charoleza. Através do diagrama de pontos da figura 2.27, podemos observar que a distribuição de freqüências apresenta uma assimetria à esquerda, nesse caso é recomendável o uso da mediana em preferência à média. A posição da mediana é dada por: $i = (10+1)/2 = 5,5$. Na figura 2.27 está indicada esta posição. Como a posição é um número fracionário, a mediana será a média aritmética entre os valores que ocupam a $5^{\underline{a}}$ e a $6^{\underline{a}}$ posição, então,

$$Md = (50 + 50)/2 = 50\ kg.$$

Uma medida estreitamente relacionada com a mediana são os *quartis*. Embora não sejam medidas de tendência central, serão aqui tratadas devido a semelhança com o cálculo da mediana. Os quartis dividem um conjunto de dados em 4 partes iguais, do seguinte modo: aproximadamente 25% dos dados serão inferiores ao primeiro quartil (Q_1), ou seja, 25% dos dados estão localizados em posição inferior ao primeiro quartil; 50% dos dados ocupam posição inferior ao segundo quartil (Md), que é a mediana, e aproximadamente 75% dos dados ocupam posição inferior ao terceiro quartil (Q_3), portanto, 25% dos valores estão localizados em posição superior ao terceiro quartil.

Definição: dado um conjunto de dados ordenados, podemos obter, de forma aproximada, o primeiro quartil, (Q_1), como sendo a mediana dos valores de posições menores ou iguais à posição da mediana. A mediana dos valores de posições maiores ou iguais à posição da mediana corresponde ao terceiro quartil, (Q_3).

Exemplo. Vamos calcular o Q_1 e o Q_3 para os dados de pesos ao nascer, em kg, de

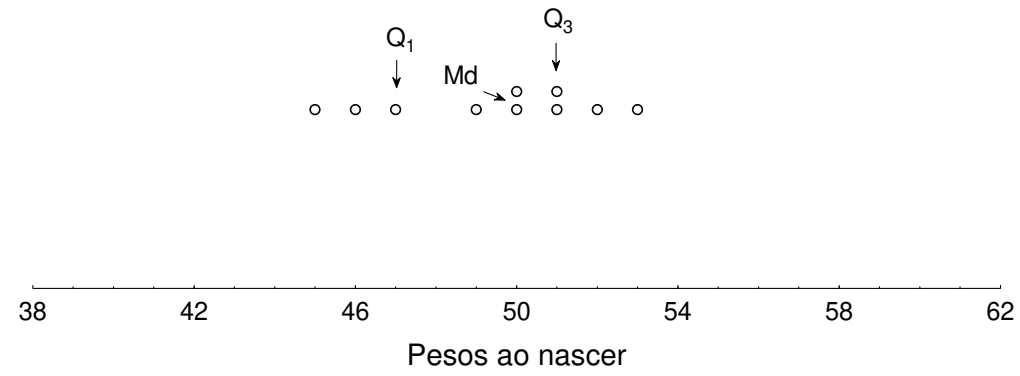


Figura 2.28: Diagrama de pontos para peso ao nascer da raça Charoleza - 1º e 3º quartis

bezerros da raça Charoleza. A posição do elemento primeiro quartil é: $i = (n+1)/2 = (5+1)/2 = 3$, logo $Q_1 = 47Kg$. O valor de n é igual a 5 pois temos cinco valores em posição menor ou igual à posição da mediana. A posição do elemento terceiro quartil é: $i = (n+1)/2 = (5+1)/2 = 3$, logo $Q_3 = 51Kg$. Na figura 2.28 estão indicados o 1º e o 3º quartil, juntamente com a mediana.

O cálculo da mediana e dos quartis para um histograma serão feitos por meio de argumentos geométricos, através da proporcionalidade existente entre área e base de retângulos. Geometricamente, a mediana é o valor da abcissa que determina uma linha vertical que divide o histograma em duas partes de áreas iguais, então, 50% da área do histograma está abaixo da mediana e 50% da área está acima da mediana. Da mesma forma, o 1º quartil é o valor da abcissa que determina uma linha vertical que divide o histograma em duas partes de áreas diferentes, ou seja, 25% da área está abaixo do 1º quartil e 75% da área está acima do 1º quartil. O terceiro quartil é o valor da abcissa que determina uma linha vertical que divide o histograma em duas partes de áreas diferentes, ou seja, 75% da área está abaixo do 3º quartil e 25% da área está acima do 3º quartil.

Exemplo. Vamos encontrar os valores da mediana e dos quartis para a variável rendimento de grãos, em kg/ha, de híbridos de milho. O histograma é dado na figura 2.15. A classe mediana é aquela cuja porcentagem acumulada é, de pelo menos, 50%, então, no exemplo, a mediana é um valor que encontra-se na terceira classe, cujos limites inferior e superior são: 4939 e 5422, respectivamente. Agora, vamos usar a regra da proporcionalidade, que é dada por:

$$\frac{5422 - 4939}{40,6} = \frac{Md - 4939}{9,4}.$$

No lado esquerdo do sinal de igualdade, temos o limite superior (5422) subtraído do limite inferior (4939) da classe mediana, dividido pela porcentagem de observações desta classe

(40,6). No lado direito do sinal de igualdade, temos um outro retângulo cuja área vale 9,4%, obtida da seguinte forma: somando-se as áreas das classes anteriores à classe mediana, temos 3,13+37,50=40,63%, assim, 50,0-40,6=9,4%; a base deste " novo" retângulo é $Md - 4939$, cujo valor Md estamos interessados em determinar.

Obtemos o valor da mediana fazendo-se:

$$Md = 11,8276(9,4) + 4939 = 5050,828\ kg.$$

O cálculo dos quartis é feito de maneira análoga ao cálculo da mediana. A classe que contém o 1º quartil é aquela cuja porcentagem acumulada é de pelo menos 25%, no exemplo, o 1º quartil encontra-se na segunda classe, cujos limites inferior e superior são: 4456 e 4939, respectivamente; a porcentagem de observações nesta classe é de 37,5%. Pela regra da proporcionalidade encontramos:

$$\frac{4939 - 4456}{37,5} = \frac{Q_1 - 4456}{21,9} \Rightarrow Q_1 = 4738,072\ kg.$$

O valor 21,9 é obtido fazendo-se 25,0-3,1.

A classe que contém o 3º quartil é aquela cuja percentagem acumulada seja de pelo menos 75%, no exemplo, é a terceira classe, cujo limite inferior, superior e porcentagem de observações valem: 4939, 5422 e 40,6, respectivamente. Aplicando a regra obtemos:

$$\frac{5422 - 4939}{40,6} = \frac{Q_3 - 4939}{34,4} \Rightarrow Q_3 = 5348,241\ kg.$$

Na figura 2.29 apresentamos o histograma da variável rendimento de grãos, em kg/ha, acompanhado dos quartis e mediana.

Finalmente, temos a *moda* (Mo), definida com o valor que ocorre com maior freqüência num conjunto de dados. Pela própria definição, percebe-se que a moda pode não existir, pois pode não existir um valor mais freqüênte que os demais, ou existindo, pode não ser a única, assim temos séries amodal, unimodal, bimodal, trimodal, etc.

Exemplo. Para os dados de pesos ao nascer de bezerros da raça charoleza temos duas modas: $M_{o1} = 50$ e $M_{o2} = 51$, portanto, a série é bimodal. No caso do histograma, devemos encontrar a classe modal, isto é, a classe que apresenta a mais alta freqüência. A moda é por definição o ponto médio dessa classe. A utilidade da moda ocorre quando num conjunto de dados, um, dois, ou um grupo de valores, ocorrem com muito maior freqüência do que outros.

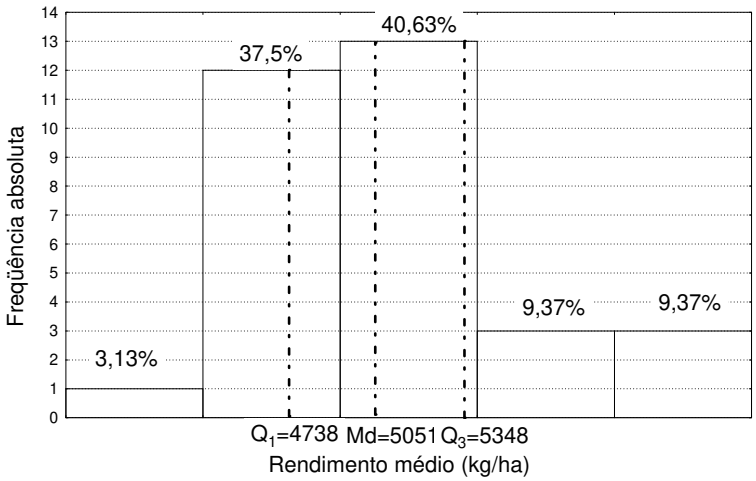


Figura 2.29: Representação geométrica da mediana, do primeiro quartil e do terceiro quartil

2.2.2 Medidas de Dispersão

2.2.2.1 Variância, Desvio Padrão, Coeficiente de Variação e Desvio Interquartílico

Quando apresentamos uma medida de tendência central para representar um conjunto de dados, é necessário que esta medida seja acompanhada de um outra medida que resuma a variabilidade dos dados, ou seja, a dispersão dos dados. Na figura 2.26 estão representados os pesos ao nascer de bezerros das raças Charoleza e Gir, duas raças leiteiras. Observa-se que as duas distribuições têm a mesma média amostral, porém, os valores para a raça Gir estão bem mais esparramados (dispersos) do que os valores da raça Charoleza. Dizemos que a variabilidade na raça Gir é maior do que na raça Charoleza. Enfim, os dois conjuntos de dados são bastante diferentes, apesar de apresentarem a mesma média amostral. Com isso, fica claro que são necessários, pelo menos dois tipos de medidas para descrever razoavelmente bem um conjunto de dados. Uma medida de dispersão quantifica a magnitude da variabilidade dos dados. Vamos apresentar as seguintes medidas de dispersão:

- Variância
- Desvio padrão
- Coeficiente de variação
- Desvio interquartílico

Para os métodos estatísticos, a medida de dispersão é de fundamental importância, pois a necessidade do uso da estatística, é devida a existência de variabilidade nos dados observados.

X_i	5,4	5,4	5,8	6,4	6,4	6,6	6,6	6,8	6,8	7,0	7,3	7,3	7,5	8,2	8,8	8,8
$\overline{x}$	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94	6,94
$(x_i - \overline{x})$	-1,54	-1,54	-1,14	-0,54	-0,54	-0,34	-0,34	-0,14	-0,14	0,06	0,36	0,36	0,56	1,26	1,86	1,86
$(x_i - \overline{x})^2$	2,37	2,37	1,30	0,29	0,29	0,12	0,12	0,02	0,02	0,00	0,13	0,13	0,31	1,59	3,46	3,46

Figura 2.30: Cálculo da variância do diâmetro da roseta foliar de bromélias expostas ao sol

Para a variância e o desvio padrão, o princípio básico é analisar os desvios das observações em relação à média aritmética. Em cada caso, o valor zero para a variância ou desvio padrão, indica ausência de variação; a variação vai aumentando à medida que aumenta o valor da medida de dispersão.

A variância é uma medida de dispersão que nos fornece uma idéia da variabilidade dos dados em torno da média. Ela é o quociente entre a soma dos quadrados dos desvios dos dados observados, tomados em relação a sua média aritmética, e o número de dados (n) menos 1. É representada por s^2 quando os dados são oriundos de uma amostra e por σ^2, leia-se sigma ao quadrado, quando os dados representam a população. Vamos ilustrar os passos para o cálculo da variância através de um exemplo.

Exemplo. Vamos calcular a variância para os dados de uma amostra de tamanho, $n = 16$, do diâmetro (em cm) da roseta foliar de bromélias expostas ao sol. Os dados amostrais obtidos foram:

5,4	5,4	5,8	6,4	6,4	6,6	6,6	6,8
6,8	7,0	7,3	7,3	7,5	8,2	8,8	8,8

Os passos para o cálculo da variância são dados na figura 2.30. Precisamos do valor da média aritmética dos dados, no exemplo temos $\overline{x} = 6,94$ cm. Após são calculados os desvios dos dados em relação à média, $(x_i - \overline{x})$, onde $x_1 = 5,4,\ x_2 = 5,4,\ x_3 = 5,8,\ ...,\ x_{16} = 8,8$; em seguida estes desvios são elevados ao quadrado, $(x_i - \overline{x})^2$. Finalmente, aplicamos a expressão da variância amostral que é dada por:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \tag{2.6}$$

No exemplo, com base nos resultados de 2.30, temos:

$$s^2 = \frac{15,98}{15} = 1,065\ cm^2.$$

Foi também selecionada uma outra amostra de 16 valores de diâmetros da roseta foliar de bromélias em ambiente de sombra. Os resultados foram:

13,4	13,7	14,4	14,6	14,6	14,8	15,2	15,2
15,4	15,7	16,2	16,4	16,7	17,5	17,8	17,8

Para esses dados o valor da variância é $s^2 = 1,893\ cm^2$. Obtenha esse valor. A conclusão que podemos tirar é que, para a variável diâmetro, as bromélias em ambiente de sombra são mais heterogêneas (apresentam maior variabilidade) do que as expostas ao sol.

Para os dados de peso ao nascer de bezerros, representados na figura 2.11, obtemos $s^2_{CH} = 6,92\ kg^2$ e $s^2_G = 36,48\ kg^2$, para as raças Charoleza e Gir, respectivamente. Portanto, a raça Gir é muito mais heterogênea do que a raça Charoleza, para peso no nascimento.

A variância apresenta um inconveniente de ordem prática, pois como ela é expressa em unidades ao quadrado, isto causa problemas de interpretação. Uma outra medida de variabilidade, calculada através da variância, é o *desvio padrão* da amostra (s). Na prática o desvio padrão é preferido em relação a variância, pois ele é expresso na mesma unidade dos dados originais. O desvio padrão nada mais é do que a raíz quadrada da variância, logo:

$$s = \sqrt{s^2}. \tag{2.7}$$

Exemplo. Para os dados amostrais do diâmetro da roseta foliar de bromélias, em cm, expostas ao sol e em ambiente de sombra, os valores do desvio padrão são, $s_{Sol} = 1,032\ cm$ e $s_{Sombra} = 1,376\ cm$, respectivamente. O desvio padrão é uma medida relativa, assim, só faz sentido afirmar que um desvio é grande (ou pequeno) comparativamente à outro. Nesse exemplo, o desvio padrão para expostas ao sol é menor do que para ambiente de sombra. Podemos dizer que, para expostas ao sol, a dispersão dos valores em torno da média é, em média igual a 1,032 cm e, para ambiente de sombra, a dispersão dos valores em torno da média é, em média, igual a 1,376 cm.

Existe uma expressão mais geral para o cálculo da variância e desvio padrão dada por:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}, \tag{2.8}$$

onde k é o número de valores diferentes de x_i; n_i é a frequência de ocorrência do i-ésimo valor. Para os dados de diâmetro de roseta expostas ao sol, também podemos calcular a variância usando 2.8, da seguinte forma:

$$s^2 = \frac{(2 \times 2,37) + (1 \times 1,30) + (2 \times 0,29) + (2 \times 0,12) + ... + (2 \times 3,46)}{16-1} = 1,065\ cm^2.$$

Em algumas situações, como por exemplo, quando a população não é muito grande, é preferível realizar o censo, isto é, obter as informações sobre todos os elementos, plantas, pessoas etc. que constituem esta população. Por exemplo, num estudo sobre a consanguinidade na comunidade da Costa da Lagoa da Conceição, Florianópolis, SC, foram levantados os dados de todos os moradores (população). Nesse caso temos a *variância populacional*, representada

por σ^2, leia-se sigma ao quadrado, e é calculada através da expressão:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}, \tag{2.9}$$

onde μ (leia-se "mi") é calculada por: $\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i/N$, é a média obtida com todos os dados da população, N é o tamanho da população, isto é, o número total de dados. Da mesma forma, o desvio padrão populacional é obtido através da raíz quadrada da variância e é representado por σ.

O *coeficiente de variação* é utilizado quando temos interesse em comparar variabilidades em situações onde as médias são muito diferentes ou as unidades de medida são diferentes. Nesse caso, utilizamos o coeficiente de variação, pois é uma medida relativa percentual da variabilidade dos dados em torno da média, isto é,

$$CV(\%) = \frac{s}{\bar{x}} \times 100. \tag{2.10}$$

É uma medida de dispersão relativa porque estabelece uma relação entre o desvio padrão (s), e a média ($\bar{x}$). Sendo uma medida independente da unidade da variável é útil para se estudar comparativamente duas ou mais distribuições.

Exemplo. Os dois conjuntos de dados abaixo representados, referem-se ao comprimento do corpo, dado em mm, e peso de fêmeas, dado em g, de *Penaeus paulensis* (Crustacea, Decapoda, Penaidae), respectivamente, obtidos nas despescas dos viveiros do Centro de Ciências Agrárias (CCA) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O comprimento do corpo é dado em mm, enquanto que o peso é dado em g.

27	26	26	25	25	25	25	23	23
30	30	33	33	33	35	35	35	36

0,14	0,16	0,14	0,12	0,12	0,12	0,11	0,09	0,07
0,18	0,23	0,28	0,28	0,32	0,31	0,33	0,36	0,33

A média e o desvio padrão para cada uma das amostras são: $\bar{x}_C = 29,17\ mm$, $\bar{y}_P = 0,21\ g$, $s_C = 4,63\ mm$ e $s_P = 0,10\ g$. Assim, os coeficientes de variação valem:

$$cv_C = \frac{4,6305}{29,1667} \times 100 = 15,88\% \quad cv_P = \frac{0,0984}{0,2050} \times 100 = 48,00\%.$$

Portanto, a variabilidade na variável peso é muito maior do que na variável comprimento. A variabilidade é mais significativa para peso. Observe que pelos valores dos desvios padrões a conclusão seria diferente.

O coeficiente de variação é bastante utilizado em dinâmica de populações vegetais ou animais. Outra aplicação importante do coeficiente de variação é na estatística experimental, pois ele indica a precisão do experimento, ou seja, a capacidade de realizarmos novamente o experimento, sob as mesmas condições, e produzir resultados semelhantes. Quais são os valores de C.V. aceitáveis na experimentação? Os valores dos coeficientes de variação dependem do tipo de pesquisa e da variável em estudo, sendo assim, não existe um orientação geral, deve-se fazer uma busca bibliográfica em pesquisas similares. Numa situação de ensaios agrícolas de campo, para culturas anuais como soja, milho e feijão e variável rendimento de grãos, temos a seguinte orientação:

$$\begin{aligned} C.V. \leq 10\% &\Rightarrow \text{baixo} \\ 10\% < C.V. \leq 20\% &\Rightarrow \text{médio} \\ 20\% < C.V. \leq 30\% &\Rightarrow \text{alto} \\ C.V. > 30\% &\Rightarrow \text{muito alto} \end{aligned}$$

Para dados agrupados em classes (histograma), podemos calcular a variância através das seguintes expressões:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(s_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} \quad \text{para dados amostrais} \tag{2.11}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(s_i - \mu)^2 n_i}{N} \quad \text{para dados populacionais} \tag{2.12}$$

onde: k é o número de classes; s_i é o ponto médio da i-ésima classe; n_i é o número de dados observados na i-ésima classe e N é o tamanho da população. A única alteração das fórmulas anteriores é a substituição dos valores originais, x_i, pelos pontos médios, s_i.

Exemplo. Para a distribuição de freqüências da tabela 2.25, que diz respeito aos rendimentos, em kg/ha, de híbridos de milho, o valor da variância é dado por:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{32-1}\{[(4214,5-5105,0)^2 \times 1] + [(4697,5-5105,0)^2 \times 12] + [(5180,5-5105,0)^2 \times 13] \\ &+ [(5663,5-5105,0)^2 \times 3] + [(6146,5-5105,0)^2 \times 3]\} \\ s^2 &= 227409,74\ (kg/ha)^2. \end{aligned}$$

O desvio padrão vale:
$s = \sqrt{s^2} = 476,87\ kg/ha.$

Da mesma forma que a média aritmética, a variância é uma medida de dispersão, que representa bem a realidade, quando os dados apresentam pelo menos aproximadamente uma

distribuição normal. Para distribuições assimétricas, uma medida da variabilidade é dada pelo *desvio interquartílico*, calculada por:

$$Q_3 - Q_1.$$

Exemplo. Para os valores de rendimento de grãos, em kg/ha, de híbridos de milho, o valor do desvio interquartílico é 5348,2-4738,1=610,1. Temos que 50% dos valores encontram-se no intervalo de 4738,1 a 5348,2.

A Média e o Desvio Padrão Sob um Modelo Normal

Um caso importante acontece quando os dados numa distribuição de freqüências, apresentam o histograma com a forma de sino, esta distribuição é comumunte chamada de distribuição normal ou Gaussiana (devido a Karl F. Gauss). Nessa distribuição sempre temos:

1. 68% dos dados estão compreendidos entre a média mais ou menos um desvio padrão $(\mu - 1\sigma; \mu + 1\sigma)$.

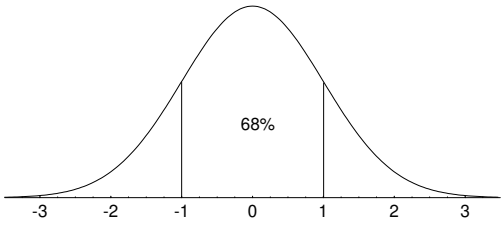
2. 95,4% dos dados estão compreendidos entre a média mais ou menos dois desvios padrões $(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)$.

3. 99,7% dos dados estão compreendidos entre a média mais ou menos três desvios padrões $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.

Esses resultados podem ser visualizados na figura 2.31.

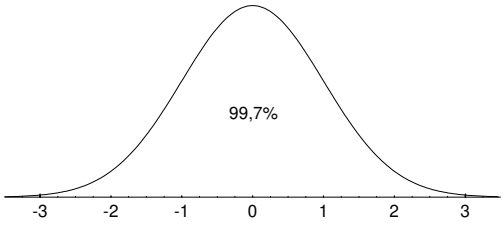
Nos trabalhos científicos, é bastante comum e aconselhável, a representação dos dados na forma $\bar{x} \pm s$ ou $\bar{x}(s)$. Isso indica, que sob normalidade dos dados, 68% dos dados estão entre a média mais 1 desvio padrão e a média menos 1 desvio padrão. O responsável pelos dados (Agrônomo, Biólogo), deve avaliar se estes intervalos são amplos (pouco precisos), ou não (precisos), para o fenômeno real em estudo.

Vimos a importância de se identificar as observações discrepantes num conjunto de dados. Numa distribuição aproximadamente normal, algum(ns) valor(es) maior(es) que $\bar{x} + 3s$, ou, menor(es) que $\bar{x} - 3s$, são considerados valores discrepantes ou *outliers*. Para a amostra de peso de fêmeas de *Penaeus paulensis* encontramos $\overline{x} = 0,2050$ e $s = 0,0984$. Temos que $\overline{x} + 3s = 0,2050 + 3(0,0984) = 0,5000$ e $\overline{x} - 3s = 0,2050 - 3(0,0984) = -0,0902$. Como na amostra estudada não temos nem um valor acima de 0,50 concluímos, por este critério, que não existe valor discrepante.



(a) Aproximadamente 68% dos dados estão entre $\mu \pm \sigma$

(b) Aproximadamente 95,4% dos dados estão entre $\mu \pm 2\sigma$



(c) Aproximadamente 99,7% dos dados estão entre $\mu \pm 3\sigma$

Figura 2.31: Distribuição dos dados, sob o modelo normal, de acordo com μ e σ.

Uma Regra Empírica para a Dispersão

Existe uma regra empírica determinada por um matemático russo chamado Tchebysheff, que diz o seguinte: "dado um número $k > 1$, e uma amostra de n observações, $x_1, x_2, ..., x_n$ é certo que *pelo menos* $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ dessas observações pertencerão ao intervalo $\bar{x} - ks$ e $\bar{x} + ks$. Esta regra é importante, principalmente quando não se conhece a distribuição dos dados.

Exemplo. O objetivo é estudar o número de insetos de determinada espécie por árvore de *Pinus elliotti*. Uma amostra de tamanho $n = 16$ árvores foi coletada e os resultados foram:

0	2	5	1	6	3	3	2
4	0	7	8	4	5	6	3

A média e o desvio padrão valem $\bar{x} = 3,6875$ insetos e $s = 2,3866$ insetos, respectivamente. Para $k = 2$ temos que pelo menos 75% das observações encontram-se no intervalo [0;8]. Verificando-se os dados da amostra encontramos 100% das observações nesse intervalo.

Exercício resolvido

1. Utilizando os dados da tabela 2.32, calcule a média, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação para cada um dos tratamentos (Sem e Com rizóbio).

	Sem rizóbio	Com rizóbio
$\bar{x} = \sum_{i=1}^{20} x_i/20$	34,35	43,30
$s^2 = \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2/(20-1)$	20,45	19,91
$s = \sqrt{s^2}$	4,58	4,46
$CV(\%) = \frac{s}{\bar{x}}.100$	13,16%	10,30%

Utilizando a média e o desvio padrão, como você descreveria os dados do tratamento 1 e do tratamento 2? ainda utilizando a média e o desvio padrão, verifique se existem dados suspeitos e discrepantes, para o tratamento 1 e 2. Indique os cálculos. Resultados:

	Descrição	Suspeitos	Discrepantes
	$\bar{x} \pm 1s$	$\bar{x} \pm 2s$	$\bar{x} \pm 3s$
Sem rizóbio	$34,35 \pm 4,52$	$34,35 \pm 2(4,52)$	$34,35 \pm 3(4,52)$
	[29,83;38,87]	[25,31;43,39]	[20,78;47,92]
Com rizóbio	$43,3 \pm 4,46$	$43,3 \pm 2(4,46)$	$43,3 \pm 3(4,46)$
	[38,84;47,76]	[34,38;52,22]	[29,92;56,68]

No tratamento 1 verificamos que o valor 25 é suspeito, porém, não é considerado discrepante; no tratamento 2 verificamos que o valor 34 é suspeito, porém, não é discrepante.

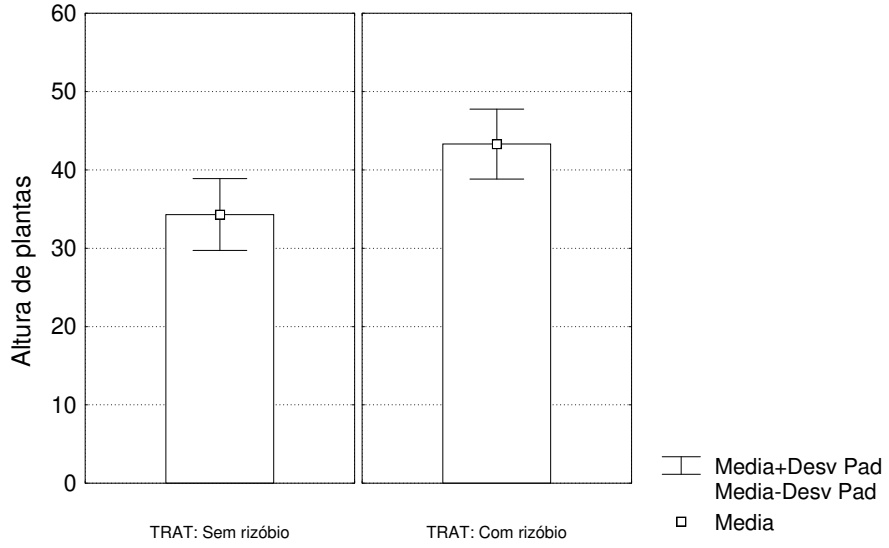


Figura 2.32: Representação gráfica das médias e dos desvios padrões

Calcule a mediana e os quartis para cada um dos tratamentos. Aplicando as definições encontramos:

	Q_1	Md	Q_3
Sem rizóbio	31	34	37,5
Com rizóbio	40,5	44	46,5

Fazer uma representação gráfica das médias e dos desvios padrões. A representação é dada na figura 2.32. As alturas das colunas representam as médias dos tratamentos portanto, no tratamento com rizóbio a altura média é maior do que sem tratamento. Os desvios padrões dos tratamentos são praticamente iguais.

2.2.2.2 Exercícios Propostos

1. A tabela de distribuição de freqüências 2.34 foi construída a partir dos dados da tabela 2.31. Observe que a distribuição é assimétrica à direita, pois possue uma cauda mais longa à direita. Calcular a média, a variância, o desvio padrão, a mediana e os quartis da distribuição de freqüências. Considere o conjunto 1 formado pela média e variância, e o conjunto 2 formado pela mediana e quartis. Qual dos dois conjuntos você recomendaria para essa distribuição? Justifique.

Tabela 2.34: Distribuição de freqüência da variável altura de calos em cm, num período de 30 dias "in vitro" da espécie *Mandevilla velutina*

Altura de calos	Ponto médio (s_i)	Freqüência absoluta (n_i)
0,00 ⊢ 0,14	0,07	15
0,14 ⊢ 0,28	0,21	1
0,28 ⊢ 0,42	0,35	5
0,42 ⊢ 0,56	0,49	8
0,56 ⊢ 0,70	0,63	7
0,70 ⊢ 0,84	0,77	2
Total		38

Tabela 2.35: Produção de cana-de-açúcar em t/ha

Variedade 1		Variedade 2		
65	78	88	93	99
68	80	89	95	
75	80	90	96	
76	82	91	97	
77	86	92	97	

2. Para se estudar o comportamento de duas variedades de cana-de-açúcar, realizou-se um experimento onde foram obtidos os resultados descritos na tabela 2.35. Para decidir se a produção média das duas variedades de cana-de-açúcar são semelhantes ou não, adotou-se o seguinte teste:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{onde} \quad s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}} \tag{2.13}$$

Caso $|t| < 2$ as produções médias são semelhantes, caso contrário são diferentes. Qual é a sua conclusão?

3. Na tabela 2.36 temos os resultados da variável peso de carne, em gramas, de mexilhões de dois locais: 1) Sambaqui e 2) Manguezal. a) calcule a média e a mediana para cada um dos locais. Onde houve maior crescimento?

b) Calcule o Q_1 e o Q_3 para cada um dos locais. Explique o significado destes números.

c) Compare os dois locais quanto a homogeneidade (calcule uma medida de dispersão e conclua).

Tabela 2.36: Peso de carne de mexilhões, em gramas, em dois locais

Sambaqui			Manguezal		
30,61	42,88	27,94	25,34	9,49	19,17
28,89	36,22	41,45	25,67	16,92	21,60
32,21	28,86	42,59	17,64	12,91	20,01
24,25	22,56	15,25	33,97	14,05	19,81
25,63	22,92	33,29	11,13	14,88	16,22

Tabela 2.37: Distribuição de freqüências para peso de mexilhões da localidade de Sambaqui

Peso	Freqüências	Porcentagens
$8 < peso \leq 11$	3	8,57
$11 < peso \leq 14$	6	17,14
$14 < peso \leq 17$	5	14,29
$17 < peso \leq 20$	7	20,00
$20 < peso \leq 23$	4	11,43
$23 < peso \leq 26$	4	11,43
$26 < peso \leq 29$	2	5,71
$29 < peso \leq 32$	2	5,71
$32 < peso \leq 35$	1	2,86
$35 < peso \leq 38$	1	2,86

d) Calcule o coeficiente de variação para cada local e interprete. A conclusão é a mesma do item c? Qual das duas conclusões é a definitiva?.

4. A tabela 2.37 apresenta uma amostra de valores de peso de carne de mexilhão do Sambaqui. a) Construa um histograma. A distribuição apresenta a forma aproximada do modelo normal? Justifique.

b) Localize no histograma a classe que contém o percentil de ordem 90 (P_{90}). Interprete este valor.

c) Acima de que peso encontram-se 85% (Calcule o P_{15}) dos mexilhões?

2.2.3 O Uso da Mediana e dos Quartis na Interpretação de um Conjunto de Dados

O objetivo do uso da mediana e dos quartis é obter informações sobre a forma, o valor

Tabela 2.38: Dados de crescimento do pseudobulbo de *Laelia purpurata, Florianópolis, SC.*

Luz Direta	1,6	1,6	1,9	1,9	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,4	2,5	2,5	
	2,7	3,4	3,4	3,7	3,9	4,2	4,8	6,3	6,5	7,2	8,8	9,4	9,5
Luz Indireta	1,4	1,9	2,8	3,1	3,5	3,5	3,6	3,9	4,3	4,5	4,6	4,8	
	6,3	6,5	6,7	6,7	6,8	6,9	8,1	8,6	10,4	12,7	16,3	16,8	16,9

Tabela 2.39: Cálculo dos quartis e extremos para dados de crescimento do pseudobulbo de *Laelia purpurata*

	Md	Q_1	Q_3	E_i	E_s	$Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$	$Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$
Luz direta	2,7	2,1	4,8	1,6	9,5	-1,95	8,85
Luz indireta	6,3	3,6	8,1	1,4	16,9	-3,15	14,85

representativo, a dispersão e os valores discrepantes da distribuição dos dados observados. Através destas estatísticas é possível obter-se todas as informações relevantes de uma distribuição, ou seja, podemos responder às principais questões da pesquisa.

Sabemos que a média e o desvio padrão são afetados, de forma exagerada, por valores extremos (valores altos ou baixos), portanto, não são medidas indicadas para distribuições assimétricas, pois não representam bem a realidade dos fatos. Além disso, somente com a média e o desvio padrão não temos idéia da forma como os dados se distribuem. A sugestão é fazer uso das seguintes medidas:

i) Mediana.

ii) Os valores extremos (o menor valor e o maior valor) do conjunto de dados.

iii) O 1^{o} e 3^{o} quartis.

Obtemos, então, o que se denomina na literatura, por esquema dos cinco números ou esquema extremos-e-quartis.

Exemplo: Foram tomadas duas amostras de tamanhos igual a 25 observações, de crescimento do pseudobulbo de *Laelia purpurata*, sob duas condições de luminosidade (com luz direta e com luz indireta). Os dados estão apresentados na tabela 2.38. Os resultados dos cálculos da mediana e dos quartis, juntamente com os extrtemos E_i e E_s, são apresentados na tabela 2.39. Nesta tabela, as duas últimas colunas representam um critério para identificar a presença de valores discrepantes, o qual passamos a descrever.

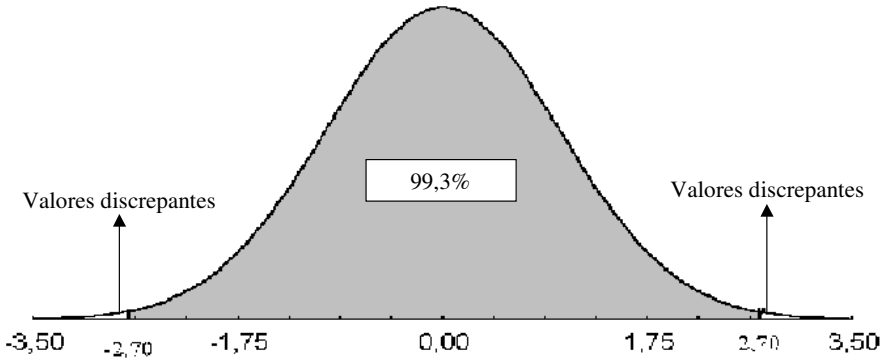


Figura 2.33: Área sombreada (99,3%) entre os pontos limites na distribuição normal. A área não sombreada corresponde aos valores discrepantes e é igual a 0,7%

Valores Discrepantes (em inglês: Outliers)

Com o uso dos quartis também é possível verificar (detectar) se um ou mais valores da distribuição dos dados são considerados valores discrepantes. Se algum valor for menor do que $Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$, ou maior do que $Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$, então, esse valor é considerado *outlier*. Num conjunto de dados pode existir mais do que um valor discrepante. No exemplo, esses limites são dados por: -1,95 e 8,85, para luz direta e, -3,15 e 14,85, para luz indireta, respectivamente. Portanto, observa-se na tabela 2.38, que os valores 9,4 e 9,5 são considerados *outliers* para luz direta, e que os valores 16,3, 16,8 e 16,9, são considerados *outliers* para luz indireta.

Uma justificativa para utilizarmos o valor 1,5 nas expressões do cálculo dos valores discrepantes (deixaremos a prova para a seção 5.3.2), é que a área entre a curva normal e os pontos limites $Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$ e $Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$ é igual a 99,3%. Portanto, estamos considerando 0,7% dos valores da distribuição normal como sendo valores discrepantes ou outliers. A ilustração é dada na figura 2.33.

Como vamos utilizar esses resultados para estudar a forma de uma distribuição de dados? Para uma distribuição simétrica, em forma de sino, a chamada distribuição normal, temos a figura 2.34. Olhando-se para a figura 2.34, esperamos intuitivamente que:

1. $(Md - E_i) \cong (E_s - Md)$, ou seja, a dispersão inferior é aproximadamente igual a dispersão superior;

2. $(Md - Q_1) \cong (Q_3 - Md)$;

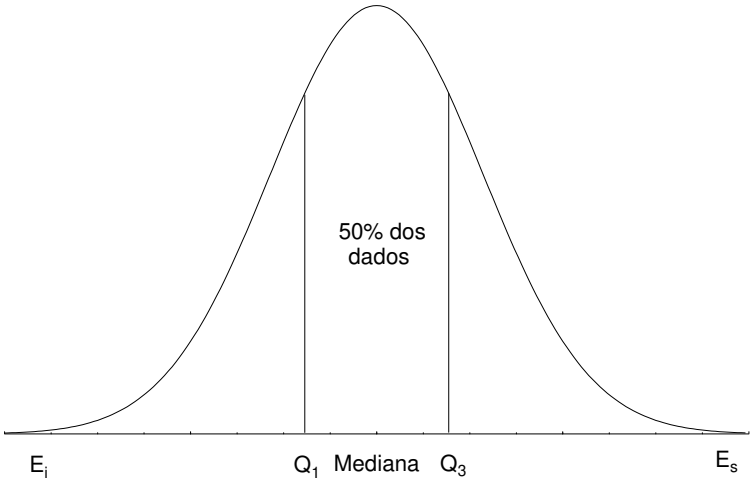


Figura 2.34: Forma da distribuição normal.

3. $(Q_1 - E_i) \cong (E_s - Q_3)$;

4. As distâncias entre a mediana e os quartis sejam menores do que as distâncias entre os extremos e os quartis, ou seja, $(Md - Q_1)$ e $(Q_3 - Md)$ sejam menores do que $(Q_1 - E_i)$ e $(E_s - Q_3)$.

2.2.4 Desenho Esquemático (em inglês leia-se *Box Plot)*

As informações obtidas na seção 2.2.3 podem ser representadas graficamente num desenho esquemático, como ilustrado na figura 2.35. Os programas estatísticos de língua inglesa trazem esta figura com o nome de *box plot*. A seguir faremos comentários sobre a construção e interpretação do desenho esquemático da figura 2.35.

O primeiro passao é construírmos o eixo e a escala para a variável resposta; no exemplo, para a variável comprimento do pseudobulbo, foi feita uma escala de 0 a 18 cm, com intervalos de 2 cm. O desenho esquemático fornece uma medida de posição central dos dados através da mediana. As medianas valem 2,7 cm e 6,3 cm, para luz direta e indireta, respectivamente, indicando que o crescimento de pseudobulbos é maior para luz indireta. Observe, na legenda da figura 2.35, que as medianas estão representadas por quadradinhos vazios dentro das "caixas" (retângulos). O desenho esquemático, também, dá uma idéia da dispersão, ou contrariamente, da concentração dos valores, através do intervalo interquartílico $(Q_3 - Q_1)$. Os desvios interquartílicos valem 2,7 cm e 4,5 cm, para luz direta e indireta, respectivamente, indicando que o crescimento de pseudobulbos é mais disperso para luz indireta. Observe,

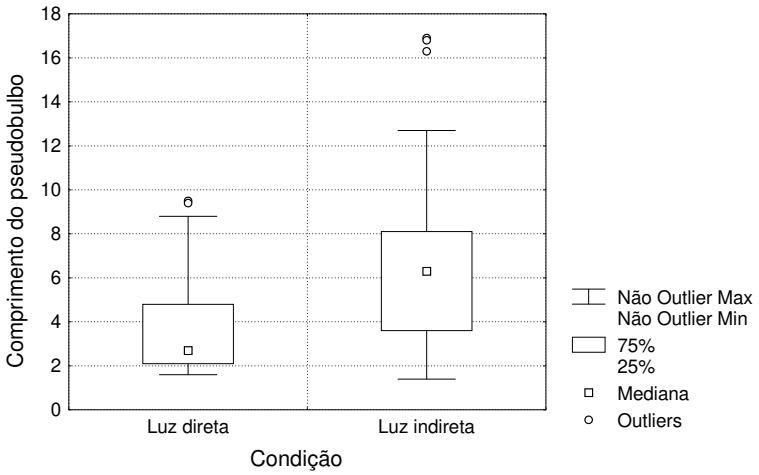


Figura 2.35: Desenho esquemático para comprimento de pseudobulbos de *Laelia purpurata* para luz direta e indireta.

na legenda da figura, que o desvio interquartílico contém 50% das observações, na faixa de 25% (Q_1) a 75% (Q_3) e é representado graficamente por uma "caixa". Os comprimentos das caudas são dados pelas linhas contínuas que vão da "caixa" (retângulo) aos valores mais afastados que não sejam *outliers*. Observe na tabela 2.38 que os valores superiores mais afastados, que não são *outliers*, são iguais a 8,8 e 12,7, para luz direta e indireta, respectivamente. Os valores inferiores mais afastados, que não são *outliers*, são iguais a 1,6 e 1,4, para luz direta e indireta, respectivamente. Os *outliers* estão representados por pequenos círculos vazios e observa-se na figura 2.35 a presença dos mesmos em ambos os ambientes. Não se observa valores discrepantes para os valores inferiores das distribuições.

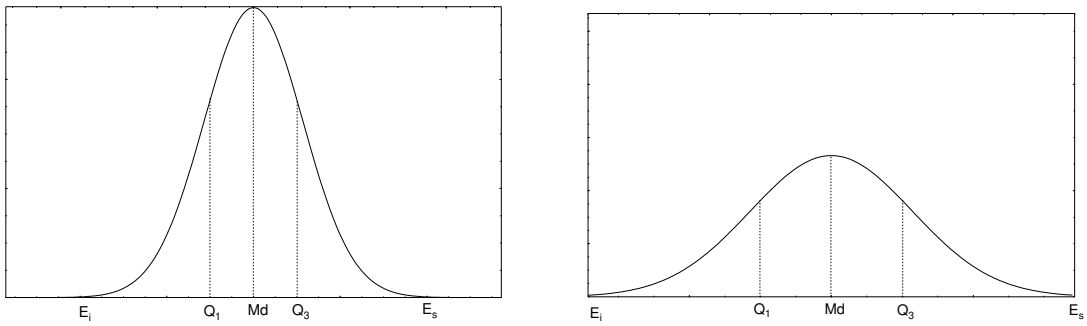
Nas figuras 2.36 e 2.37 temos o comportamento dos quartis e mediana quanto à dispersão e à assimetria. As posições relativas dos valores Q_1, Q_3 e Md dão uma idéia da assimetria e dispersão da distribuição. No nosso exemplo, a distribuição com luz direta é mais assimétrica e menos dispersa do que com luz indireta.

Observe na figura 2.38 como fica o desenho esquemático para uma distribuição normal. Podemos ver claramente que as amostras para luz direta e indireta não são originárias de populações com distribuição normal.

Exercícios resolvidos

1. Construir o desenho esquemático para a variável rendimento médio de grãos, em kg/ha, da tabela 2.1. Os valores da mediana e dos quartis foram calculados considerando os dados individualmente, isto é, não são agrupados em classes, e aparecem na legenda da figura 2.39. Encontre estes valores. Este desenho esquemático foi feito no programa Statistica.

Extremos-e-quartis e a dispersão de uma distribuição

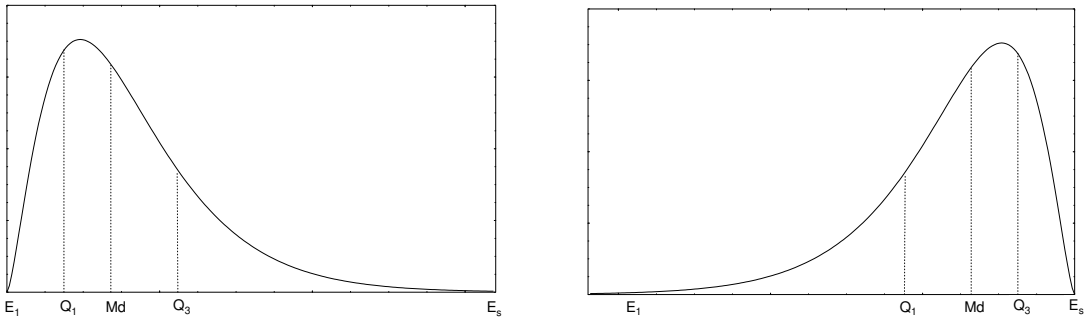


(a) Menor dispersão do que 2.36(b)

(b) Maior dispersão do que 2.36(a)

Figura 2.36: Em distribuições dispersas os valores dos quartis e extremos ficam mais afastados da mediana

Extremos-e-quartis e a assimetria de uma distribuição



(a) Assimetria à direita

(b) Assimetria à esquerda

Figura 2.37: Em distribuições assimétricas a distância entre a Md e Q_1 ou E_i é diferente da distância entre Md e Q_3 ou E_s

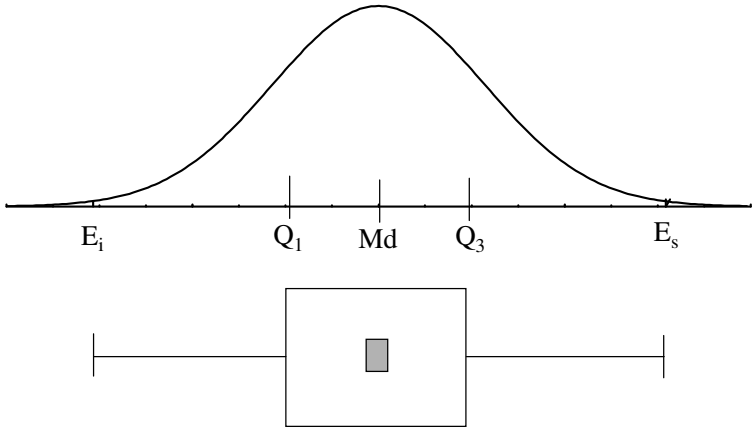


Figura 2.38: Desenho esquemático para uma distribuição normal.

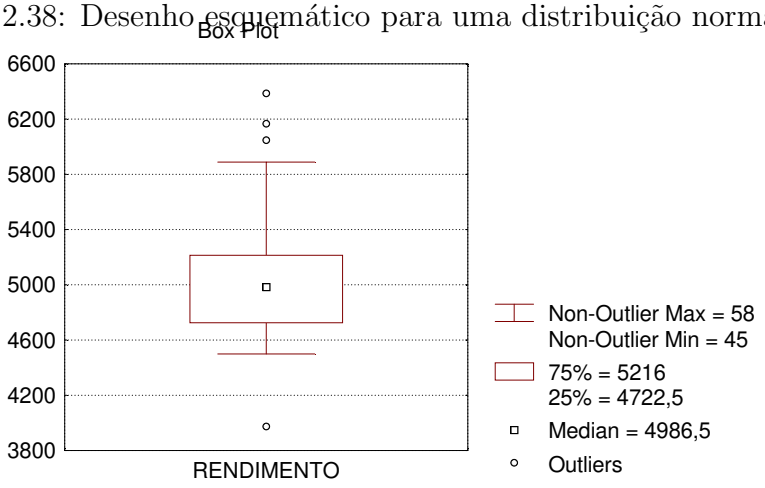


Figura 2.39: Desenho esquemático para rendimento de grãos.

Obtenha informações relevantes sobre a variável em estudo. Você saberia fazer esta figura na mão? O rendimento médio é 4986,5 kg/ha. O desvio interquartílico vale 493,5 kg/ha. São observados 4 valores discrepantes, um híbrido com produção aquém dos demais e, 3 híbridos com produções acima dos demais. A distribuição é assimétrica à direita, portanto, não segue uma distribuição normal.

2. Na figura 2.40 representa-se duas distribuições de freqüências, uma para local Cultivo e outra para Mangue. Os resultados referem-se a variável número total de hemócitos no bivalve *Crossostrea rhizophorae* coletados em ambiente de cultivo e mangue. Descreva e compare as principais informações (valor típico, simetria, dispersão, outliers) das duas distribuições.

O número total mediano de hemócitos nos dois locais é praticamente o mesmo e, em torno de $2,5.10^{-3}/mm^3$. As duas distribuições são assimétricas. No mangue, a distribuição

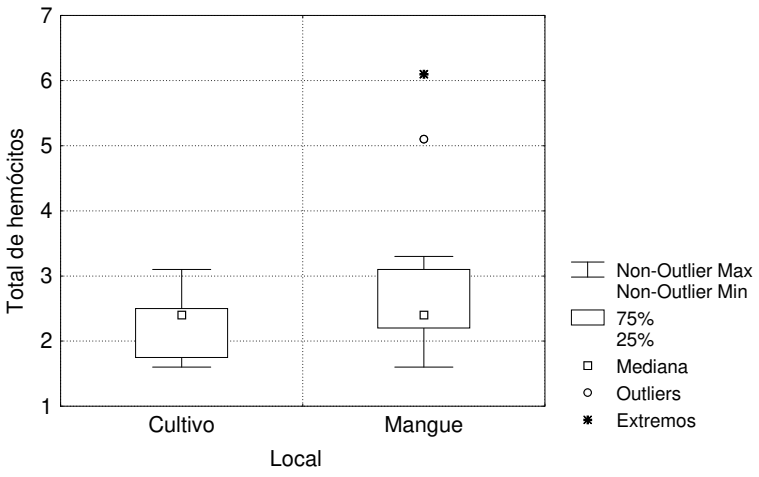


Figura 2.40: Desenho esquemático para número total de hemócitos em dois locais.

Tabela 2.40: Produção de cana-de-açúcar em toneladas por hectare

Variedade 1	65	68	75	76	77
	78	80	80	82	86
Variedade 2	88	89	90	91	92
	93	95	96	97	97
	99				

apresenta valores discrepantes.

2.2.4.1 Exercícios Propostos

1. Para se estudar o comportamento de duas variedades de cana-de-açúcar, realizou-se um experimento onde foram obtidos os resultados indicados na tabela 2.40.

a) Calcular a Md, Q_1, Q_3, $Q_3 - Q_1$, $Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$ e $Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$ para cada uma das variedades.

b) Faça o desenho esquemático múltiplo para os dados das variedades 1 e 2.

c) Compare os dois conjuntos de dados através do desenho do item b).

2. Para se estudar o comportamento de uma planta típica de dunas, a *Hydrocotille sp*, quanto ao seu desenvolvimento, mediu-se o tamanho do pecíolo (cm), em duas áreas: seca e úmida. Selecionou-se de cada uma dessas áreas, amostras aleatórias de plantas e mediu-se o tamanho dos pecíolos. Os dados são dados na tabela 2.41.

a) Calcular a Md, Q_1, Q_3, $Q_3 - Q_1$, $Q_1 - 1,5(Q_3 - Q_1)$ e $Q_3 + 1,5(Q_3 - Q_1)$ para cada uma das variedades.

b) Faça o desenho esquemático múltiplo para os dados das áreas seca e úmida.

Tabela 2.41: Tamanho de pecíolos de *Hydrocotille sp*

Área úmida				Área seca			
13,8	15,6	16,1	16,6	7,3	8,4	9,0	10,4
14,3	15,8	16,3	16,8	7,6	8,4	9,0	10,4
14,5	15,8	16,3	16,8	7,8	8,4	9,3	10,9
15,0	15,8	16,3	16,9	7,8	8,6	9,3	10,9
15,0	15,8	16,3	17,0	8,0	8,6	9,3	11,7
15,5	16,0	16,5	17,0	8,2	8,6	9,6	11,7
15,5	16,0	16,5	17,2	8,2	8,6	9,6	12,0
15,5	16,0	16,6	17,4	8,3	9,0	9,8	
15,6	16,1	16,6		8,3	9,0	9,8	

c) Compare os dois conjuntos de dados, quanto as principais características, através do desenho do item b).

3. Verifique, construindo os desenhos esquemáticos para os dados da tabela 2.36, se existem valores discrepantes. Obs. utilize os cálculos já realizados neste exercício.

2.2.5 Coeficiente de Correlação

É comum na prática o interesse em se analisar o comportamento conjunto de duas ou mais variáveis quantitativas. Nessa seção trataremos do estudo de correlação entre duas variáveis quantitativas, porém, a generalização para mais de duas variáveis é possível. Vamos pensar que estamos interessados em obter uma medida estatística que indique se existe ou não relação entre duas variáveis, qual a magnitude e o sinal dessa relação. Muitas vezes estamos interessados em obter uma medida estatística que indique a força da *relação linear* entre duas variáveis quantitativas X e Y. Por exemplo, queremos verificar se existe correlação entre doses de nitrogênio e a produção de milho ou, então, estudar o relacionamento entre a porcentagem de nucleotídeos totais e a temperatura em graus centígrados. Uma medida de correlação linear muito utilizada na prática é o *coeficiente de correlação de Pearson*.

Diagrama de Dispersão

Um primeiro passo para verificar se existe correlação entre duas variáveis quantitativas é construir um gráfico de dispersão, que nada mais é do que a representação gráfica dos pares

Tabela 2.42: Dados de produção de matéria seca e radiação fotossintética ativa

Produção	10	60	110	160	220	280	340	400	460	520
Radiação	18	55	190	300	410	460	570	770	815	965

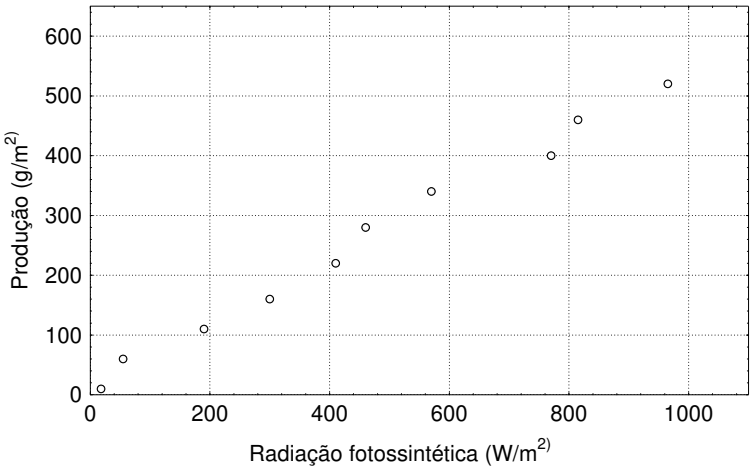


Figura 2.41: Diagrama de disperão das variávies produção e radiação fotossintética

de valores num sistema cartesiano. No eixo das abcissas colocamos a variável X e no eixo das ordenadas a variável Y.

Exemplo. Considere os dados referentes a produção de matéria seca de uma planta (Y) e a quantidade de radiação fotossintética ativa (X). Os dados obtidos experimentalmente são apresentados na tabela 2.42.

O diagrama de dispersão é mostrado na figura 2.41. Através da pura observação da distribuição dos pontos, concluímos que existe uma dependência entre as variáveis produção *(Y)* e radiação *(X)*, porque no conjunto das observações, a medida que aumenta a radiação fotossintética, também aumenta a produção de matéria seca. Em termos práticos, isso significa que conhecendo-se a quantidade de radiação ajuda a prever a produção de matéria seca.

Exemplo. Deseja-se saber se existe correlação entre o espaçamento das linhas na cultura da soja *(X)* e a fração da radiação solar extinta pela planta (*Y*). Para atender a esse objetivo foram coletados pares de valores das duas variáveis. Os resultados otidos foram:

Radiação	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
Espaçamento	0,53	0,51	0,48	0,45	0,44	0,41	0,40	0,39	0,36	0,30

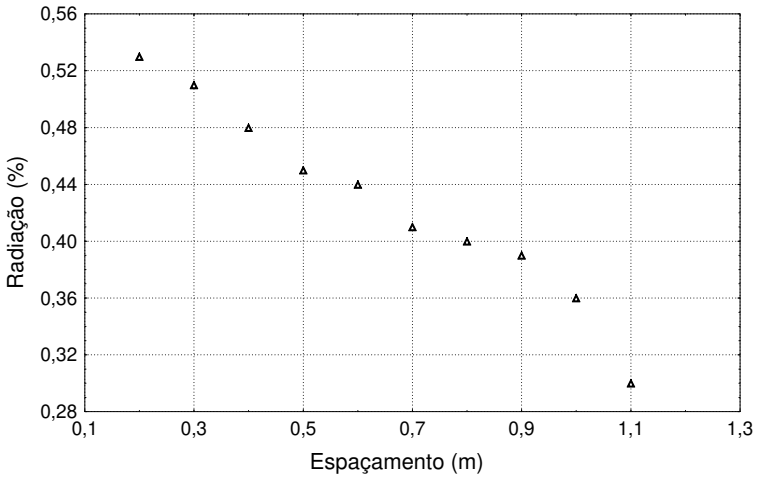


Figura 2.42: Diagrama de disperão das variávies radiação e espaçamento

Tabela 2.43: Valores de salinidade (g/l) e temperatura para a região III da Lagoa da Conceição

Estação	Temperatura *(Y)*	Salinidade *(X)*
23	24,0	3,85
23A	23,0	9,61
24	23,0	2,26
25	26,0	2,06
26	25,5	2,89
27	25,0	9,61
27A	24,3	10,58
28	23,0	11,40

Observando-se o gráfico 2.42 verificamos uma dependência inversa entre espaçamento e radiação, ou seja, aumentando-se o espaçamento entre linhas ocorre uma diminuição na fração da radiação solar extinta pela planta.

Exemplo. Uma pesquisadora esta interessada em verificar se existe dependência entre a salinidade (g/l) e a temperatura para a região III da Lagoa da Conceição. Os dados estão descritos na tabela 2.43.

O diagrama de dispersão é mostrado na figura 2.43. Olhando-se para o gráfico 2.43, não observamos um relacionamento linear entre a salinidade e a temperatura, ou seja, os resultados não indicam que aumentando-se a salinidade existe uma diminuição ou um aumento da temperatura.

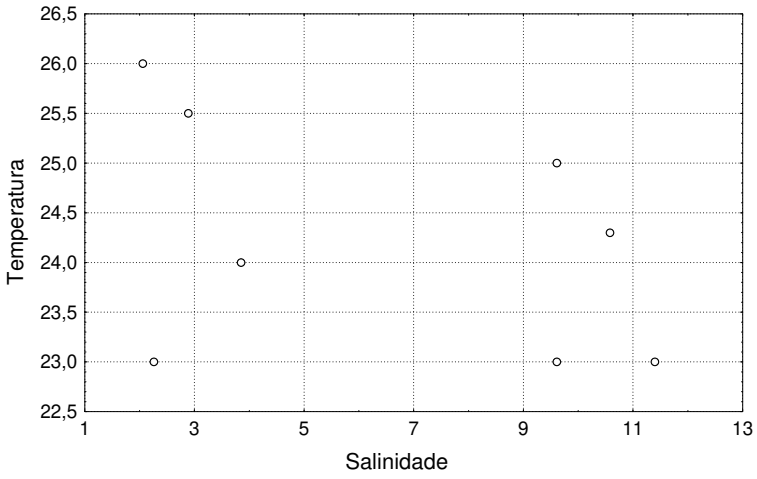


Figura 2.43: Diagrama de disperão das variávies salinidade e temperatura

O Coeficiente de Correlação

O coeficiente de correlação, representado pela letra r, é utilizado para quantificar a associação entre duas variáveis quantitativas. Indica o quanto a nuvem de pontos aproxima-se de uma reta. Salientamos que duas variáveis podem apresentar uma associação, por exemplo, curvilínea, ao invés de linear. Neste curso trataremos somente de associação linear entre duas variáveis. O coeficiente de correlação, (r), é uma medida estatística que assume valores entre

$$-1 \leq r \leq 1,$$

onde $r = -1$ indica uma relação linear inversa perfeita e, $r = 1$ indica uma relação positiva perfeita entre as variáveis. Quando o valor de r for igual a zero, significa que não existe associação entre as variáveis.

Considere a figura 2.44. Aqui, através de uma transformação, a origem foi transportada para o centro da nuvem de pontos, então, a origem do sistema é dado pelo par $(\bar{x}, \bar{y})$. Tecnicamente foi feita uma translocação de eixos. Notamos que a grande maioria dos pontos estão situados no 1^{o} e 3^{o} quadrantes. Nesses quadrantes as coordenadas têm o mesmo sinal e, portanto, o produto será sempre positivo. Assim, se para cada ponto fizermos o produto de suas coordenadas e somarmos esses produtos, o resultado será um número positivo, pois existem mais produtos positivos do que negativos. Portanto, $r > 0$. Isto significa uma associação positiva entre as variáveis.

Para a dispersão da figura 2.45 a soma dos produtos das coordenadas é na maioria negativa. Isto acarreta um $r < 0$, portanto, caracterizando uma relação negativa (uma cresce enquanto a outra decresce) entre as variáveis .

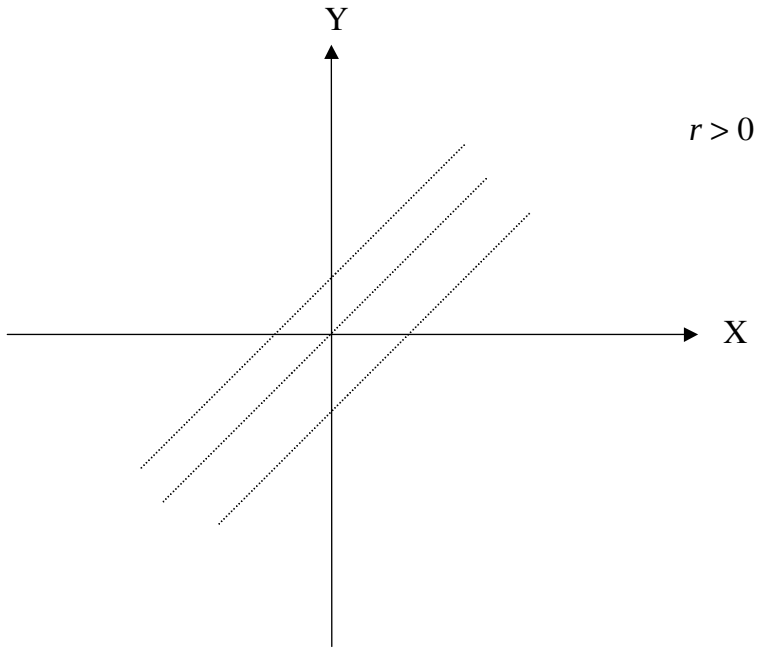


Figura 2.44: Correlação positiva

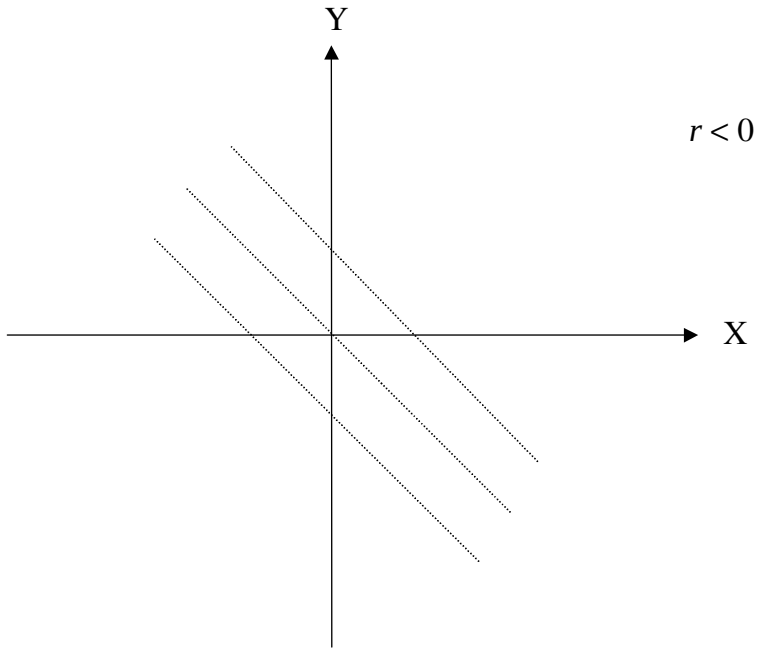


Figura 2.45: Correlação negativa

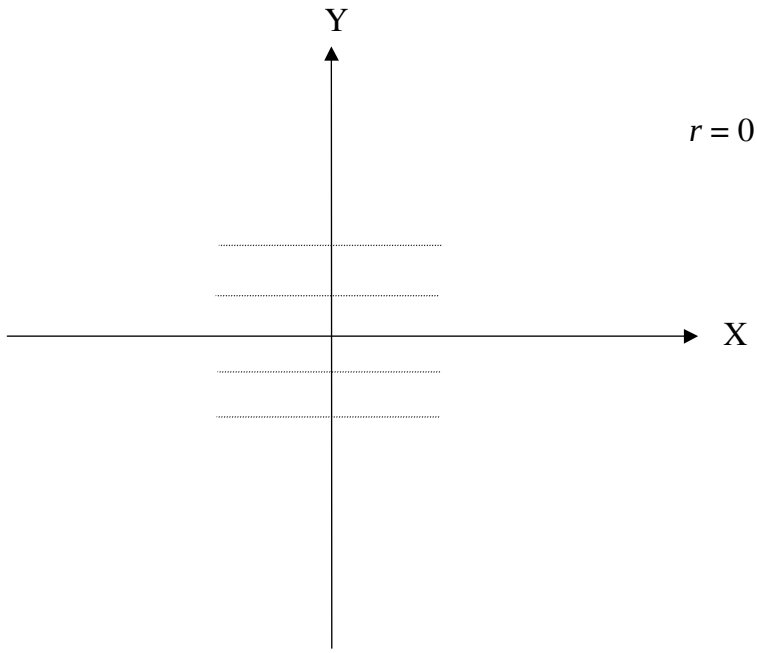


Figura 2.46: Correlação nula

Para a dispersão da figura 2.46 a soma dos produtos das coordenadas será próxima de zero. Portanto, $r \cong 0$, indicando que não existe associação entre as variáveis.

Exemplo. Considere os dados referentes à produção de matéria seca de uma planta *(Y)* e a quantidade de radiação fotossintética ativa (X), mostrados na tabela 2.42 e, que, desejamos saber se existe associação entre a produção e a radiação e qual a grandeza desta associação. Pela figura 2.41 percebe-se um relacionamento linear entre elas, agora, desejamos quantifica-lo através do cálculo do coeficiente de correlação, o qual passamos a fazer passo a passo. Inicialmente, precisamos fazer a mudança de origem do sistema para o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde $\overline{x} = 455,30$ e $\overline{y} = 256,00$. Os resultados encontram-se nas colunas 4 e 5 da tabela 2.44. Existe, ainda, um problema quanto à escala usada. A variável X, é dada em g/m^2, e Y, é dada em W/m^2, como X tem maior dispersão, o produto ficará mais afetado pelos resultados de X do que de Y. Para corrigir isso, podemos reduzir as duas variáveis para uma mesma escala, isso é obtido dividindo-se os desvios pelos respectivos desvios padrões das variáveis, onde: $\sigma_X = 308,1263$ e $\sigma_Y = 164,4506$. Observe que são os desvios padrões populacionais. Esses novos valores estão nas colunas 6 e 7 da tabela 2.44. Na última coluna da tabela, indica-se os produtos das variáveis padronizadas; a soma dos mesmos, cujo valor é igual a 9,953 que, como esperávamos, é positiva. Para completar o cálculo do coeficiente de correlação basta dividir 9,953 pelo número de pares de valores (média), cujo valor é igual

Tabela 2.44: Etapas intermediárias para o cálculo do coeficiente de correlação

Observação	x	y	$(x-\bar{x})$	$(y-\bar{y})$	$Z_x=(x-\bar{x})/\sigma_x$	$Z_y=(y-\bar{y})/\sigma_y$	Z_xZ_y
1	18	10	-437,3	-246,0	-1,419	-1,496	2,123
2	55	60	-400,3	-196,0	-1,299	-1,192	1,548
3	190	110	-265,3	-146,0	-0,861	-0,888	0,764
4	300	160	-155,3	-96,0	-0,504	-0,584	0,294
5	410	220	-45,3	-36,0	-0,147	-0,219	0,032
6	460	280	4,7	24,0	0,015	0,146	0,002
7	570	340	114,7	84,0	0,372	0,511	0,190
8	770	400	314,7	144,0	1,021	0,876	0,894
9	815	460	359,7	204,0	1,167	1,240	1,448
10	965	520	509,7	264,0	1,654	1,605	2,656

a:

$$\text{Correlação(X,Y)} = \frac{9,953}{10} = 0,9953.$$

Portanto, para esse exemplo, o grau de associação linear está quantificada em 0,9953. Indicando uma relação linear muito forte positiva entre as duas variáveis.

Uma fórmula prática para o cálculo do coeficiente de correlação é dada por:

$$Corr(X,Y) = \frac{n(\sum xy) - (\sum x \sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}. \tag{2.14}$$

Exemplo. Vamos considerar os dados de produção de matéria seca e a quantidade de radiação fotossintética para mostrar os cálculos da estatística 2.14. Os cálculos intermediários estão desenvolvidos na tabela 2.45. O valor do coeficiente de correlação por 2.14 é:

$$Corr(X,Y) = \frac{10(1669880) - (4553)(2560)}{\sqrt{10(3022399) - 4553^2}\sqrt{10(925800) - 2560^2}} = \frac{5043120}{5067155,33} = 0,9953.$$

2.2.5.1 Exercícios propostos

1. A tabela 2.46 apresenta os valores de condutividade (mho) e salinidade (g/l) para a região III da Lagoa da Conceição.

a) Construir o gráfico de dispersão. Conclua sobre a dependência entre as variáveis X e Y.

b) Quantifique a dependência entre X e Y através do coeficiente de correlação. Existe uma dependência forte, média ou fraca?

2. Um estudo de vida de prateleira do café torrado e moído foi realizado. Os testes sensoriais foram iniciados a partir do 9º dia de estocagem e depois a intervalos de mais ou

Tabela 2.45: Etapas intermediárias para o cálculo do coeficiente de correlação (fórmula operacional)

Observação	x	y	x^2	y^2	xy
1	18	10	324	100	180
2	55	60	3025	3600	3300
3	190	110	36100	12100	20900
4	300	160	90000	25600	48000
5	410	220	168100	48400	90200
6	460	280	211600	78400	128800
7	570	340	324900	115600	193800
8	770	400	592900	160000	308000
9	815	460	664225	211600	374900
10	965	520	931225	270400	501800
Totais	4553	2560	3022399	925800	1669880

Tabela 2.46: Valores de condutividade (mho) e salinidade (g/l) para a região III da Lagoa da Conceição

Estação	Condutividade (Y)	Salinidade (X)
23	19,92	3,85
24	11,78	2,26
25	14,11	2,06
26	16,10	2,89
27	36,52	9,61
28	51,46	11,40

Tabela 2.47: Notas médias de aroma de café torrado e moído

Sessão de avaliação	Tempo de estocagem (dias)	Resultado médio da equipe de provadores para cada amostra		
	x	y_1	y_2	y_3
1	9	4,8	4,7	4,7
2	14	4,0	4,7	4,8
3	22	3,7	3,7	3,5
4	29	3,2	3,5	3,2
5	36	3,7	3,0	3,3
6	43	2,5	2,8	2,7

menos 7 dias. Em cada época de avaliação sensorial três amostras (pacotes) foram obtidas ao acaso. Seis provadores treinados avaliaram as três amostras simultaneamente, julgando o produto quanto ao aroma em uma escala descritiva de 1 a 6 pontos: 6 = excelente; 5 = bom; 4 = aceitável; 3 = pouco aceitável; 2 = inaceitável e 1 = não bebível. Os resultados obtidos são dados na tabela 2.47.

a) faça o diagrama de dispersão entre as variáveis tempo e média de aroma;

b) calcule o coeficiente de correlação entre as duas variáveis e faça uma conclusão.

2.2.6 Ajuste da Equação de uma Reta

O coeficiente de correlação dá um número que resume o grau de relacionamento linear entre duas variáveis, por exemplo, $r = 0,90$; o ajuste de um modelo linear simples tem como resultado uma equação matemática que descreve esse relacionamento. A partir do momento que temos um modelo ajustado, o conjunto de dados passa a ser representado através deste. Vamos procurar estabelecer uma equação matemática linear, isto é, ajustar a equação de uma reta para descrever o relacionamento entre duas variáveis. Olhando-se para a figura 2.41, observa-se que existe uma relação linear positiva entre as variáveis produção (Y) e radiação (X), portanto, podemos ajustar a equação de uma reta aos dados. As variáveis Y e X são também denominadas de variáveis *dependentes* e *independentes*, respectivamente.

Utilização:

1. Temos duas variáveis que medem aproximadamente a mesma coisa, mas uma delas é relativamente dispendiosa, ou difícil de lidar, enquanto que a outra não. Por exem-

plo, a resistência e a dureza de um material podem estar relacionadas, de modo que conhecendo-se a dureza podemos estimar a resistência. Se o teste de resistência destroi o material, enquanto que o teste de dureza não o destroi, uma pessoa interessada em estimar a resistência, obviamente preferirá confiar nos resultados do teste de dureza para estimar a resistência. A finalidade de uma equação de regressão seria então *estimar* valores de uma variável, com base em valores conhecidos da outra. Esse estudo também é conhecido como calibração da equação de regressão.

2. Outra aplicação das equações de regressão é explicar valores de uma variável em termos da outra. Isto é, podemos suspeitar de uma relação de *causa* e *efeito* entre duas variáveis. Por exemplo, quantidade de fertilizante e produção de trigo.

3. Predizer valores *futuros* de uma variável. Por exemplo, predizer produções futuras.

A Equação da Reta

Uma reta é dada pela equação matemática:

$$y_i = \alpha + \beta x_i$$

onde o parâmetro α representa o ponto onde a reta corta o eixo dos y e o parâmetro β é o coeficiente angular, ou ainda, o quanto varia a média de y para o aumento de uma unidade da variável x. Esses parâmetros estão representados na figura 2.47. Por exemplo, a reta estimada por,

$$\hat{y}_i = 5 + 3x_i$$

intercepta o eixo das ordenadas no ponto em que $y = 5$; o coeficiente angular da reta vale 3, o que significa que a cada unidade de variação de x, correspondem 3 unidades de variação de y. Dando alguns valores para x, podemos resolver a equação para obter os valores de $\hat{y}$ (leia-se y chapéu e representa os valores estimados da variável Y).

Valores de x_i	$\hat{y} = 5 + 3x_i$
2,0	11
3,0	14
5,0	20

Devemos, através de um método adequado, estimar os parâmetros α e β.

Estimativas dos Parâmetros α e β

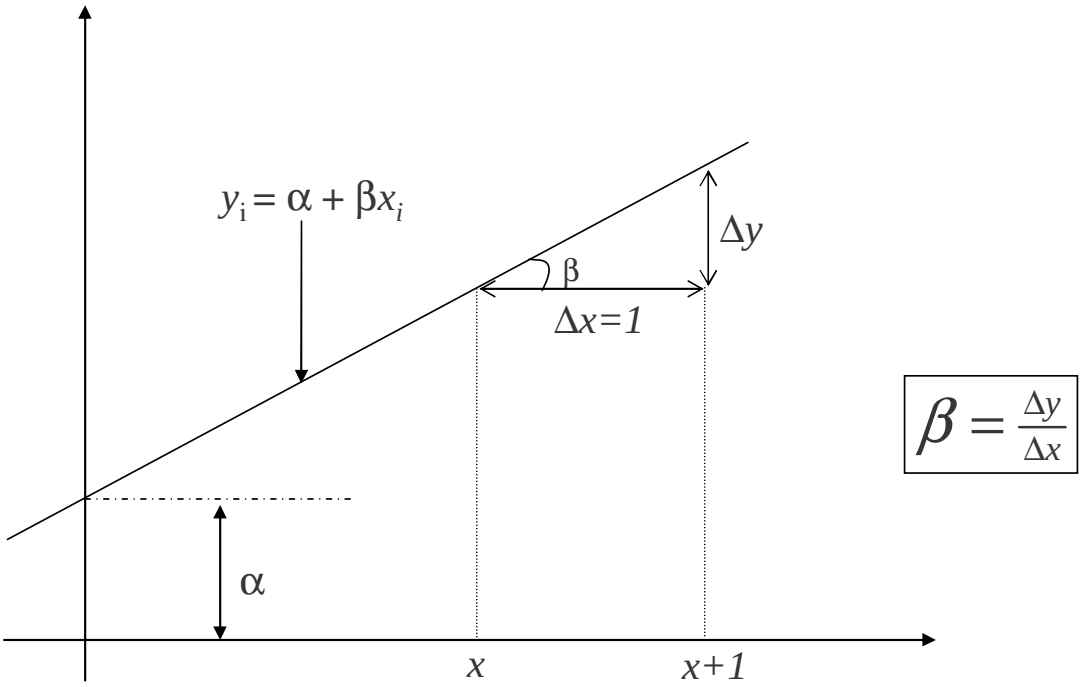


Figura 2.47: Interpretação dos parâmetros da equação de uma reta

A idéia básica na estimativa da parte funcional do modelo, $\alpha + \beta x_i$, é encontrar a reta que passa o mais próximo possível de todos os pontos observados. Representaremos esta reta por:

$$\hat{y} = a + bx$$

e a denominaremos de reta estimada pelos dados. Um critério conhecido como método dos mínimos quadrados, fornece as seguintes expressões para as estimativas dos parâmetros da equação:

$$\begin{aligned} b &= \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \\ a &= \frac{\sum y - b\sum x}{n} \end{aligned}$$

onde n é o número de pares (x, y) observados (tamanho da amostra).

Exemplo. Ilustraremos a obtenção da equação da reta com as observações de produção (Y) e radiação (X) (descritos anteriormente). A tabela 2.48 apresenta os dados originais e os cálculos intermediários para se encontrar as estimativas dos parâmetros. Encontramos:

$$b = \frac{10(1669880) - (4553)(2560)}{10(3022399) - (4553)^2} = 0,5312;$$

Tabela 2.48: Cálculos intermediários para a estimação dos parâmetros

Dados		cálculos intermediários	
x	y	xy	x^2
18	10	180	324
55	60	3300	3025
190	110	20900	36100
300	160	48000	90000
410	220	90200	168100
460	280	128800	211600
570	340	193800	324900
770	400	308000	592900
815	460	374900	664225
965	520	501800	931225
4553	2560	1669880	3022399

$$a = \frac{2560 - 0,5312(4553)}{10} = 14,1537.$$

A equação da reta estimada com base nos dados da amostra fica:

$$\hat{y}_i = 14,154 + 0,531x_i.$$

Os valores observados, juntamente com a equação estimada da reta estão na figura 2.48. Como era esperado, observa-se um bom ajuste da equação da reta aos dados observados.

A distância de cada um dos valores observados até a equação da reta é chamada de *desvio* ou *resíduo* e são representados por e_i. O cálculo dos desvios é dado por:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Por exemplo, o primeiro resíduo é dado por:

$$e_1 = 10 - (14,154 + 0,531 \times 18) = 10 - 23,71 = -13,71.$$

Para todos os dados de produção e radiação, dados na tabela 2.48, os valores ajustados

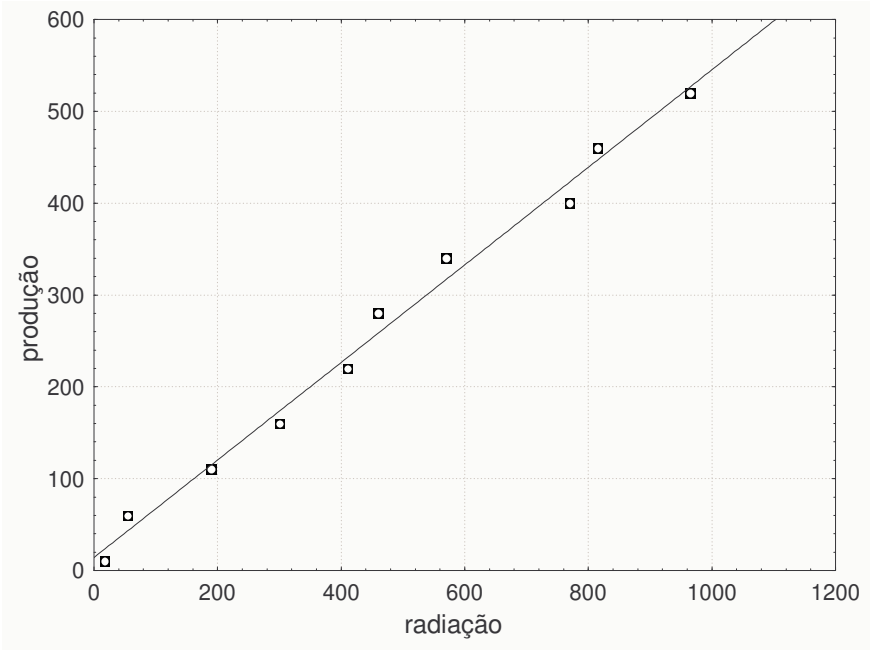


Figura 2.48: Reta ajustada aos dados observados

e os resíduos são dados por:

Valores estimados	Desvios ou resíduos
23,71	-13,71
43,37	16,63
115,08	-5,08
173,51	-13,51
231,94	-11,94
258,50	21,50
319,93	23,07
423,16	-23,16
447,07	12,93
526,74	-6,74

O gráfico dos valores ajustados, também denominados de valores estimados, versus os resíduos é dado na figura 2.49. O padrão esperado é que os pontos estejam alatoriamente distribuídos em torno do valor zero, isto é, não existe nenhum padrão nos resultados. Se ocorrer este padrão, dizemos que o modelo é adequado para representar os nossos dados. Observamos na figura 2.49 que os pontos encontram-se distribuídos ao acaso em torno do valor zero, portanto, o modelo linear simples (equação da reta), pode ser utilizado para

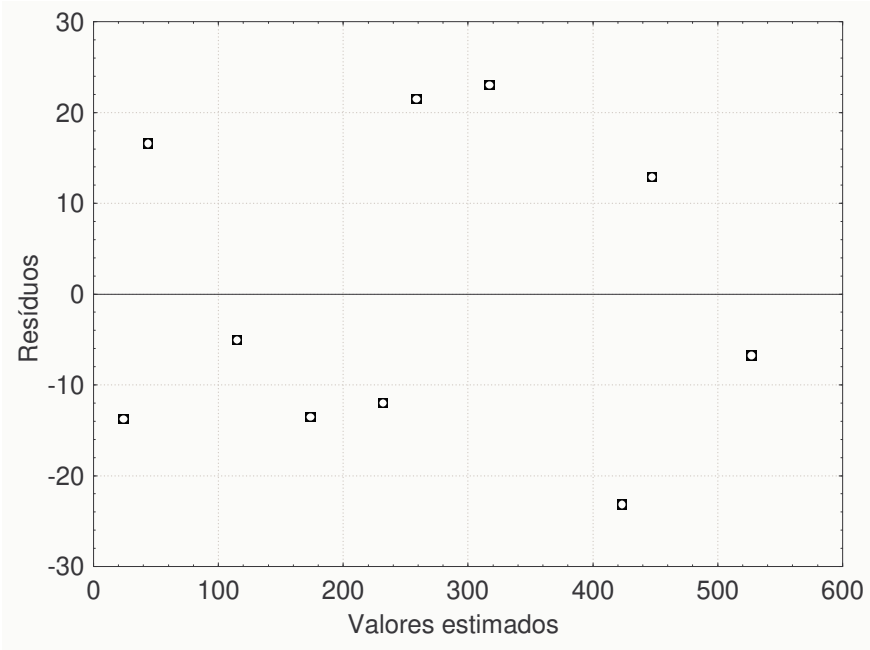


Figura 2.49: Gráfico dos valores ajustados versus resíduos

os dados amostrados. Num outro caso, se o padrão de distribuição fosse curvilíneo, um polinômio de 2º grau seria o indicado. Assim, podemos querer estimar (avaliar) a produção para um valor de radiação igual a 100. Este valor é obtido fazendo-se:

$$\hat{y}_i = 14,154 + 0,531 \times 100 = 67,254.$$

2.2.6.1 Exercícios propostos

1. a) Obtenha a equação da reta para os dados da tabela 2.46, isto é, para condutividade (Y) e salinidade (X).

b) De acordo com esta função, quais seriam os valores estimados ($\hat{y}$) para os valores de x da tabela 2.46.

c) O que você acha da discrepância entre os valores observados e estimados ($y - \hat{y}$)?

d) Encontre o valor estimado ($\hat{y}$), para salinidade igual a 5,0.

2. a) Encontre a equação da reta para os dados da tabela 2.47, ou seja, a equação do tempo de estocagem (Y) sobre o aroma.

b) Você considera que esta equação está explicando bastante da relação entre tempo de estocagem e aroma?

c) Faça o gráfico dos resíduos versus valores ajustados. Existe algum padrão na distribuição?

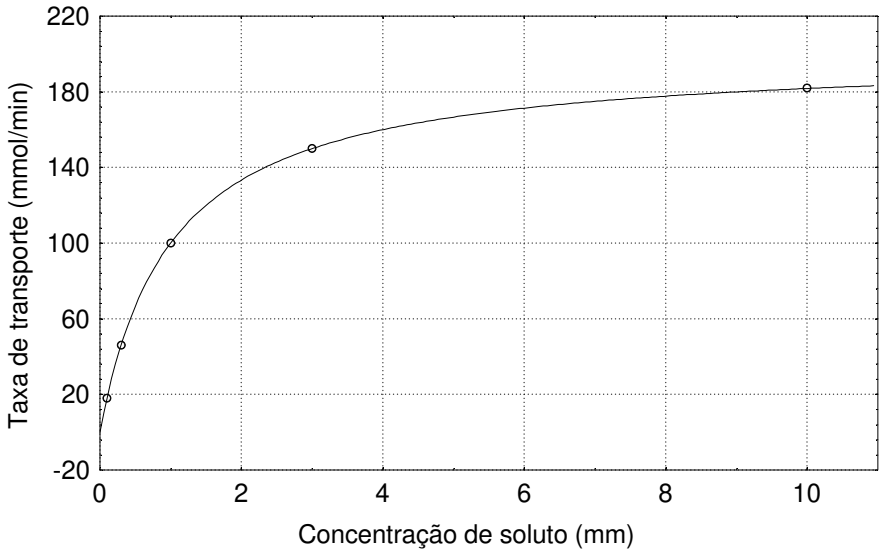


Figura 2.50: Cinética enzimática

3. (Albert et.al. 1999, página 173 e 708). A curva mostrada na figura 2.50 é descrita pela equação:

$$velocidade = V_{max}[S/(S + K_M)] \tag{2.15}$$

a qual é chamada de equação de Michaelis-Menten. A velocidade da reação enzimática (V) aumenta à medida que a concentração do substrato (S) é aumentada, até que um valor máximo (V_{max}) é atingido. Para a maioria das enzimas, a concentração de substrato na qual a velocidade da reação é metade da máxima fornece uma medida direta da força de ligação do substrato à enzima (K_M).

Para o transporte de acetado mediado por proteína carreadora, a relação entre concentração, S, e taxa de transporte, V, pode ser descrita pela equação 2.15, que descreve reações enzimáticas simples:

$$Taxa\ de\ transporte = V_{max}S/(S + K_M) \tag{2.16}$$

Desejamos, através do ajuste da equação de regressão, estimar os parâmetros V_{max} e K_M. Para facilitar a obtenção dos mesmos, fazemos uma transformação na equação 2.16, de tal forma que, os dados possam ser dispostos como uma linha reta. Fazendo-se a transformação inversa, temos:

$$1/taxa = (K_M/V_{max})(1/S) + 1/V_{max}. \tag{2.17}$$

Portanto, temos a equação de uma reta: $y = \alpha + \beta x$, onde: $y = 1/V$, $x = 1/S$, $\alpha = 1/V_{max}$ e $\beta = K_M/V_{max}$. Para os dados da tabela 2.49, encontre as estimativas dos parâmetros V_{max} e K_M, ajustando a equação de uma reta .Conhecendo-se os valores de V_{max} e K_M você

Tabela 2.49: Valores de concentração (S) e taxa de transporte (V)

S	V	1/S	1/V
0,1	18	10,0	0,056
0,3	46	3,3	0,022
1,0	100	1,0	0,01
3,0	150	0,33	0,0067
10,0	182	0,1	0,0055

pode calcular as taxas de transporte para as concentrações de 0,5 mM e 100 mM de acetato usando a equação 2.16. Encontre estes valores.

3 Modelos de Probabilidades para Experimentos Simples

3.1 Introdução

O importante estudo de probabilidade é anterior aos anos de 1500, século XVI. Nessa época , as aplicações eram dirigidas aos jogos de azar. Pessoas se utilizavam do conhecimento da teoria das probabilidades para planejar estratégias de apostas. Conta-se que um senhor conhecido como "Cavaleiro de Meré", amigo do francês Pascal (1610), e grande apreciador de jogos, solicitava ao mesmo, que calculasse suas chances de ganho.

No entanto, somente no século XX, é que o cálculo de probabilidade teve um desenvolvimento bastante grande, e baseado numa teoria matemática através de axiomas (condições) rigorosos, definições e teoremas.

A probabilidade é um ramo da matemática cuja grande aplicação é na estatística, como veremos a seguir. Até o presente momento do nosso curso de estatística, estudamos, de forma empírica, isto é, sem uma justificativa científica (só descrevendo e não explicando), o comportamento dos fenômenos, eventos da natureza, através da construção das *distribuições de frequências*. Aqui, temos especial interesse em experiências aleatórias, casuais, ou seja, devemos realizar o experimento para saber qual será o resultado. Por exemplo, não é possível saber qual será a produção por hectare de uma linhagem "X" de feijão, se este não for plantado, colhido e mensurado. Outros exemplos de experimentos aleatórios: 1) germinação de sementes; 2) sobrevivência de enxertos; 3) número de micronúcleos/3000 células; 4) número de plantas numa determinada área.

> Experimentos aleatórios: quando repete-se o experimento, em condições mais próximas possíveis, dão resultados geralmente diferentes.

Verificando-se os fenômenos aleatórios na natureza, construindo as suas distribuições de freqüências (conhecimento empírico), e com o surgimento da teoria da probabilidade, foi possível matematizar a natureza, isto é, criar *modelos probabilísticos* (*distribuições de probabilidades*) que representam muito bem os fenômenos da natureza. Com isso, é possível, fazendo-se algumas suposições adequadas (hipóteses, conjecturas) e sem a necessidade de se observar diretamente o fenômeno, estabelecer distribuições de probabilidades que representam muito bem as distribuições de freqüências, quando o fenômeno é observado diretamente.

Esses modelos probabilísticos são considerados hoje a espinha dorsal da estatística, pois, como veremos, todos os procedimentos inferenciais (amostra → população), são aplicações de probabilidade. Vamos ilustrar a construção de modelos probabilísticos com dois exemplos.

Exemplo 1: de um grupo de duas mulheres (M) e três homens (H), uma pessoa será sorteada para presidir uma determinada reunião. Queremos estudar as probabilidades de que o presidente seja do sexo masculino ou feminino. Suposições:

1º) Só existem duas possibilidades.

2º) Cada pessoa tem a mesma chance de ser sorteada.

Tabela 3.1: Modelo de probabilidades para o experimento:

Sexo	M	H	Total
Freqüência teórica	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Exemplo 2: o objetivo é estudar a distribuição das proporções no lançamento de um dado. Vamos construir esta distribuição através de suposições teóricas;

1º) só podem ocorrer seis faces e,

2º) considerando o dado como sendo perfeito, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes e, portanto, a proporção de ocorrência de cada face é de $\frac{1}{6}$.

Assim, o modelo teórico de freqüências para esse experimento é:

Faces do dado	1	2	3	4	5	6	Total
Freqüências	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

A primeira grande aplicação de probabilidade nas biociências, foi com as leis da hereditariedade (Mendel, 1822-1884)[2]. Outras aplicações podem ser: chance de sobrevivência (germina ou não germina), distribuição e interação de espécies animais ou vegetais, risco de doenças, ocorrência de mutações, previsão de safras, na previsão de chuvas, geadas, granizos, etc.

Uma aplicação, particularmente importante para o nosso curso, é quando um pesquisador conduz um experimento. Quando um experimento é instalado, desejamos comparar os efeitos dos tratamentos (variações de um fator a ser estudado). Para se estimar os efeitos dos

[2]Gregor Johann Mendel, botânico da Morávia.

tratamentos e também para executar os testes estatísticos é necessário o uso de repetições (aplicação do mesmo tratamento em diversas unidades experimentais e que formará a amostra de estudo), através das quais vamos ter a possibilidade de calcular a variabilidade dos dados, ou seja, a variância. O pesquisador esforça-se ao máximo para manter todas as condições experimentais o mais constantes possíveis, só deixando variar os tratamentos. Por exemplo, num experimento agrícola de campo, vamos aplicar um inseticida, herbicida ou fungicida de forma homogênea em todo o experimento; a fertilidade do solo deve ser igual para todos os tratamentos. A temperatura, a umidade, a luminosidade, devem ser mantidas constante dentro de um laboratório. A temperatura deve ser constante em todos os pontos dentro de uma estufa . E assim por diante. Pois bem, por maior que seja esse esforço para manter todas as condições experimentais o mais constantes possíveis, os valores obtidos nas repetições dos tratamentos dificilmente resultam em valores iguais, é quase com certeza absoluta que todos os valores vão diferir uns dos outros. Pode-se concluir que sempre vão existir variações. Logo, um pequisador não pode afirmar com 100% de certeza que o tratamento A é melhor que o B, e assim por diante. Portanto, todas as conclusões tomadas, ou as inferências realizadas, são feitas com certo grau de incerteza; essa incerteza nós expressamos em termos de *probabilidade*. Então, quando um pesquisador diz que o tratamento A é melhor que o B, ao nível de significância de 5%, ele admite que pode estar tomando uma decisão errônea e que a probabilidade de erro é de no máximo igual a 5%. Estes experimentos cujos resultados podem não ser os mesmos, de repetição para repetição, são chamados de *experimentos aleatórios, probabilísticos ou estocásticos.*

> *"Todas as inferências realizadas tem certo grau de incerteza expressadas por probabilidades".*

A seguir apresentamos um exemplo de um experimento no delineamento inteiramente casualizado.

Avaliação do Comportamento "In Vitro" de abacaxi *Ananas comosus* cv. Primavera

• Objetivo: determinação de um meio de cultura onde produza um maior número de mudas por explante (meristema) inoculado.

1 T3 24	7 T4 20	13 T3 12	19 T2 26	25 T5 19	31 T3 18
2 T1 42	8 T5 22	14 T6 13	20 T3 11	26 T1 26	32 T4 24
3 T5 10	9 T2 20	15 T4 13	21 T6 9	27 T5 25	33 T2 14
4 T1 35	10 T6 14	16 T2 14	22 T1 21	28 T5 9	34 T1 23
5 T2 21	11 T6 18	7 T4 11	23 T3 15	29 T6 20	35 T4 15
6 T6 7	12 T3 14	18 T1 23	24 T5 19	30 T4 20	36 T2 21

Figura 3.1: No canto superior esquerdo está indicado a unidade experimental; no centro à direita o tratamento e, no canto inferior esquerdo, está indicado o número de brotos por explante

Tratamentos:

Meio de cultura 1	(T1)
Meio de cultura 2	(T2)
Meio de cultura 3	(T3)
Meio de cultura 4	(T4)
Meio de cultura 5	(T5)
Meio de cultura 6	(T6)

• Unidade experimental: Um tubo de ensaio.

• Variáveis observadas: 1) número de brotos por explante inoculado; 2) tamanho dos brotos em cm; 3) número de folhas por broto, etc.

• Delineamento Experimental: delineamento inteiramente casualizado com 20 repetições. Obs: na figura 3.1 apresentamos esse delineamento utilizando somente os resultados de 6 repetições. Condições experimentais controladas ao máximo: Temperatura de $24°C \pm 1°C$; fotoperíodo de 16hs luz; intensidade luminosa de 4000 lux, meristemas uniformes (tamanho).

Independente de qual seja a aplicação, observa-se que quando utiliza-se do cálculo de probabilidade existe sempre um elemento do *acaso, aleatório* ou de *incerteza*, quanto a ocorrência ou não de um evento, fenômeno futuro. Assim sendo, parece improvável, em muitas situações , afirmar por antecipação, o que vai ocorrer, mas é perfeitamente possível quantificar quão provável é a ocorrência de determinado evento, fenômeno futuro.

As probabilidades são utilizadas para exprimir a chance de ocorrência de determinado evento.

3.2 Conceitos Fundamentais

Inicialmente, é interessante definirmos a notação a ser utilizada para representar algum fato, fenômeno. Existe uma relação entre a teoria dos conjuntos e a teoria das probabilidades, assim, será utilizada a notação e símbolos da teoria dos conjuntos. Os conjuntos são representados por letras maiúsculas e os seus elementos, são colocados entre chaves (A={a, e, i, o, u }).

Há duas maneiras pelas quais se pode descrever os elementos de um conjunto:

1º) Consiste em relacionar todos os elementos do conjunto, ou um número suficiente deles.

Exemplo: desejamos representar os híbridos de milho, de ciclo tardio, recomendados para a região de Chapecó, altitude menor que 800m da safra 1988/89.

A={C125, AG28, AG35, SAVE, 342-A, C408, AG401, C317}.

Outro exemplo: principais espécies do genêro Biomphalaria em Santa Catarina.

B={ *B.straminea; B.glabrata; B.tenagophila* };

2º) Consiste em formular uma regra que defina a(s) característica(s) comum(ns) aos membros do conjunto. **Exemplos:**

A={Todos os gêneros de formigas da família Formicidae};

B={Todas as espécies do gênero Biomphalaria};

C={Todas as plantas que produzem O_2};

D={Todas as espécies da família das Solanaceas};

E={Espécies do gênero Biomphalaria que são hospedeiras intermediárias do *Schistossoma mansoni* };

Essa notação será utlilizada para representar *espaços amostrais* e *eventos*.

Inicialmente, dissemos que não é necessário verificar diretamente o fenômeno para entender o seu comportamento, a sua variabilidade, enfim, a sua distribuição de freqüências e,

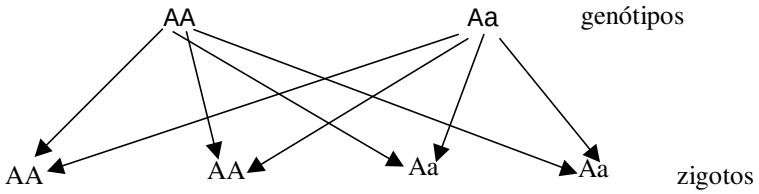


Figura 3.2: Resultados do cruzamento de genótipos

sim, que é possível, fazendo-se algumas suposições adequadas, *criar um modelo teórico* que represente muito bem essa distribuição, são os chamados *modelos probabilísticos*. Vamos ver a construção de mais um modelo de probabilidade.

Exemplo: Se cruzarmos indivíduos de genótipos AA e Aa. Queremos estudar as proporções dos resultados desse cruzamento. O gene A de um indivíduo AA encontra o gene A ou o gene a de um indivíduo Aa. As células fertilizadas tem genótipo AA e Aa, conforme figura 3.2. Observamos:

1º) Que só existem essas duas possibilidades, pois Aa e aA não são ordenados.

2º) Não existe razão nenhuma para admitir que um dos dois resultados ocorra com maior frequência, sendo assim, teremos o seguinte modelo teórico de frequências para o experimento,

Cruzamentos	AA	Aa	Total
Freqüência teórica	1/2	1/2	1

O espaço dos resultados desse experimento, ou simplesmente, *espaço amostral*, representado pela letra grega Ω (ômega), fica:

$$\Omega = \{AA, Aa\}.$$

As vezes o espaço amostral é representado pela letra S. Portanto, espaço amostral, é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um dos elementos, observações que compõem Ω chama-se de *ponto amostral*.

Agora, suponha que para o espaço amostral, $\Omega = \{AA, Aa\}$, estamos interessados no evento homozigoto, então, temos:

$$A = \{AA\}.$$

Poderíamos também estar interessados no evento heterozigoto, então, temos:

$$B = \{Aa\}.$$

Portanto, *eventos* são subconjuntos do espaço amostral, Ω, ou seja, é um conjunto de resultados de um experimento. Se um evento coincide com o espaço amostral, Ω, ele se

chama *evento certo* e temos,

$$\begin{aligned} A &= \Omega \\ A &= \{AA, Aa\} \\ A &\rightarrow \text{evento dos fenótipos com dominância.} \end{aligned}$$

Observação: o alelo A é dominante sobre a, portanto, Aa tem o mesmo fenótipo que AA.

Se um evento não possui nenhum elemento do espaço amostral, temos o *evento impossível*,

$$A = \varnothing \ (phi).$$

Exemplo: D={homozigoto recessivo}={aa}.

Quando o evento é constituído de apenas um elemento temos o *evento simples*. Como exemplos temos os eventos A e B.

Do exemplo acima, podemos fazer uma generalização. Todo o fenômeno ou experimento no qual está envolvido um elemento **casual, aleatório, ou de incerteza**, terá seu *modelo de probabilidades*.

Um modelo probabilístico fica definido, especificado, construído, no momento em que estabelecemos o espaço amostral (Ω) e as probabilidades dos pontos amostrais; para o exemplo, temos o seguinte modelo probabilístico:

Cruzamentos	AA	Aa	Total
Freqüências teóricas	1/2	1/2	1

Esse espaço amostral é *discreto*, pois podemos enumerar todos os resultados do experimento. Essa enumeração pode ser finita ou infinita.

Exemplo de modelo. Cruzamos o genótipo Aa (pai) e Aa (mãe). Os resultados dos cruzamentos estão indicados na figura 3.3.

Observações:

1. As quatro recombinações AA, Aa, aA e aa são igualmente prováveis.
2. As duas recombinações Aa e aA não são ordenadas, isto é, não é possível distingui-las biologicamente.

Logo, o espaço de resultados é:

$$\Omega = \{AA, Aa, aa\}.$$

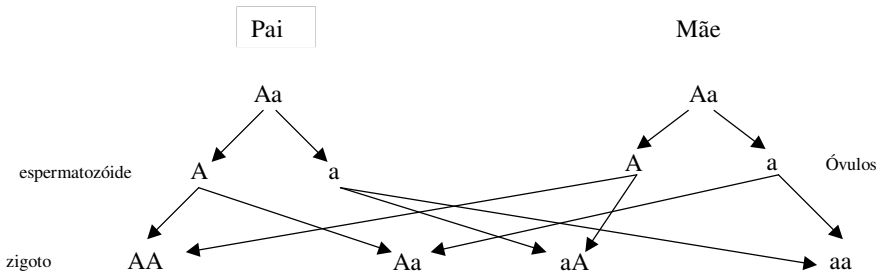


Figura 3.3: Cruzamento de genótipos

Como as recombinações são igualmente prováveis, associamos a cada uma delas a probabilidade 1/4, logo, o modelo probabilístico para o experimento fica:

Cruzamentos	AA	Aa	aa	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Aqui, novamente, o espaço amostral é discreto.

Exemplo de modelo: Em tomateiros, vamos fazer o cruzamento entre dois indivíduos homozigóticos, um sendo recessivo, $s_p s_p$, e responsável pelo hábito de crescimento determinado e o outro dominante, $S_p S_p$, responsável pelo hábito de crescimento indeterminado. Em F1 obtêm-se: $S_p s_p$. Fazendo-se a autofecundação desses indivíduos F1(F1×F1), obtêm-se as seguintes recombinações:

$$S_p S_p; S_p s_p; s_p S_p \text{ e } s_p s_p$$

todas com a mesma freqüência teórica e igual a 1/4. Veja o quadro:

	F1	
F1	S_p	s_p
S_p	$S_p S_p$	$S_p s_p$
s_p	$s_p S_p$	$s_p s_p$

Observações:

1. As quatro recombinações são igualmente prováveis.

2. As duas recombinações, $Spsp$ e $spSp$, não são ordenadas, não sendo possível diferenciá-las biologicamente.

O modelo probabilístico fica:

Cruzamentos	$S_p S_p$	$s_p S_p$	$s_p s_p$	Total
Freqüência teórica	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Observação: Um espaço amostral pode ser definido de diferentes maneiras para um mesmo experimento, dependendo dos objetivos do problema a ser estudado. Por exemplo, suponha que lancemos uma moeda cinco vezes. Se estamos interessados apenas na sequência de caras e coroas obtida, um espaço amostral é:

$$\Omega_1 = \{ckkkk, kckkk, kkckk, kkkck, ...\}.$$

Observação: são possíveis 2^5=32 pontos amostrais. Mas se estamos interessados no número de caras obtidas, então, um espaço amostral é:

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Temos, aqui, outro exemplo de espaço amostral discreto.

Exemplo: Considere um experimento que consiste em medir as alturas H de homens adultos. Um espaço amostral conveniente é:

$$\Omega = \{H : H > 0\},$$

isto é, o conjunto de todos os números reais positivos. Se A indica o evento "a altura de homens adultos é superior a 150 cm e inferior a 200 cm", então A=$\{$H:150<H<200$\}$. Esses são exemplos de espaços amostrais *contínuos*, pois o intervalo contém um número infinito de valores.

Outro exemplo: Considere um experimento que consiste em medir as alturas h de plantas de milho. Um espaço amostral conveniente é Ω=$\{$h:h>0$\}$, isto é, o conjunto de todos os números reais positivos.

3.3 Operações com Eventos

Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral Ω, são também conjuntos, logo, todas as operações realizadas com conjuntos são válidas para os eventos.

Se A e B são dois eventos de Ω, então, a operação (A$\cup$B), que lê-se: *A união com B*, significa "a ocorrência do evento A ou do evento B ou de ambos", ou seja, os pontos amostrais pertencem ao evento A ou ao evento B ou, ainda, a ambos. Essa operação é também chamada de *reunião dos eventos*. A representação gráfica é dada na figura 3.4. Esta figura é chamada de Digrama de Venn. Em aritmética assemelha-se com (A+B).

Exemplo: Se A=$\{$1,2$\}$ e B=$\{$1,5,6$\}$, então (A$\cup$B)=$\{$1,2,5,6$\}$. Observe que o ponto 1 ocorre nos dois eventos mas está relacionado uma única vez. O ponto 2 só ocorre em A e os pontos 5 e 6 ocorrem em B.

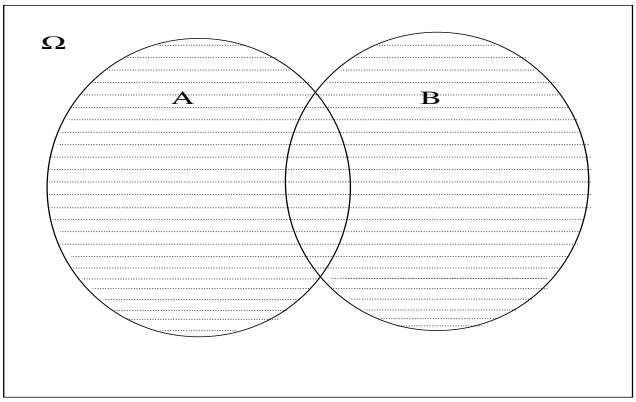


Figura 3.4: Diagrama de Venn para a reunião de eventos

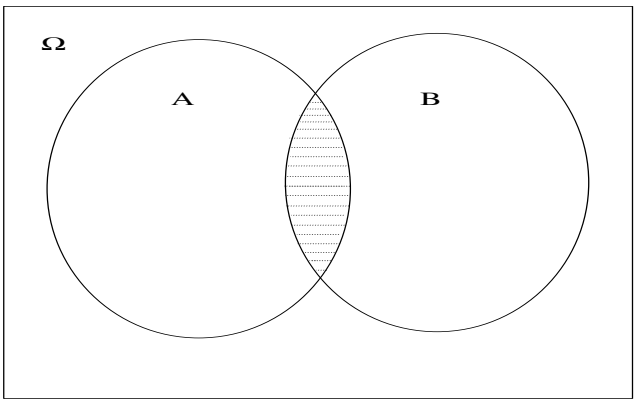


Figura 3.5: Diagrama de Venn para a intersecção de eventos

Uma outra operação entre eventos é a *intersecção*, representada pelo símbolo "$\cap$". Então, (A$\cap$B) é a ocorrência dos eventos A e B, simultaneamente, ou seja, é formado pelos pontos amostrais que pertencem ao eventos A e B. Em aritmética, assemelha-se com o produto (A$\times$B). A representação gráfica da intersecção é dada na figura 3.5.

Exemplo: Duas famílias, por exemplo, solanaceaes (pimenta, pimentão, tomate) e mirtaceaes (goiaba, pitanga, jaboticaba) de uma mesma ordem são por definição disjuntas, isto é, não possuem espécies em comum, logo sua intersecção é vazia, isto é, (A $\cap$ B) = Φ.

Exemplo: Para os eventos A=$\{1,2\}$ e B=$\{1,5,6\}$, (A$\cap$B)=$\{1\}$.

Indica-se por A^c o *complementar* do evento A, e significa a não ocorrência de A. Outra forma de representação é $\bar{A}$. A representação gráfica do complemento de um evento é dada na figura 3.6.

Exemplo: No lançamento de um dado podemos estar interessados no evento saiu face ímpar, A=$\{1,3,5\}$, qual é o evento que ocorre sempre que A não ocorre? Resposta: A^c=$\{2,4,6\}$.

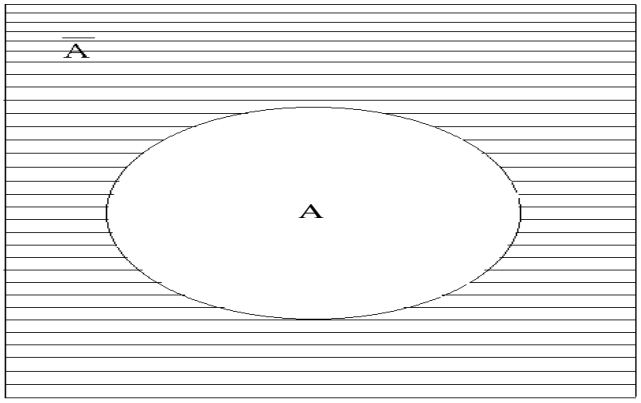


Figura 3.6: Complementar de um evento

Exemplo: Vamos considerar todas as espécies pertencentes a ordem Himenoptera como sendo o espaço amostral, Ω. Estamos interessados na família Formicidae, este é o nosso evento. Qual será o complementar desse evento? Consistirá de todas as espécies da ordem Himenoptera, mas não pertencente a família Formicidae.

Algumas outras operações envolvendo intersecção, reunião e complemento são dadas por:

$a)$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Lei de Morgan);
$b)$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Lei de Morgan);
$c)$ $A \cap A^c = \varnothing$;
$d)$ $A \cup A^c = \Omega$;
$e)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$f)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva).

Exercício. Construa os diagramas de Venn para os itens a) e b).

Eventos Mutuamente Exclusivos e Independência

Se dois eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou seja, se a ocorrência de um deles impede a possibilidade de ocorrência do outro, são chamados *eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos*.

Exemplo: considere os resultados do lançamento de um dado, Ω=$\{1,2,3,4,5,6\}$, e os eventos, A=$\{1,3,5\}$ e B=$\{2,4,6\}$, então os eventos A e B são mutuamente exclusivos pois A$\cap$B=$\varnothing$.

Exemplo: Considere como sendo Ω todas as espécies da ordem Himenoptera, e os eventos A=$\{$espécies da família Formicidae$\}$ e B=$\{$ espécies da família Apidae$\}$, então os eventos A e B são mutuamente exclusivos, pois A$\cap$B=$\varnothing$.

Dois eventos, associados a um experimento aleatório, são ditos *independentes* quando a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro.

Exemplo: vamos supor que dois alunos tentem resolver uma mesma questão em separado, ao mesmo tempo. Os eventos que consistem em que cada um dos alunos acerte a questão são independentes, pois o fato de um aluno acertar a questão não influencia no fato do outro também acertar.

Outro exemplo: Cegueira e surdez, espera-se que sejam independentes.

Em ensaios agrícolas de campo, as parcelas experimentais são independentes, pois o resultado de uma unidade experimental não interfere no resultado das demais.

A definição de independência é importantíssima em estatística. A maioria dos testes, pressupõem independência entre os eventos, como veremos na seção 8.

Eventos mutuamente exclusivos são independentes? Não, eventos mutuamente exclusivos são dependentes, pois a ocorrência de um deles impede a ocorrência do outro.

3.4 A Probabilidade de Um Evento

Seja qual for o evento, por exemplo, chuva, genótipos homozigóticos, produção de uma cultura, saiu face ímpar ,etc., a probabilidade de um evento A, denotada por P(A) é um número entre 0 e 1, que indica a chance de ocorrência de A. Quanto mais próximo de 1 é P(A) $\Longrightarrow$ maior é a chance de ocorrência de A, e quanto mais próxima de 0 é P(A) $\Longrightarrow$ menor é a chance de ocorrência do evento A. Definição:

Seja ε um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a esse experimento. A cada evento A associamos um número real representado por P(A) e denominado probabilidade de A, que expressa a chance de ocorrência de A .

Sempre temos as seguintes probabilidades: quando o evento é impossível, A=ϕ $\longrightarrow$ P(A)=0; quando o evento é certo, A=Ω $\longrightarrow$ P(A)=1, portanto:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \ .$$

3.5 Conceito de Probabilidade

Conceito de Freqüência Relativa

Existem experiências que podem ser repetidas muitas vezes sob condições quase constantes. Sendo assim, observa-se que a freqüência relativa estabiliza em certos valores e serve como estimativa da probabilidade. Nesse caso incluem-se as experiências genéticas, muito importante para a área de biociências.

Vamos utilizar um exemplo para ilustrar o conceito de probabilidade baseado na teoria freqüêntista.

Vamos considerar o número de nascimentos de meninas e meninos, n. O espaço de resultados é Ω={masc.,fem.}. Neste experimento, vamos supor que estamos interessados no número de nascimentos de meninos, n_1, então, n_1 é a freqüência absoluta ou simplesmente a freqüência de nascimentos de meninos. A freqüência absoluta pode ser um número qualquer entre $0 \leq n_1 \leq$ n. Mas, como vimos anteriormente, a probabilidade de um evento, é um número entre 0 e 1. Portanto, para nos aproximarmos do conceito de probabilidade, vamos considerar a freqüência relativa, f_1, então, $f_1 = \frac{n1}{n}$, isto é,

$$\text{Freqüência relativa de um evento} = \frac{\text{freqüência observada do evento}}{\text{número total de repetições do experimento}}.$$

Agora, pode-se ver facilmente que a freqüência relativa, varia de 0 a 1 ($0 \leq f_1 \leq 1$). A freqüência relativa é freqüêntemente expressada em percentagem, logo, $0\% \leq f_1 \leq 100\%$.

Se o número de repetições do experimento for muito grande, a freqüência f_1 estabiliza em certos valores, por exemplo, para n=100.000 nascimentos, temos que $f_1 = 53\%$, este valor é usado como *estimativa da probabilidade*, a freqüência relativa converge para a probabilidade. Existem regras que demonstram como tal estimativa é confiável.

Definição: Se após n repetições de um experimento, com n suficientemente grande, se verificar n_1 ocorrências de um evento, então a probabilidade de ocorrência desse evento será a freqüência relativa $\frac{n_1}{n}$.

Exemplo 1: Se cruzarmos dois indivíduos com genótipos AA e Aa, o gene A do indivíduo AA encontra o gene "A" ou o gene "a" do indivíduo Aa. O espaço dos resultados desse experimento é Ω={AA,Aa}. Fatores experimentais demonstram que os dois resultados ocorrem com a mesma probabilidade, isto é:

$$P(AA) = \frac{1}{2} = 50\% \quad \text{e} \quad P(Aa) = \frac{1}{2} = 50\%$$

Para completar nosso *modelo probabilístico*, duas condições sempre devem ser respeitadas:

1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$;
2. $\sum P(E_i) = 1$.

Onde, E_i representa um evento qualquer. Como vemos, a probabilidade total do experimento deve ser igual a 1. Estas duas condições são necessárias, a fim de que o nosso modelo seja consistente com o conceito de freqüência relativa. No exemplo de cruzamentos de indivíduos, temos que $0 \leq P(AA) \leq 1$ e a $0 \leq P(Aa) \leq 1$ e $P(AA) + P(Aa) = 0.5 + 0.5 = 1$.

Exemplo 2: foram colhidas amostras aleatórias de indivíduos de uma população e verificado os seus grupos sanguíneos: A, B, AB e O. Então o $\Omega = \{A, B, AB, O\}$. Foram encontradas as freqüências 40%, 10%, 5%, 45% para os grupos A, B, AB e O, repectivamente, podemos dizer que a probabilidade de sortear um indivíduo da população com grupo sanguíneo A é de 40% e assim por diante.

Exercício resolvido: considere o experimento de cruzamentos de genótipos Aa×Aa, e os eventos $A = \{AA, aa\}$ e $B = \{Aa\}$, tais que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = 0$. Calcular:

a) $P(A^c)$.

b) $P(B^c)$.

c) $P(A^c \cap B^c)$.

d) $P(A^c \cup B^c)$.

e) $P(A^c \cap B)$

Soluçao:

a) $1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b) $1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

c) $P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$.

d) $P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0 = 1$.

e) Como não temos uma operação direta, descrevemos da seguinte forma:

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

logo,

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

3.6 A Regra da Adição

Introduziremos a noção de adição de eventos através de um exemplo. Considere um censo realizado nos domicílios da comunidade polonesa de Dom Pedro, próximo à Curitiba, para se estudar a mortalidade dos residentes na colônia. A mortalidade foi verificada sobre o marido, a mulher, marido e mulher e filhos. Em média o estudo foi realizado sobre três gerações. Os dados estão mostrados na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Mortalidade dos residentes na colônia polonesa de Dom Pedro, Curitiba, Paraná.

Idade	Sexo		Total
	Masculino(M)	Feminino(F)	
0 a 1(A)	33	28	61
2 a 4(B)	4	7	11
5 a 9(C)	2	2	4
10 a 14(D)	0	1	1
15 a 29(E)	1	6	7
> 29 (G)	7	8	15
Total	47	52	99

O evento A indica o evento que acontece quando, ocorrer uma morte na colônia, esta pessoa deve ter até um ano de idade. O evento M acontece quando, ocorrer uma morte na colônia, esta pessoa for do sexo masculino. Os demais eventos tem significados análogos. Sendo assim, a probabilidade de ocorrência do evento A, isto é, a pessoa falecida tiver idade entre 0 e 1 ano é dada por,

$$P(A) = \frac{61}{99} = 61,62\%.$$

A probabilidade de ocorrência do evento M, isto é, a pessoa falecida ser do sexo masculino vale,

$$P(M) = \frac{47}{99} = 47,47\%.$$

É fácil ver também que a probabilidade da ocorrência de A e M, simultaneamente vale,

$$P(A \cap M) = \frac{33}{99} = 33,33\%,$$

isto é, temos uma probabilidade de 33,33% da pessoa falecida ser do sexo masculino e ter até um ano de idade.

Agora, se desejarmos calcular a probabilidade de ocorrência de A e/ou de M, isto é, $P(A \cup M)$, como será o cálculo? O resultado será dado por:

$$\begin{aligned} P(A \cup M) &= P(A) + P(M) - P(A \cap M) \\ P(A \cup M) &= 0,6162 + 0,4747 - 0,3333 \\ P(A \cup M) &= 0,7576 \\ P(A \cup M) &= 75,76\%. \end{aligned}$$

Devemos subtrair $P(A \cap M)$, pois, caso contrário, estaríamos contando duas vezes as pessoas falecidas do sexo masculino e com idade entre 0 e 1 ano.

De modo geral, se A e B são dois eventos quaisquer, a chamada **regra da adição** é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3.1}$$

Esta regra é válida para mais do que dois eventos, ou seja, podemos generalizá-la. Por exemplo, para três eventos: A, B e C, a regra fica:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Se considerarmos os eventos A e C, a $P(A \cup C)$ é calculada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{61}{99} = 0,6162 = 61,62\%; \\ P(C) &= \frac{4}{99} = 0,040 = 4,00\%; \\ P(A \cup C) &= 0,6162 + 0,040 = 0,6562 = 65,62\%, \end{aligned}$$

pois, nesse caso, os eventos A e C são disjuntos ou mutuamente exclusivos, pois se A ocorre, impede a ocorrência de C, e vice-versa. Nesse caso, então, $A \cap C = \varnothing$, logo $P(A \cap C) = 0$.

Então, quando os dois eventos são **mutuamente exclusivos**, a expressão geral 3.1 se reduz para,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo: considere o lançamento de dois dados, sendo os eventos A={soma dos números obtidos igual a 9}, B={número do primeiro dado maior ou igual a 4} e C={soma dos números

menor ou igual a 4}. Enumere os elementos de A, B e C. Obtenha P(A∪B) e P(A∪C).

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

$$
\begin{aligned}
A &= \{36\ 45\ 54\ 63\} \\
B &= \{41\ 42\ 43\ 44\ 45\ 46\ 51\ 52\ 53\ 54\ 55\ 56\ 61\ 62\ 63\ 64\ 65\ 66\} \\
C &= \{11\ 21\ 12\ 31\ 22\ 13\} \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{36} + \frac{18}{36} - \frac{3}{36} = \frac{19}{36} = 0,5278. \\
P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} - \frac{0}{36} = \frac{10}{36} = 0,2778.
\end{aligned}
$$

3.7 Probabilidade Condicional e Independência

Vamos voltar a tabela 3.2 para explicar o que é uma probabilidade condicional. Dado que ocorra a morte de uma pessoa com idade entre 0 e 1 ano, a probabilidade dessa pessoa ser do sexo feminino é de $\frac{28}{61}$= 0,4590= 45,9%. Isto porque de um total de 61 falecimentos com idade entre 0 e 1 ano, 28 são do sexo feminino.

Representamos uma probabilidade condicional da seguinte forma:

$$P(\text{Feminino}|\text{ idade entre 0 e 1 ano}) = \frac{28}{61} = 45,9\%.$$

Lê-se, assim: a probabilidade da pessoa falecida ser do sexo feminino, dado que (|) ela tem idade entre 0 e 1 ano é de 45,9%. A barra vertical indica o evento que ocorreu, o evento conhecido, isto é, sabe-se que a pessoa falecida tem entre 0 e 1 ano, dado isso, deseja-se saber qual é a probabilidade dela ser do sexo feminino. Podemos agora dar uma definição de *probabilidade condicional*.

Definição: Para dois eventos quaisquer A e B, associados a um experimento, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A, quando B tiver ocorrido, como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{3.2}$$

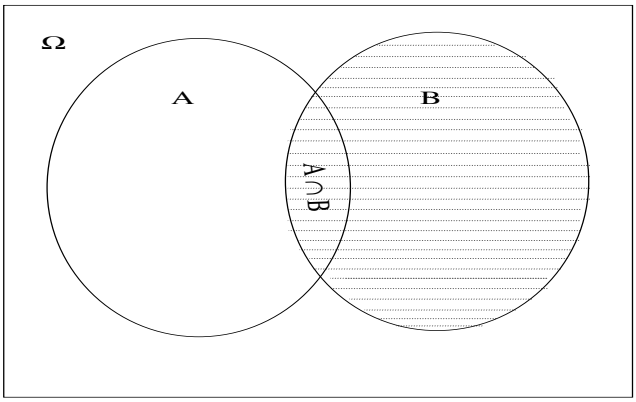


Figura 3.7: espaço reduzido da probabilidade condicional

Para se entender a expressão 3.2, basta pensar que o espaço amostral ficou reduzido, ou restrito ao evento B. Veja figura 3.7. A presença da intersecção no numerador é justificada facilmente considerando que a ocorrência de A, quando se sabe que B ocorreu, corresponde à ocorrência de A e de B simultaneamente, isto é, de sua intersecção.

Para o exemplo mencionado, se A e F, indicam, respectivamente, os eventos "idade entre 0 e 1 ano e sexo feminino", temos:

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{28 \div 99}{61 \div 99}.$$

Observe que Ω=99, e A=61, sendo que Ω desaparece (simplificação), portanto, o novo espaço de resultados é A. Assim,

$$P(F|A) = \frac{28}{61} = 45,9\%.$$

De modo geral, sempre que calculamos a P(A), dado que B tenha ocorrido, estamos sempre calculando a P(A) em relação ao espaço amostral reduzido de B, isto é, o espaço amostral fica reduzido de Ω para B.

Exemplo: Numa população os animais podem ser fecundos e não fecundos. Vinte por cento (20%) dos animais da raça X são fecundos; trinta por cento (30%) dos animais da raça Y são não fecundos e setenta e cinco por cento (75%) dos animais são da raça X. Considere os eventos:

H={o animal é da raça X} M={o animal é da raça Y}

A={o animal é fecundo} B={o animal não é fecundo}

Raça	Fecundidade		Total
	Não Fecundo(B)	Fecundo(A)	
X (H)	60	15	75
Y (M)	7,5	17,5	25
Total	67,5	32,5	100

$$\begin{aligned} P(M|A) &= P(M \cap A)/P(A); \\ P(M|A) &= \frac{0,175}{0,325} = 0,5384. \\ P(B|M) &= P(B \cap M)/P(M) = 0,075/0,25 = 0,30 = 30\%. \\ P(A \cup H) &= P(A) + P(H) - P(A \cap H) = 0,325 + 0,75 - 0,15 = 0,925. \end{aligned}$$

Regra do Produto de Probabilidades

Da relação 3.2 podemos obter a chamada Regra do Produto de Probabilidades, dada por:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B). \tag{3.3}$$

Exemplo: para os dados do exemplo de população de animais, temos,

$$P(A \cap H) = P(A|H) \times P(H) = 0,20 \times 0,75 = 0,15 = 15\%.$$

Um Caso Importante: Independência dos Eventos

Uma situação especial da fórmula 3.3 é muito importante. Essa situação ocorre quando os dois eventos A e B são independentes, isto é, quando a ocorrência do evento A não influencia na ocorrência do evento B, e vice-versa. Vamos através de um exemplo ilustrar a definição de independência entre eventos.

Exemplo: um cientista quer saber se existe dependência entre a cegueira para as cores e a surdez nos homens. Admite-se as seguintes probabilidades para os eventos :

Cegueira	Surdez		Frequência
	Surdez(S)	Não Surdez($\bar{S}$)	total
Cegueira para cores(C)	0,0004	0,0796	0,0800
Não Cegueira($\bar{C}$)	0,0046	0,9154	0,9200
Frequência total	0,0050	0,9950	1,0000

O evento C corresponde a homens com cegueira para cores, e o evento S corresponde a homens com surdez. Vamos calcular a probabilidade de surdez dado que o evento cegueira para cores ocorreu:

$$P(S|C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0,0004}{0,0800} = 0,0050.$$

Por sua vez, a probabilidade de surdez é:

$$P(S) = 0,0050$$

então,

$$P(S|C) = P(S),$$

isto é, a surdez é *independente* da cegueira para cores, pois a ocorrência da cegueira para cores *não alterou* a probabilidade de ocorrência da surdez. Logo, a ocorrência de um evento não influenciou na ocorrência do outro.

Generalizando, "Se dois eventos são independentes , a $P(A \mid B) = P(A)$, então a regra do produto de probabilidades fica:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Essa fórmula pode ser tomada como definição de independência, ou seja, A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{3.4}$$

Exemplo: Sabemos que cegueira para cores e surdez são dois eventos independentes. Qual é a probabilidade de um homem apresentar simultaneamente cegueira e surdez?

$$P(C \cap S) = P(C)P(S) = 0,08 \times 0,005 = 0,004.$$

Exemplo com dependência: Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três vermelhas (V). Suponha que sorteemos duas bolas ao acaso, em sequência e *sem reposição*. Isto significa que escolhemos a primeira bola, verificamos a sua cor e não a devolvemos à urna, misturamos as bolas restantes e retiramos a segunda bola. O diagrama de árvore ilustra as possibilidades, veja figura 3.8. Em cada "galho" da árvore estão indicadas as probabilidades de ocorrência, sendo que para segundas bolas temos probabilidades condicionais. A

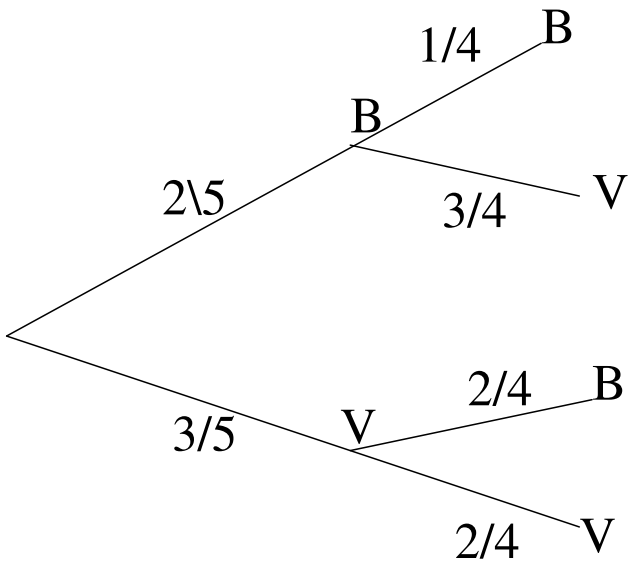


Figura 3.8: diagrama de árvore

distribuição de probabilidades do exemplo é dada por:

Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
VV	$\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{6}{20}$
Total	1

As probabilidades calculadas no quadro foram obtidas através da probabilidade condicional. Por exemplo, a probabilidade de sair branca na primeira e branca na segunda é dada por:

$P(B \cap B) = P(\text{Branca na primeira})P(\text{Branca na segunda} \mid \text{Branca na primeira}) = (2/5)(1/4).$

Considere os eventos: *B1*={saiu bola branca na primeira retirada} e *B2*={saiu bola branca na segunda retirada}.

$$P(B2|B1) = \frac{2}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{2}{20}\frac{5}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$P(B2) = P(BB) + P(VB) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Portanto, sendo que $P(B2|B1) \neq P(B2)$, implica que os eventos $B1$ e $B2$ são dependentes, pois a ocorrência de B1 alterou a probabilidade de B2.

Os eventos excesso de peso (E) e pressão elevada (A), biologicamente são dependentes.

3.8 Teorema de Bayes

Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo teorema de Bayes, que expressa uma probabilidade condicional em termos de outras probabilidades condicionais e marginais. Vamos apresentar o Teorema de Bayes através de um exemplo.

Exemplo. Temos três profissionais: um Agrônomo, um Biólogo e um Engenheiro Civil. Cada um deles plantou 10 mudas de álamos. Das 10 plantadas pelo Agrônomo 9 sobreviveram; 5 do Biólogo e 2 do Engenheiro. Escolhe-se uma muda ao acaso, se a muda sobreviveu, qual a probabilidade de ela ter sido plantada pelo Engenheiro Civil? Veja a figura 3.9. Queremos encontrar a $P(E \mid S)$. Sabemos que:

Marginais	Condicionais
P(A)=$\frac{10}{30}$=$\frac{1}{3}$	$P(S \mid A)$=90%
P(B)=$\frac{10}{30}$=$\frac{1}{3}$	$P(S \mid B)$=50%
P(E)=$\frac{10}{30}$=$\frac{1}{3}$	$P(S \mid E)$=20%

As probabilidades marginais são também chamadas de probabilidades *à priori*. Da definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(E|S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)}.$$

Mas,

$$P(E \cap S) = P(E) \times P(S|E)$$

Assim:

$$P(E|S) = \frac{P(E)P(S|E)}{P(S)}. \tag{3.5}$$

As probabilidades no numerador sempre serão conhecidas. Precisamos encontrar o valor da probabilidade do denominador, P(S). Como A, B e E são eventos mutuamente exclusivos,

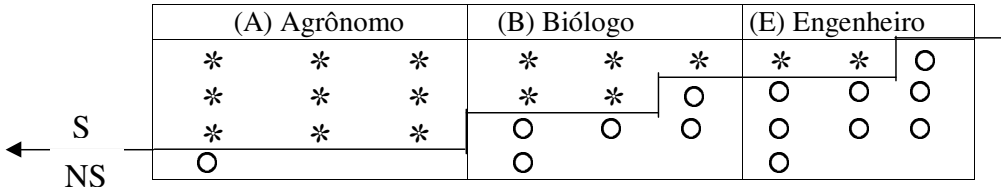


Figura 3.9: Sobrevivência de mudas de álamos

e reunidos formam o espaço amostral completo, podemos decompor S, na reunião de três outros que também são mutuamente exclusivos, ou seja:

$$S = (A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (E \cap S)$$

e então:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(E \cap S) \\ P(S) &= P(A)P(S|A) + P(B)P(S|B) + P(E)P(S|E) \end{aligned}$$

Substituindo-se esse resultado em (3.5), obtem-se:

$$P(E|S) = \frac{P(E)P(S|E)}{P(A)P(S|A) + P(B)P(S|B) + P(E)P(S|E)}.$$

Esse valor é conhecido como probabilidade *à posteriori*. Assim;

$$\begin{aligned} P(E|S) &= \frac{(1 \div 3) \times 0,20}{((1 \div 3) \times 0,90) + ((1 \div 3) \times 0,50) + ((1 \div 3) \times 0,20)} \\ P(E|S) &= \frac{0,06667}{0,30 + 0,16667 + 0,06667} = \frac{0,06667}{0,5333} = 0,1250 \\ P(E|S) &= 12,50\%. \end{aligned}$$

Generalizando para n eventos.

Seja $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$, uma partição do espaço amostral Ω, isto é, $C_i \cap C_j = \varnothing$ para $i \neq j$, e $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup ... \cup C_n = \Omega$; consideramos A um evento qualquer. Também são conhecidas $P(C_i)$ e $P(A|C_i)$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$. Então, temos:

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i)P(A|C_i)}{P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2)P(A|C_2) + P(C_3)P(A|C_3) + ... + P(C_n)P(A|C_n)} \quad (3.6)$$

para $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Exercícios resolvidos

1. Num experimento com tomates em casa-de-vegetação, têm-se 26 vasos distribuídos segundo o seguinte delineamento.

	Adubos			
Variedades	1	2	3	Total
1	3	4	2	9
2	1	3	3	7
3	5	2	3	10
total	9	9	8	26

Sorteia-se um adubo (coluna) ao acaso, do qual sorteia-se uma variedade, verificando-se que ocorreu a variedade 2. Qual a probabilidade de que esta variedade esteja sendo tratada com o adubo 1?

Sejam os eventos:

$$\begin{aligned} A1 &= \text{ocorrer o adubo 1;} \\ A2 &= \text{ocorrer o adubo 2;} \\ A3 &= \text{ocorrer o adubo 3;} \\ B2 &= \text{ocorrer a variedade 2.} \end{aligned}$$

Verifica-se que: A1 $\cap$ A2 $\cap$ A3= $\varnothing$ e A1 $\cup$ A2 $\cup$ A3=S.

Marginais	Condicionais
P(A1)=$\frac{9}{26}$	$P(B2 \mid A1) = \frac{1}{9}$
P(A2)=$\frac{9}{26}$	$P(B2 \mid A2) = \frac{3}{9}$
P(A3)=$\frac{8}{26}$	$P(B2 \mid A3) = \frac{3}{8}$

$$P(A1 \mid B2) = \frac{P(A1)P(B2|A1)}{P(A1)P(B2|A1) + P(A2)P(B2|A2) + P(A3)P(B2|A3)}$$

$$P(A1 \mid B2) = \frac{1}{7}.$$

2. (Beiguelman) A freqüência esperada de pessoas Rh_+ em uma população é estimada em 90%. Qual a freqüência esperada, nessa população de casais:

$$\begin{array}{llllllll} a) & Rh_+ & \times & Rh_+ & & (Rh_+ & e & Rh_+)? \\ & 0,90 & \times & 0,90 & = & 0,81 & = & 81\%; \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} b) & Rh_- & \times & Rh_- & & (Rh_- & e & Rh_-)? \\ & 0,10 & \times & 0,10 & = & 0,01 & = & 1\%; \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll} c) & Rh_+ & \times & Rh_- & & & & \\ & H & \times & M & & & & \\ & 0,90 & \times & 0,10 & = & 0,09 & = & 9\% \\ & M & \times & H & & & & \\ & 0,90 & \times & 0,10 & = & 0,09 & = & 9\% \\ & & & & & Resultado & = & 18\%; \end{array}$$

$$
\begin{array}{llccccccc}
d) & Marido & Rh_+ & \times & Mulher & Rh_- & & & \\
 & & 0,90 & \times & 0,10 & = & 0,09 & = & 9\%; \\
e) & Marido & Rh_- & \times & Mulher & Rh_+ & & & \\
 & & 0,10 & \times & 0,90 & = & 0,09 & = & 9\%.
\end{array}
$$

Observação: os fatores são independentes do sexo.

3. (Beiguelman) Numa população a freqüência de indivíduos Rh_- é estimada em 16%, a de Rh_+ portadores do gene responsável pelo grupo Rh_- é estimada em 48%, e a de Rh_+ não portadores desse gene em 36%. Qual a probabilidade de um indivíduo Rh_+ dessa população ser portador do gene que determina o grupo Rh_-?

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{indivíduo ser } Rh_+\} \\
B &= \{\text{indivíduo } Rh_+ \text{ e portador do gene que determina o grupo } Rh_-\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
P(A) & = & 0,48 & + & 0,36 & = & 0,84 \\
P(B|A) & = & \frac{P(A \cap B)}{P(A)} & = & \frac{0,48}{0,84} & = & 0,5714
\end{array}
$$

4. (Beiguelman) Entre os casais Rh_+ e Rh_+ da questão anterior, qual a proporção esperada daqueles capazes de gerar um(a) filho(a) Rh_-?

Observação: O casal (homen e mulher) tem que ser portador do gene responsável pelo grupo Rh_-. Logo, 0,5714 × 0,5714 = 0,3265 = 32,65%.

5. Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

a) Investigam-se famílias com quatro crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.

R: {MMMM, MMMF, MMFM,MFMM,...,FFFF}. Temos um total de $2^4 = 16$ eventos.

b) Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes em seguida ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas.

R: {AA, ACC, ACBB, BB, BCC, BCAA, ACBA, BCAB}.

c)Lance um dado até que a face 5 apareça pela primeira vez.

R: {5, F5, FF5, FFF5, FFFF5,.....}, onde F=face diferente de 5.

d) De todos os alunos do curso de estatística, escolhe-se um ao acaso e anota-se a sua altura.

R: {h | $1,50 \leq$ h $\leq$ 2,00} onde h é a altura.

6. Uma água é contaminada se forem encontrados bacilos tipo A e/ou bacilos tipo B e C simultaneamente. As probabilidades de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30; 0,20 e 0,80. Existindo bacilos tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida à metade.

Calcular:
a) P(B∪C);
b) P(água ser contaminada);
c) P(B|água contaminada).
R:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,30 \\ P(B) &= 0,20 \\ P(C) &= 0,80 \\ P(B \mid A) &= \varnothing \\ P(C \mid B) &= 0,40 \end{aligned}$$

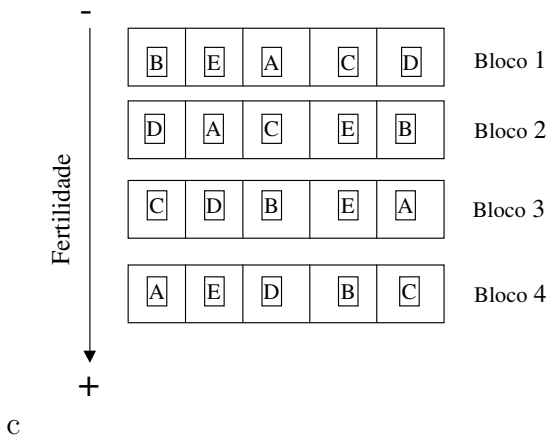
$$\begin{aligned} a) \quad P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= 0,20 + 0,80 - (0,2 \times 0,40) \\ &= 1 - 0,08 \\ &= 0,92 \\ b) \quad P(\text{contaminada}) &= P(A \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B \cap C) - P[A \cap (B \cap C)] \\ &= 0,30 + 0,08 - 0,00 \\ &= 0,38 \\ c) \quad P(B \mid \text{contaminada}) &= P(B \cap \text{contaminada}) \div P(\text{contaminada}) \\ &= P(B \cap C) \div 0,38 \\ &= 0,08 \div 0,38 \\ &= 0,21 \end{aligned}$$

3.9 Exercícios Propostos

1. Num levantamento em um município sobre a propriedade da terra e o tamanho do estabelecimento agrícola encontrou-se a seguinte situação:

45 agricultores proprietários com estabelecimentos menores que 50 hectares
10 agricultores arrendatários com estabelecimentos menores que 50 hectares
15 agricultores proprietários com estabelecimentos maiores que 50 hectares
2 agricultores arrendatários com estabelecimentos maiores que 50 hectares

Ao escolher ao acaso algum agricultor do município, qual é a probabilidade de que:
a) o estabelecimento agrícola tenha menos de 50 hectares?
b) o agricultor seja arrendatário e o estabelecimento agrícola menor de 50 hectares?



c

Figura 3.10: Delineamento blocos ao acaso

2. Em um experimento semeiam-se 4 blocos de 5 parcelas cada, com algodão. Em cada bloco, aparecem as variedades A, B, C, D e E, portanto, cada bloco contém 5 parcelas, uma para cada variedade, e estas serão designadas as parcelas através de um sorteio. Veja figura 3.10. Observe que a construção dos blocos controla a diferença de fertilidade do solo. Assim, podemos estudar o efeito das variedades livre do efeito da fertilidade. Em todos os blocos a variedade C foi a mais produtiva. Qual a probabilidade de que isso tenha ocorrido por acaso, ou seja, as cinco variedades são igualmente produtivas e a variedade C foi a mais produtivas devido a fatores aleatórios no experimento? Qual a suposição feita? Observação: outra situação de uso do delineamento em blocos completos ao acaso, é com germinador de sementes. Para controlar diferenças de temperatura e luminosidade dentro do germinador, consideramos cada prateleira como um bloco.

3. No experimento anterior, suponha-se que a variedade C foi a mais produtiva em 3 blocos e teve o 2° lugar no outro bloco. Qual a probabilidade de ela se destacar igualmente ou mais do que nesse ensaio por simples acaso? Qual a suposição feita?

4. Em um certo locus podem ocorrer dois alelos C e D. Admitamos que os possíveis genótipos têm as seguintes probabilidades:

$$P(CC) = 0,46; \quad P(CD) = 0,31; \quad P(DD) = 0,23.$$

Qual é a probabilidade de que um genótipo contenha:
a) o alelo C?
b) o alelo D?
c) Qual a suposição feita em a) e b)?

5. Em um locus de um certo par de cromossomos, podem ocorrer alelos A e a. Os

genótipos AA, Aa, aa têm probabilidades:

$$P_{AA} = 0,11; \quad P_{Aa} = 0,37; \quad P_{aa} = 0,52.$$

Em um locus de outro par de cromossomos, podem ocorrer os alelos B e b. Os genótipos BB, Bb, bb têm as probabilidades:

$$P_{BB} = 0,35; \quad P_{Bb} = 0,25; \quad P_{bb} = 0,40.$$

Encontrar as probabilidades de combinações genéticas:
a) AA junto com BB, isto é AA e BB.
b) Aa junto com Bb, isto é Aa e Bb.
c) Qual a suposição feita?

6. Um homen visita um casal que tem dois filhos. Uma das crianças, um menino, vem a sala. Encontre a probabilidade, de o outro também ser um menino, se:
a) sabe-se que a outra criança é mais nova; observação: construa o espaço amostral de um casal que tem dois filhos de acordo com o sexo dos mesmos, e considere a ordem de nascimento.
b) nada se sabe sobre a outra criança.
OBSERVAÇÃO: construa o espaço de resultados para um casal com dois filhos.

7. Numa certa cidade, 40% da população tem cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% tem cabelos e olhos castanhos. Uma pessoa da cidade é selecionada aleatoriamente.
a) Se ela tem cabelos castanhos, qual é a probabilidade de ter também olhos castanhos?
b) Se ela tem olhos castanhos, qual é a probabilidade de não ter cabelos castanhos?
c) Qual é a probabilidade de não ter nem cabelos nem olhos castanhos?

8. Um lote é formado por 10 animais sadios, 4 com problemas menores e 2 com problemas graves. Todos os animais são numerados e é feita a escolha de um animal ao acaso. Ache a probabilidade de que:
a) ele não tenha problemas;
b) ele não tenha problemas graves;
c) ele ou seja sadio ou tenha problemas graves.

9. Se do lote de animais descritos no problema 8, dois animais forem escolhidos (sem reposição), ache a probabilidade de que:
a) ambos sejam sadios;
b) ao menos um seja sadio;
c) no máximo um seja sadio;
d) exatamente um seja sadio;
e) nenhum deles seja sadio.

10. Tem-se um pacote com 20 sementes, 8 das quais tem um alto poder germinativo (germinam), e 12 não germinam. As sementes são analisadas uma após a outra. Se essas sementes forem extraídas ao acaso, sem reposição, qual será a probabilidade de que:
a) as duas primeiras sementes não germinam;
b)as duas primeiras sementes germinam;
c) das duas primeiras sementes analisadas, uma germina e a outra não germina;
OBS: *Estes eventos não são independentes.*

11. Um enxerto tem a probabilidade de sobreviver duas vezes maior do que não sobreviver. Plantados três enxertos, qual a probabilidade de exatamente dois sobreviverem?

12. De três eventos A, B e C, suponhamos A e B independentes, B e C mutuamente exclusivos. Suas probabilidades são:

$$\text{P(A)=0,50,} \quad \text{P(B)=0,30} \quad \text{e} \quad \text{P(C)=0,10.}$$

Calcular as probabilidades de:
a) B e C ocorrerem (ambos);
b) ocorrer ao menos um dentre A e B;
c) B não ocorrer;
d) ocorrerem os três.

13. Um produtor aceitará um lote com 100 sacos de sementes fiscalizadas, se uma amostra de 5 sacos escolhidos ao acaso do lote e inspecionada, não contenha nenhum com poder germinativo inferior ao especificado. Qual é a probabilidade que ele aceite o lote se este contém 10 sacos com poder germinativo abaixo do especificado?

14. Suponha que a probabilidade de se pegar gripe durante uma epidemia seja de 0,60. A experiência tem mostrado que uma vacina vem tendo sucesso de 80% na prevenção da gripe, quando aplicada em pessoas expostas a uma epidemia. Uma pessoa não vacinada tem probabilidade de 0,90 de pegar gripe, quando exposta a uma epidemia. Duas pessoas, uma vacinada e outra não, viajam a negócio. Suponha que elas não vão para o mesmo lugar, não vão estar em contato com as mesmas pessoas e não vão se encontrar (independentes). Qual é a probabilidade de que pelo menos uma delas fique gripada?

15. Num experimento genético é feito um cruzamento com *Drosophila*, no qual é esperado que $\frac{1}{4}$ das progênies terão "olhos brancos" e $\frac{1}{2}$ terão a característica chamada "olhos vermelhos". Assume que os dois locus gênicos segregam independentemente.
a) Qual a proporção de progênies deveriam exibir ambas as características simultaneamente?
b) Se 4 moscas são amostradas aleatoriamente, qual é a probabilidade de todas serem "olhos brancos"?

c) Qual é a probabilidade que nenhuma das 4 moscas tenham "olhos brancos" ou "olhos vermelhos"?
d) Se duas moscas são amostradas, qual é a probabilidade que pelo menos uma das moscas têm "olhos brancos" ou "vermelhos" ou ambas as características?

16. Uma empresa de sementes fiscalizadas, vende pacotes com 20 Kg cada. As máquinas A, B e C enchem 25, 35 e 40% do total produzido, respectivamente. Da produção de cada máquina 5, 4 e 2%, respectivamente, são pacotes fora do peso aceitável. Escolhe-se ao acaso um pacote e verifica-se que está fora do peso aceitável. Qual a probabilidade de que o pacote venha da máquina A?

17. Se ambos os pais tem genótipo Aa (heterozigotos), seus filhos tem genótipos AA, Aa e aa com probabilidades

$$P(AA) = \frac{1}{4}, \quad P(Aa) = \frac{1}{2}, \quad P(aa) = \frac{1}{4}.$$

Qual a probabilidade de que dentre quatro crianças:
a) pelo menos uma tenha o genótipo aa.
b) Qual o número esperado de crianças com genótipo Aa?

18. Em uma maternidade de Florianópolis nasceram em um determinado mês 220 crianças. No mesmo período nasceram em uma maternidade de Chapecó 197 crianças. Do total de 417 recém-nascidos nessas maternidades, 217 eram do sexo masculino e 200 eram do sexo feminino. Se a proporção de meninos e meninas entre os recém-nascidos for independente da sua procedência (as variáveis sexo e procedência são independentes), qual o número esperado de meninos e de meninas em cada um das maternidades durante o período em análise?

19. O estudo de uma tribo no Brasil revelou que 75% tinha sangue tipo A e o restante tinha sangue tipo O. Sessenta por cento (60%) de toda a população tinha fator Rh^-, enquanto 30% tinha Rh^+ e sangue tipo A. Usando estas informações, encontre a probabilidade de que um membro da tribo tenha:
a) Sangue tipo A ou Rh^+.
b) Sangue tipo A e Rh^-.
c) Rh^+ mas não sangue tipo A.
d) Sangue tipo O e Rh^-.

20. Num estudo sobre fecundidade de duas raças suínas, foram examinados 14 animais de cada raça, obtendo-se o resultado exposto na tabela 3.3. a) A fecundidade é independente da raça? Justifique através da definição de independência de eventos.
b) Qual é a $P(F \mid A)$? e c) $P(F \cup A)$?

Tabela 3.3: Fecundidade de duas raças suínas

Raças	Fecundidade		
	Fecundas (F)	Não fecundas ($\bar{F}$)	Total
A (A)	12 0,42857	2 0,07143	14 0,5000
B (B)	8 0,28571	6 0,21428	14 0,5000
Total	20 0,71428	8 0,28572	28 1,0000

4 Modelos de Probabilidades para Contagens

4.1 Introdução

Até aqui introduzimos alguns modelos probabilísticos para experimentos simples, isto é, experimentos cujos os espaços de resultados (Ω) são simples. Esta teoria básica de probabilidade foi importante para uma boa compreensão do que é probabilidade e, também, para o conhecimento de algumas propriedades e regras as quais são úteis no estudo, por exemplo, de genética. Para variáveis qualitativas, os modelos vistos na seção anterior se adaptam muito bem .

No estudo de *Análise Exploratória de Dados*, tivemos contato com diversas variáveis obtidas de experimentos reais, como por exemplo, rendimento de grãos de híbridos de milho em kg/ha, número de dias da emergência à floração (ciclo da cultura), altura de plantas, número de plantas sadias colhidas na área útil de uma parcela, número de micronúcleos em 5000 células de peixes do tipo bagre, diâmetro de *Paepalanthus*. Para atender estas situações práticas mais gerais, precisamos ampliar os conceitos básicos vistos até o momento, para que tenhamos modelos probabilísticos que representem todos os tipos de variáveis vistas até aqui. Em outras palavras, precisamos sofisticar mais nossos modelos.

Inicialmente, dada a sua maior simplicidade estudaremos os modelos para variáveis aleatórias discretas. Alguns exemplos de variáveis aleatórias discretas são: número de plantas sadias (ou doentes) numa unidade experimental, número de insetos capturados numa armadilha, número de brotos por explante, número de sementes que germinam numa amostra de 400 sementes, proporção de enxertos sobreviventes. Já os modelos para variáveis contínuas necessitarão de um artifício matemático, que consiste na generalização do conceito de histograma, estudado na análise exploratória de dados. Esta generalização consiste em se fazer o número de classes tender para o infinito e será estudado no próximo capítulo.

Do ponto de vista prático, é desejável que se defina uma variável associada a um experimento, de tal modo que seus resultados sejam numéricos. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. No caso de um questionário, e as respostas possíveis são *sim* ou *não*, podemos associar uma variável que toma os valores 1 para sim e 0 para não.

Exemplo 2. Num estudo sobre sobrevivência de enxertos em ameixeiras, temos duas possibilidades, o exerto sobrevive ou morre, podemos atribuir o valor 1 para sobrevive e 0 para morte. Uma razão para isto, é que os recursos disponíveis para a análise estatística das variáveis quantitativas são maiores, mais amplas do que para variáveis qualitativas. Isto sugere o uso de artifícios para transformar as variáveis qualitativas em variáveis quantitativas.

Quando uma variável apresenta resultados que tendem a variar de uma observação para outra, em razão da variação do acaso, chama-se *variável aleatória*, às quais iremos associar modelos probabilísticos. Por exemplo, temos as seguintes variáveis aleatórias: número de indivíduos de determinada espécie vegetal encontrados em quadrados de $10m \times 10m$ em um campo, a conversão alimentar de suínos em crescimento.

Vamos poder verificar até o final desse curso, a grande importância da construção de modelos probabilísticos para variáveis quantitativas.

4.2 O Conceito de Variável Aleatória Discreta e Função de Probabilidade

Vamos, agora, através de um exemplo, definir o que é uma variável aleatória discreta, função de probabilidade e distribuição de probabilidade, em termos matemáticos.

Exemplo: em um experimento genético com flôres de ervilhas, os genótipos BB e VV produzem pétalas das flores de cor branca e vermelha, respectivamente. Em F1, obtemos:

$$\boxed{\text{BB}\times\text{VV}=\text{BV}},$$

que são flores de cor rosa (genótipo que produz pétalas rosas). Fazendo-se a autofecundação de flores BV, obtemos os genótipos da figura 4.1.

Vamos definir a variável X como sendo igual ao "número de alelos V em cada resultado da figura 4.1 (genótipos)". Os resultados associados pela variável X, dada a suposição que os eventos são igualmente prováveis e BV e VB não são ordenados, são:

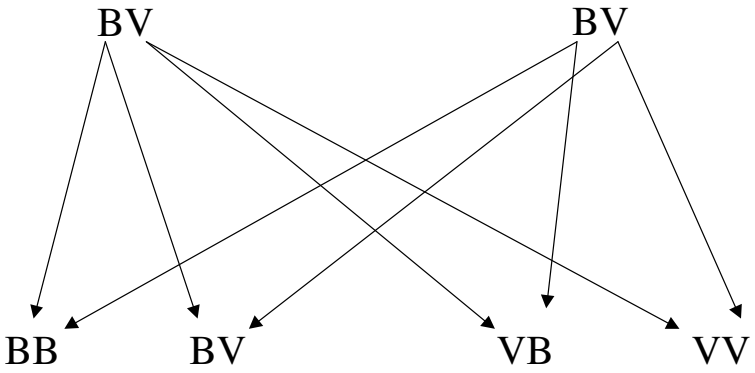


Figura 4.1: Experimento genético com flores de ervilhas

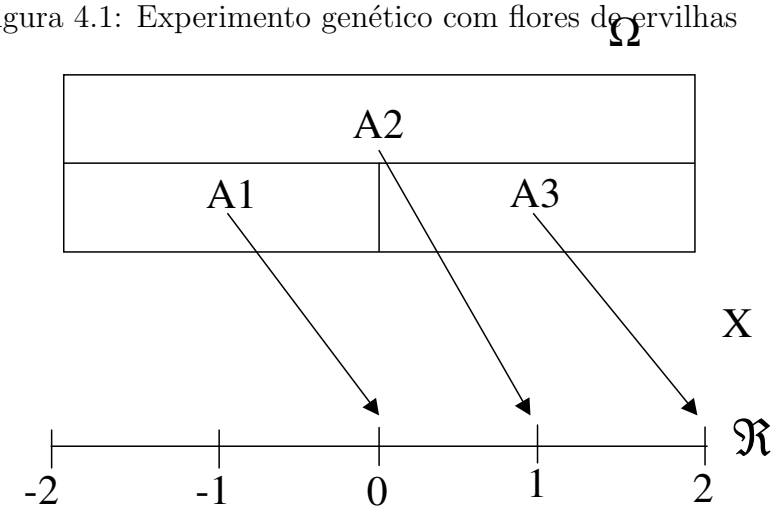


Figura 4.2: Esquema para o significado de variável aleatória

Resultados (eventos)	Probabilidades	x_i
BB	$\frac{1}{4}$	0
BV	$\frac{1}{4}$	1
VB	$\frac{1}{4}$	1
VV	$\frac{1}{4}$	2

Estes resultados são mostrados no esquema da figura 4.2, considerando os eventos $A1 = \{BB\}$; $A2 = \{BV, VB\}$; $A3 = \{VV\}$. Vemos na figura 4.2, pois, que a cada resultado do experimento (evento), a variável "X=número de alelos V em cada genótipo", *associa* um valor numérico. Essa associção em matemática é chamada de *função*.

Definição: uma variável aleatória é uma função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral (Ω), um único número real.

Notamos, que a variável aleatória para ser discreta deve assumir valores em um conjunto enumerável (finito ou infinito) de pontos do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Vimos como associar números aos eventos, agora, é muito importante que se associe probabilidades a estes valores da variável, isto é, como associar a cada valor x_i da variável aleatória X a sua probabilidade de ocorrência? Ela é dada pela probabilidade de ocorrência do evento correspondente (eventos equivalentes). Matematicamente, temos:

$$P(X = 0) = P(\{BB\}) = \frac{1}{4},$$

pois, $X = 0$ se, e somente se, ocorre o evento BB;

$$P(X = 1) = P(\{BV ou VB\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4},$$

pois $X = 1$ se, e somente se, ocorrem eventos BV ou VB.

$$P(X = 2) = P(\{VV\}) = \frac{1}{4},$$

pois $X = 2$ se, e somente se, ocorre o evento VV.

Agora vamos trabalhar com números, ao invés de conjuntos, isso implica que podemos usar funções, derivadas, integrais, que são muito utilizadas para representar os fenômenos da natureza.

Na tabela a seguir esquematizamos a *distribuição de probabilidades* da variável aleatória X (número de alelos V em cada genótipo)

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Ao conjunto de pontos $[x_i; p(x_i)]$ damos o nome de *Distribuição de Probabilidades* (Modelo probabilístico) da variável aleatória X.

É importante verificar que, para que haja uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta X, é necessário que:

$$\begin{aligned} &a) \quad p(x_i) \geq 0 \quad \text{para todo } i; \\ &b) \quad \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1; \\ &c) \quad P(X = x_i) = p(x_i). \end{aligned}$$

Definição: chama-se *função de probabilidade* da variável aleatória discreta X, que assume os valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a função $p(x_i)$ que a cada valor de x_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i).$$

Nas próximas seções vamos mostrar algumas funções de probabilidades famosas.

4.3 A média e a Variância de Uma Variável Aleatória Discreta. Propriedades

Existem características numéricas que são muito importantes em uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, discreta ou contínua. Essas características numéricas são os *parâmetros* das distribuições. Os dois parâmetros mais importantes são a *média* e a *variância*.

A média é também chamada de *valor esperado*, de *esperança matemática* ou de *média populacional* de uma variável aleatória, e a sua representação é $E(X)$, ou μ_X, a qual lê-se: a esperança matemática da variável aleatória X.

Vamos, através de alguns exemplos, introduzir o conceito de esperança matemática.

Exemplo 1. O agricultor produtor de batatas-sementes (exemplo da seção 4.3 quer saber qual o lucro médio esperado por caixa da mesma. Vamos supor que:
Uma caixa do tipo I ($50 < $ diâmetro $\leq 60\ mm$) dá um lucro de -30,00 u.m.;
Uma caixa do tipo II ($40 <$ diâmetro $\leq\ 50\ mm$) dá um lucro de 100,00 u.m.;
Uma caixa do tipo III ($28 <$ diâmetro $\leq\ 40\ mm$) dá um lucro de 85,00 u.m.;
Uma caixa do tipo IV ($23 <$ diâmetro $\leq\ 28\ mm$) dá um lucro de -10,00 u.m.
As probabilidades (estimativas da frequência relativa) de um agricultor obter uma caixa do tipo:

$$\begin{aligned} I \text{ é } 100/500 &= 0,20; \\ II \text{ é } 180/500 &= 0,36; \\ III \text{ é } 140/500 &= 0,28; \\ IV \text{ é } 80/500 &= 0,16. \end{aligned}$$

Então, se chamarmos de X: o lucro por caixa de batata-semente e o lucro médio por caixa de $E(X)$, temos:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = 0,20(-30,00) + 0,36(100,00) + 0,28(85,00) + 0,16(-10,00) \\ \mu_X &= E(X) = (-6,00) + 36,00 + 23,80 + (-1,6) \\ \mu_X &= E(X) = 52,20\ \ u.m. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Considere a produção de pepinos para conserva, qual o lucro médio esperado pelo agricultor por caixa de pepino? Considere os seguintes valores de lucros para cada uma

das classificações:

$1^{\underline{a}}$	classe(pepinos de 6 à 9 cm)	lucro de	600	$u.m./cx.$
$2^{\underline{a}}$	classe(pepinos de 9 à 12 cm)	lucro de	500	$u.m./cx.$
$3^{\underline{a}}$	classe(pepinos maior que 12 cm)	lucro de	390	$u.m./cx.$
	afilados	lucro de	-50	$u.m./cx$

As probabilidades (estimativas de frequências relativas) de um agricultor obter uma caixa do tipo:

$$\begin{array}{lllll} 1^{\underline{a}} \text{ classe} & \text{é} & 300/500 & = & 0,60 \\ 2^{\underline{a}} \text{ classe} & \text{é} & 100/500 & = & 0,20 \\ 3^{\underline{a}} \text{ classe} & \text{é} & 50/500 & = & 0,10 \\ \text{afilados} & \text{é} & 50/500 & = & 0,10 \\ & & \sum p(x_i) & = & 1,0 \end{array}$$

Então, se X é o lucro por caixa de pepino para conserva e $E(X)$ é o lucro médio esperado por cada caixa, temos que:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = 0,60(600) + 0,20(500) + 0,10(390) + 0,10(-50) \\ \mu_X &= E(X) = 360 + 100 + 39 - 5 \\ \mu_X &= E(X) = 494\ u.m./cx. \end{aligned}$$

Exemplo 3. Em famílias com 4 crianças, vamos admitir, para simplificar, que a proporção de crianças que nascem do sexo masculino e feminino é 1:1. Seja a variável aleatória X="número de meninos em famílias com quatro crianças." O espaço de resultados para famílias com 4 crianças é dado por (2^4 pontos amostrais):

$$\begin{aligned} \Omega = \{&FFFF, MFFF, FMFF, FFMF, FFFM, MMFF, MFMF, MFFM, \\ &FMMF, FMFM, FFMM, MMMF, MMFM, MFMM, FMMM, MMMM\}. \end{aligned}$$

Os valores que X pode assumir são:

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

As probabilidades são dadas por:

$$P(X=0) = \frac{1}{16}; \quad P(X=1) = \frac{4}{16}; \quad P(X=2)\frac{6}{16}; \quad P(X=3) = \frac{4}{16}; \quad P(X=4) = \frac{1}{16}.$$

As probabilidades correspondentes podem ser obtidas pela fórmula (função de probabilidade):

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

onde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

onde n! significa "n fatorial". Por exemplo, 3!=3.2.1=6.

Agora, representamos por $E(X)$ ou μ_X, o número médio de meninos em tais famílias. Qual é o valor de $E(X)$?

$$E(X) = \mu_X = (\frac{1}{16} \times 0) + (\frac{4}{16} \times 1) + (\frac{6}{16} \times 2) + (\frac{4}{16} \times 3) + (\frac{1}{16} \times 4) = 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4. \\ \mu_X &= E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i). \end{aligned}$$

Definição: se uma variável aleatória discreta X, toma os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, com as probabilidades correspondentes $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$, então o seu valor esperado, $E(X)$ ou μ_X, é

$$\mu_X = E(X) = \sum x_i p(x_i), \quad \text{onde} \quad i = 1, 2, 3, ..., n.$$

$E(X)$ é uma "média" dos valores que a variável aleatória pode assumir, onde cada valor é ponderado pela probabilidade da variável aleatória ser igual a esse valor. No caso do agricultor, 494 $u.m.$ é o valor esperado do lucro por caixa se ele executar o plantio do pepino um número grande de vezes, isto é, quando repetir a lavoura de pepino várias vezes.

A expressão do valor esperado é muito semelhante aquela da média aritmética apresentada na seção , onde:

$$Me(X) = \bar{X} = \sum f_i x_i.$$

A distinção entre p_i, a probabilidade da variável aleatória X assumir o valor x_i, e f_i, a freqüência relativa do resultado x_i, é que a primeira corresponde a valores obtidos de um modelo teórico ajustado para os dados e, a segunda, corresponde as freqüências observadas da variável. Como p_i e f_i têm a mesma interpretação, todas as medidas e gráficos discutidos no estudo de análise exploratória de dados para distribuições de freqüências (f_i), possuem um correspondente na distrbuição de probabilidades (p_i).

Um segundo parâmetro, é a *variância* de uma distribuição de probabilidade, que mede o grau de dispersão (ou de concentração) de probabilidades em torno da média verdadeira. Quanto menor a variância, maior o grau de concentração das probabilidades em torno da média e vice-versa, quanto maior a variância, maior o grau de dispersão das probabilidades em torno da média.

Chamamos de variância de X ao valor:

$$\sigma_X^2 = \sum \left[x_i - E(X)\right]^2 p(x_i) = \sum p(x_i)x_i^2 - \left[\sum p(x_i)x_i\right]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{x_i^2 - 2x_i E(X) + [E(X)]^2\right\} p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - 2\left[\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\right]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}$$

O resultado acima foi obtido com as restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \quad e \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i).$$

Outra expressão para a variância de X é dada por:

$$\sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2.$$

Para contornar o problema da unidade elevada ao quadrado, definimos o *desvio padrão*,

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}.$$

Para o exemplo do lucro por caixa de batata-semente, temos:

x_i(lucro)	$p(x_i)$	x_i^2	$p(x_i)x_i^2$
-30,00	0,20	900,00	180
100,00	0,36	10.000,00	3.600
85,00	0,28	7.225,00	2.023
-10,00	0,16	100,00	16
Total	1,00		5819

Logo:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= 5819 - [52,20]^2 \\ \sigma_X^2 &= 3.094\ u.m.^2\end{aligned}$$

e o valor do desvio padrão é:

$$\begin{aligned}\sigma_X &= D.P.(X) = \sqrt{3.094,16} \\ \sigma_X &= D.P.(X) = 55,63\ u.m..\end{aligned}$$

Para o exemplo da variável lucro esperado por caixa de pepino para conserva, temos:

$$\sigma_X^2 = 281.400 - [494]^2$$

$$\sigma_X^2 = 37.364\ u.m.^2/cx.$$

O desvio padrão fica:

$$\begin{aligned}\sigma &= = \sqrt{37.364} \\ \sigma &= = 193,29\ u.m./cx.\end{aligned}$$

Para o exemplo da variável número de meninos em família com quatro crianças, temos:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= 5 - 2^2 = 1\ menino^2. \\ \sigma_X &= \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{1} = 1 \text{ menino.}\end{aligned}$$

Algumas Propriedades da Média e da Variância

1) Seja K uma constante, temos que $E(K) = K$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}E(K) &= \sum_{i=1}^{n} Kp(x_i) \\ &= K\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \\ &= K(1) = K.\end{aligned}$$

2) Sejam K uma constante e X uma variável aleatória, temos que: $E(KX) = KE(X)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}E(KX) &= \sum_{i=1}^{n} Kx_ip(x_i) \\ &= K\sum_{i=1}^{n} x_ip(x_i) \\ &= KE(X).\end{aligned}$$

3) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, temos que: $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$.
Demonstração: para facilitar o entendimento da demonstração construimos a tabela a seguir.

Y	X			p(y)
	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	
y_1=1	3/20	3/20	2/20	8/20
y_2=2	1/20	1/20	2/20	4/20
y_3=3	4/20	1/20	3/20	8/20
p(x)	8/20	5/20	7/20	1,00

$$\begin{aligned} E(X \pm Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i \pm y_j)p(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p(x_i, y_j) \pm \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p(x_i, y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) \pm \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Agora, para um i fixo,

$$\sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) = p(x_i)$$

e, para j fixo,

$$\sum_{i=1}^{m} p(xi, y_j) = p(y_j),$$

logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E(X \pm Y) &= \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i) \pm \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) \\ E(X \pm Y) &= E(X) \pm E(Y). \end{aligned}$$

Exemplo. Deve-se escolher um homen dentre um grupo de homens. O peso médio no grupo é de $\mu_H = 79$ Kg, com desvio padrão de $\sigma_H = 10$ Kg. Uma mulher deve ser escolhida de um grupo de mulheres com peso médio de $\mu_M = 65$ Kg e desvio padrão de $\sigma_M = 7$ Kg. Determine a $E(X_H + X_M)$ e a variância $Var(X_H + X_M)$ dos pesos combinados de um homen e de uma mulher.

$$E(X_H + X_M) = \mu_H + \mu_M$$

$$
\begin{aligned}
&= 79 + 65 = 144Kg. \\
\sigma^2_{X_H+X_M} &= \sigma^2_{X_H} + \sigma^2_{X_M} \ (X_H \text{ independente de } X_M) \\
&= 100 + 49 = 149Kg^2. \\
\sigma_{X_H+X_M} &= \sqrt{149} = 74,5 \ kg.
\end{aligned}
$$

4) Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p(x_i, y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p(x_i)p(y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i) \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j) \\
&= E(X)E(Y).
\end{aligned}
$$

5) $Var(K) = 0$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
Var(K) &= E(K^2) - [E(K)]^2 \\
&= K^2 - K^2 \\
Var(K) &= 0.
\end{aligned}
$$

6) $Var(KX) = K^2 Var(X)$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
Var(KX) &= E(K^2X^2) - [E(KX)]^2 \\
&= K^2E(X^2) - [KE(X)]^2 \\
&= K^2E(X^2) - K^2[E(X)]^2 \\
&= K^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} \\
&= K^2Var(X).
\end{aligned}
$$

Definição: Se X e Y são duas variáveis aleatórias, a covariância de X e Y é definida por:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y),$$

ou seja, o valor médio do produto dos desvios de X e Y em relação aos seus valores médios. A covariância é uma medida de associação entre X e Y.
Demonstração:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[x_i - E(X)][y_j - E(Y)]p(x_i,y_j) \\ Cov(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p(x_i,y_j) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i E(Y)p(x_i,y_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E(X)y_j p(x_i,y_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E(X)E(Y)p(x_i,y_j). \end{aligned}$$

Por definição:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p(x_i,y_j) = E(XY).$$

Logo,

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(Y)\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}p(x_i,y_j) \\ &\quad -E(X)\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{m}p(x_i,y_j) + E(X)E(Y)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p(x_i,y_j) \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Exemplo: vamos considerar a distribuição conjunta de probabilidades das variáveis X="número de vagens por planta" e Y="número de grãos por vagem":

	Y					$p(x)$
X	0	1	2	3	4	
0	0/15	0/15	0/15	0/15	0/15	0/15
1	2/15	2/15	3/15	2/15	1/15	10/15
2	0/15	1/15	2/15	1/15	1/15	5/15
$p(y)$	2/15	3/15	5/15	3/15	2/15	1

Inicialmente, definiremos a variável $W = XY$ e vamos obter a sua distribuição de probabil-

idades.

W	P(W)	WP(W)
0	2/15	0/15
1	2/15	2/15
2	4/15	8/15
3	2/15	6/15
4	3/15	12/15
6	1/15	6/15
8	1/15	8/15

Temos que: $E(X) = 20/15$, $E(Y) = 30/15$, portanto, $COV(X,Y)$=(42/15)-(20/15)(30/15) = (42/15)-(588/225) = 2,8-2,6667 =-0,1333.

7) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm Cov(X,Y)$

onde $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, como foi demonstrado.

Demonstração:

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E\left[(X+Y)^2\right] - [E(X+Y)]^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 - E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y). \end{aligned}$$

Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então $Cov(X,Y) = 0$ e, portanto,

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Observação: se $Cov(X,Y) = 0$ não implica que X e Y são independentes. Pode ter uma outra dependência que não a linear.

Uma fórmula prática para o cálculo da covariância é dada por:

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

4.4 Alguns Modelos Probabilísticos para Contagens

Os diferentes tipos de distribuições de probabilidades podem ser considerados como *modelos para descrever situações reais* que envolvam resultados gerados pelo acaso. Uma consequência da simplificação, ou seja, da eliminação de detalhes de pouca importância dos

fenômenos reais, é que, em suas formas mais puras, elementares, poucos problemas são realmente únicos. Por isso, freqüentemente um pequeno número de modelos é suficiente para resolver muitos problemas que, a primeira vista, não parecem relacionados. Podemos, então, concluir que a maioria dos problemas podem ser resolvidos com o auxílio de poucos modelos básicos.

Esses modelos, cada qual apresentam uma série de hipóteses ou pressuposições, que devem ser atendidas para que o modelo possa ser utilizado validamente.

O ponto chave para a utilização de um modelo consiste em *confrontar* as hipóteses básicas do modelo e as condições da situação real. Se as hipóteses básicas são verificadas (atendidas), pode-se usar o modelo em questão.

Nesta seção, iremos estudar alguns desses modelos, procurando enfatizar como eles ocorrem na prática, sua função de probabilidade, parâmetros, e como calcular probabilidades.

4.5 Distribuição de Bernoulli

Seja um experimento onde desejamos verificar se uma semente de trigo, "germina" ou "não germina".

É claro que quando realizamos um experimento estamos interessados em verificar alguma(s) variável(is). Então, precisamos associar uma variável aleatória X que chamaremos de "germinação da semente de trigo" aos possíveis resultados do experimento; como temos apenas dois resultados possíveis, a variável aleatória X vale:

$$\begin{aligned} x &= 1 \text{ se a semente germinar;} \\ x &= 0 \text{ se a semente não germinar.} \end{aligned}$$

Vamos estabelecer algumas condições (pressuposições):

1. Só é feita uma única tentativa (repetição) do experimento;

2. Só são possíveis dois resultados (germina ou não germina).

Vamos definir o evento G=\{A semente germina\}, sendo a sua probabilidade dada por $P(G) = \pi$, portanto, o valor do parâmetro π está entre 0 (zero) e 1 (um); a probabilidade da semente não germinar, é $P(\bar{G}) = 1 - \pi = q$.

A distribuição de probabilidades fica:

Resultados	x_i	p(x_i)
$\bar{G}$	0	$1-\pi = q$
G	1	π
Total		$\pi + (1-\pi) = 1$

Dizemos que a variável aleatória X="germinação da semente", assim definida, tem distribuição de Bernoulli.

A função de probabilidade de uma variável Bernoulli é dada por:

$$P(X = x_i) = \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i}. \tag{4.1}$$

Exemplo: Podemos obter as probabilidades da variável aleatória assumir os valores 0 e 1 através da aplicação da função de probabilidade:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \pi^0(1-\pi)^{1-0} = (1-\pi); \\ P(X=1) &= \pi^1(1-\pi)^0 = \pi. \end{aligned}$$

Média e Variância de uma Variável Aleatória Bernoulli

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i p(x_i) = (0\times(1-\pi)) + (1\times\pi) = 0+\pi = \pi. \\ VAR(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2. \\ E(X^2) &= \sum x_i^2 p(x_i) = 0^2(1-\pi) + 1^2\pi = \pi. \\ VAR(X) &= \pi - \pi^2 = \pi(1-\pi). \end{aligned}$$

Exemplo 1: uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja X= saiu bola verde. Verifique se é um ensaio de Bernoulli (confronte as suposições do modelo com as condições do ensaio). Determinar $P(X = x_i)$, calcular $E(X)$ e $Var(X)$.

$$\text{Sim, pois} \begin{cases} 1) \text{ uma única repetição} \\ 2) \text{ somente dois resultados (verde ou branco)} \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 0 \longrightarrow (1-\pi) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \\ 1 \longrightarrow \pi = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Podemos estruturar a função de probabilidade da seguinte forma:

$$P(X = x_i) = (0,40)^{x_i}(0,60)^{1-x_i}.$$

A média e a variância valem:

$$E(X) = 0,40 \text{ e } Var(X) = 0,24, \text{ respectivamente.}$$

Exemplo 2: em uma gaiola estão seis coelhos com uma mutação sanguínea letal e três outros com uma mutação óssea. Sorteia-se, aleatoriamente, um coelho dessa gaiola. Seja $X=$ presença de mutação óssea. Verifique se é um ensaio de Bernoulli. Determinar a $P(X = x_i)$, calcular $E(X)$, $Var(X)$.

$$\text{Sim, pois: } \begin{cases} 1) \text{ uma única repetição;} \\ 2) \text{ somente dois resultados possíveis (mutação óssea ou sanguínea).} \end{cases}$$

$$X = \begin{cases} 0 \longrightarrow (1-\pi) = \frac{6}{9} = 0,6667 \\ 1 \longrightarrow \pi = \frac{3}{9} = 0,3333 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X = x_i) &= (0,3333)^{x_i} \times (0,6667)^{1-x_i}. \\ E(X) &= \sum x_i p(x_i) = 0 \times 0,06667 + 1 \times 0,3333 = 0,3333. \\ Var(X) &= \pi(1-\pi) = 0,3333 \times 0,6667 = \frac{6}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

4.6 A Distribuição Binomial

O objetivo inicial é encontrarmos a função de probabilidade (a expressão matemática) da distribuição binomial[3]. Para isso vamos ver como a distribuição binomial ocorre na prática.

Suponha, agora, que desejamos verificar a germinação de duas sementes de trigo. Vamos estabelecer quatro pressuposições nessa experiência: primeira pressuposição: o fato de uma semente germinar ou não, não tem influência no fato da outra semente germinar ou não, isto é, a germinação das sementes são *independentes*; segunda pressuposição: a probabilidade das sementes germinarem permanece constante (para isso, deve-se utilizar no experimento, sementes bastante homogêneas quanto às propriedades físicas, químicas e biológicas) e igual a π (identicamente distribuídas); terceira pressuposição: só há dois resultados possíveis, germina, ou não germina, e a quarta pressuposição: existe $n = 2$ repetições. A variável (X) pode ser definida como o "número de sementes que germinam" e, a probabilidade de uma semente germinar continua sendo igual a π.

[3]Esta distribuição foi estudada pelo matemático suiço Jacob Bernoulli (1664-1705)

Observe que vamos usar as definições de $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$, onde $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ e $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, dadas nas subseções 3.6 e 3.7.

A distribuição de probabilidade fica:

Resultados	x_i	$p(x_i)$	
GG	2	$\pi\pi{=}\pi^2(1-\pi)^0$	$\longrightarrow$p(2)$=1\pi^2(1-\pi)^0=\binom{2}{2}\ \pi^2(1-\pi)^{2-2}$
$G\bar{G}$	1	$\pi(1-\pi){=}\pi^1(1-\pi)^1$	$\longrightarrow$p(1)$=2\pi^1(1-\pi)^1=\binom{2}{1}\ \pi^1(1-\pi)^{2-1}$
$\bar{G}G$	1	$(1-\pi)\pi{=}\pi^1(1-\pi)^1$	
$\bar{G}\bar{G}$	0	$(1-\pi)(1-\pi){=}\pi^0(1-\pi)^2$	$\longrightarrow$p(0)$=1\pi^0(1-\pi)^2=\binom{2}{0}\ \pi^0(1-\pi)^{2-0}$

Na tabela, o primeiro resultado mostrado é que as duas sementes germinam, isto é, temos o resultado GG. Neste caso, em que as duas sementes germinam, o valor assumido pela variável X, "número de sementes que germinam", é $x = 2$. Estamos considerando que a probabilidade de uma semente germinar é π, ou seja, $P(G) = \pi$. Assim, a probabilidade de duas sementes germinarem independentemente é dada por: $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2) = \pi\pi = \pi^2$, onde G_1 e G_2 representam as sementes 1 e 2, respectivamente. Esta probabilidade pode ser reescrita como:

$$\pi.\pi = \pi^2(1-\pi)^0 =$$

onde os expoentes 2 e 0 indicam que duas sementes germinaram e nenhuma semente não germinou, respectivamente; Ainda podemos escrever:

$$= 1\pi^2(1-\pi)^{2-2} =$$

onde o valor 1 indica que existe somente uma seqüência GG, e a diferença 2-2 indica que de duas sementes ensaiadas(o primeiro dois)as duas germinaram(o segundo dois), portanto, nenhuma não germinou. Finalmente podemos escrever:

$$= \binom{2}{2}\pi^2(1-\pi)^{2-2},$$

onde, $\binom{2}{2}$ leia-se, combinação de 2(duas sementes ensaiadas), tomados 2 a 2(duas sementes germinaram), e é calculada por:

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2!}{2!0!} = \frac{1\times 2}{1\times 2\times (1)} = 1.$$

Para o segundo resultado, em que uma semente germina (G) e a outra não germina ($\bar{G}$), a probabilidade é dada por:

$$P(G \cap \bar{G}) = P(G)P(\bar{G}) = \pi(1-\pi) = \pi^1(1-\pi)^1.$$

Observe que, temos duas combinações possíveis em que uma semente germina e a outra não germina, $G\bar{G}$ e $\bar{G}G$, portanto, a probabilidade vale:

$$P(G\bar{G} \cup \bar{G}G) = 2\pi^1(1-\pi)^1 = \binom{2}{1}\pi^1(1-\pi)^{2-1}.$$

Neste cálculo usamos combinações pois a ordem dos resultdos não importa. Na verdade, em termos de resultados, corresponde a um único resultado, qual seja: uma semente germina e a outra não germina.

Usamos o mesmo procedimento para calcular a $P(\bar{G} \cap \bar{G})$.

Vamos, agora, verificar a germinação de três sementes de trigo (vamos repetir o experimento 3 vezes); considerando verdadeira a hipótese de independência e probabilidades constantes, π, a distribuição de probabilidade fica:

Resultados	x_i	$P(X = x_i) = p(x_i)$	
GGG	3	$\pi\pi\pi = \pi^3(1-\pi)^0$	$\longrightarrow 1\pi^3(1-\pi)^0 = \binom{3}{3}\ \pi^3(1-\pi)^{3-3}$
GG$\bar{G}$	2	$\pi\pi(1-\pi) = \pi^2(1-\pi)^1$	$\longrightarrow 3\pi^2(1-\pi)^1 = \binom{3}{2}\ \pi^2(1-\pi)^{3-2}$
G$\bar{G}$G	2	$\pi(1-\pi)\pi = \pi^2(1-\pi)^1$	
$\bar{G}$GG	2	$(1-\pi)\pi\pi = \pi^2(1-\pi)^1$	
G$\bar{G}\bar{G}$	1	$\pi(1-\pi)(1-\pi) = \pi^1(1-\pi)^2$	$\longrightarrow 3\pi^1(1-\pi)^2 = \binom{3}{1}\ \pi^1(1-\pi)^{3-1}$
$\bar{G}$G$\bar{G}$	1	$(1-\pi)\pi(1-\pi) = \pi^1(1-\pi)^2$	
$\bar{G}\bar{G}$G	1	$(1-\pi)(1-\pi)\pi = \pi^1(1-\pi)^2$	
$\bar{G}\bar{G}\bar{G}$	0	$(1-\pi)(1-\pi)(1-\pi) = \pi^0(1-\pi)^3$	$\longrightarrow 1\pi^0(1-\pi)^3 = \binom{3}{0}\ \pi^0(1-\pi)^{3-0}$
Total		1	1

Generalizando para n ensaios. Vamos agora verificar a germinação de n sementes de trigo (n repetições do experimento, ou, também, podemos dizer, n ensaios independentes de Bernoulli), a probabilidade de k sementes de trigo germinar e, portanto, $n-k$ sementes não germinar, nesta seqüência:

$$\underbrace{G, G, ..., G}_{k}, \underbrace{\bar{G}, \bar{G}, ..., \bar{G}}_{n-k}$$

é dada por:

$$\pi^k(1-\pi)^{n-k}.$$

Mas, uma outra seqüência de k sementes que germinam e $n-k$ sementes que não germinam é:

$$G, G, G, ..., \bar{G}, \bar{G}, G, \bar{G}..., \bar{G}.$$

O valor da probabilidade continua sendo $\pi^k(1-\pi)^{n-k}$.
Uma outra seqüência poderia ser:

$$G, G, G, ..., \bar{G}, G, \bar{G}, \bar{G}..., \bar{G}.$$

Novamente, o valor da probabilidade nesta seqüência é $\pi^k(1-\pi)^{n-k}$.

Mas, existem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

de tais seqüências, onde k sementes germinam e $n-k$ sementes não germinam, de modo que a probabilidade de k sementes germinarem é dada por:

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k} \tag{4.2}$$

para $k = 0, 1, 2, 3.., n$.
Observações:
1) a denominação binomial decorre do fato de os coeficientes $\binom{n}{k}$ serem exatamente os coeficientes do desenvolvimento binomial das n potências $(a+b)$;
2) o cálculo dos coeficientes, para n e k grandes, são difíceis de serem realizados, por vezes necessita da ajuda de computadores, sendo assim, será estudado na seção 4.8 o uso de uma aproximação para a distribuição binomial.

Estas probabilidades também podem ser indicadas por:

$$b(k : n; \pi).$$

Os possíveis valores de $k = 0, 1, 2, 3..., n$ e as probabilidades $P(X = k)$, dadas em 4.2 constituem a chamada *distribuição binomial*.

Quando uma variável aleatória X tem distribuição binomial com os parâmetros n e π escrevemos:

$$X : b(n; \pi).$$

Suposições do modelo binomial:

1. Existem n repetições ou provas idênticas do experimento. *Exemplo:* número de plantas sadias colhidas em parcelas de $20m^2$ (foram plantadas 27 plantas em cada parcela), $X : 0, 1, 2, ..., 27$, então, n é o número total de casos possíveis da variável que estamos estudando.

2. Só há dois tipos de resultados possíveis (plantas sadias ou doentes).

3. As probabilidades π de sucesso e $1-\pi$ de fracasso permanecem constantes em todas as repetições. Na prática não temos certeza absoluta disso, mas consideramos verdadeira esta suposição desde que as probabilidades sejam próximas.

4. Todos os resultados das repetições são independentes uns dos outros.

Exemplo 1. Num rebanho bovino 30% dos animais estão atacados de febre aftosa. Retira-se ao acaso, uma amostra de 10 animais.
1)Verifique se a variável "número de animais doentes" pode ser estudada pelo modelo binomial. Justifique.
2) Estruturar a função de probabilidade e representar a distribuição de probabilidade num gráfico.
3) Qual a probabilidade de se encontrar 6 animais doentes?

Primeiramente vamos verificar se a variável X: número de animais com febre aftosa, pode ser estudada pelo modelo binomial.
1) Temos $n = 10$ animais, então $X : 0, 1, 2, ..., 10$.
2) Uma animal está ou não está com febre aftosa.
3) A probabilidade para cada animal, de ter febre aftosa, é constante.
4) Os 10 animais são selecionados aleatoriamente, ao acaso, isso garante a independência.
Assim,

$$X : b(10; 0, 30).$$

Temos:

$$\begin{aligned} \pi &= 0,30 \\ 1-\pi = q &= 1-0,30 = 0,70 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

portanto, a estrutura da função de probabilidade é dada por:

$$P(X=k) = \binom{10}{k} 0,30^k 0,70^{10-k}.$$

No apêndice 1 temos a tabela das probabilidades binomiais. Como sabemos, estas probabilidades são dadas em função do número de repetições e da proporção de sucessos. Para uma distribuição binomial, temos que b(6:10;0,30)=0,037=3,7%. Também, obtemos diretamente

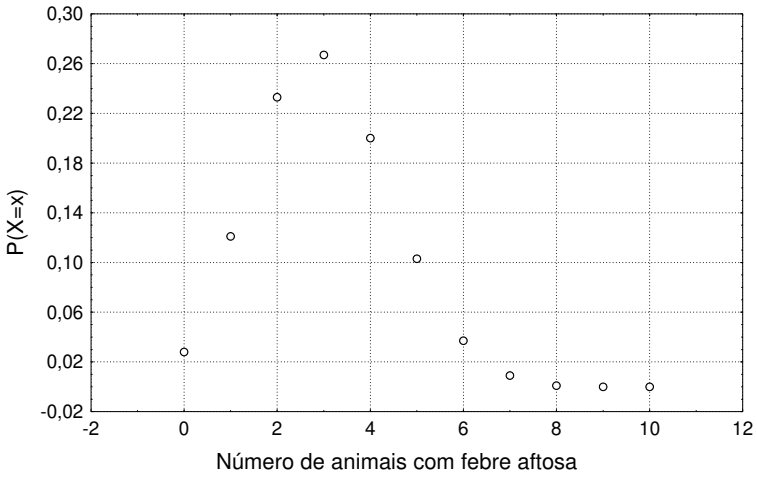


Figura 4.3: Distribuição de probabilidade para animais com febre aftosa

da tabela da distribuição binomial, que:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &\longrightarrow b(0:10;0,30) = 0,028\\
P(X=1) &\longrightarrow b(1:10;0,30) = 0,121\\
P(X=2) &\longrightarrow b(2:10;0,30) = 0,233\\
P(X=3) &\longrightarrow b(3:10;0,30) = 0,267\\
P(X=4) &\longrightarrow b(4:10;0,30) = 0,200\\
P(X=5) &\longrightarrow b(5:10;0,30) = 0,103\\
P(X=6) &\longrightarrow b(6:10;0,30) = 0,037\\
P(X=7) &\longrightarrow b(7:10;0,30) = 0,009\\
P(X=8) &\longrightarrow b(8:10;0,30) = 0,001\\
P(X=9) &\longrightarrow b(9:10;0,30) = 0,000\\
P(X=10) &\longrightarrow b(10:10;0,30) = 0,000
\end{aligned}$$

O gráfico da distribuição de probabilidade é dado na figura 4.3.

A probabilidade de encontrarmos 6 animais doentes, isto é, de $k=6$ vale:

$$\begin{aligned}
P(X=6) &= \binom{10}{6}(0,30)^6(0,70)^4 = 210\times 0,00073\times 0,2401\\
P(X=6) &= 0,037\\
P(X=6) &= 3,7\%.
\end{aligned}$$

Exemplo 2. Numa criação de coelhos, a taxa de nascimento de machos é de 40%. Qual a probabilidade de que nasçam pelo menos 2 coelhos machos, num dia em que nasceram 19 coelhos? Estruturar a função de probabilidade e representar a distribuição graficamente.

Primeiramente, vamos verificar se a variável X: número de coelhos machos, pode ser estudada pelo modelo binomial.

1) Temos n=19 repetições do experimento.

2) Um coelho é macho ou é fêmea.

3) A probabilidade de ser macho é 0,40 e permanece constante.

4) Os resultados (macho e fêmea), em cada nascimento, são independentes.

Assim:

$$\begin{aligned} X &= 0, 1, 2, 3, ..., 19 \\ \pi &= 0,40 \end{aligned}$$

logo:

$$X : b(19; 0, 40).$$

Portanto, a estrutura da função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{19}{k} 0,40^k 0,60^{19-k}.$$

A probabilidade desejada, $P(X \geq 2)$, é dada por:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{19}{0} (0,40)^0 (0,60)^{19} + \binom{19}{1} (0,40)^1 (0,60)^{18} \right] \\ &= 1 - (0,000 + 0,001) \\ &= 0,999. \end{aligned}$$

As probabilidades para $X : b(19; 0, 40)$, valem:

$$\begin{array}{rclrcl} P(X = 0) &=& 0,000 & P(X = 10) &=& 0,098 \\ P(X = 1) &=& 0,001 & P(X = 11) &=& 0,053 \\ P(X = 2) &=& 0,005 & P(X = 12) &=& 0,024 \\ P(X = 3) &=& 0,017 & P(X = 13) &=& 0,008 \\ P(X = 4) &=& 0,047 & P(X = 14) &=& 0,002 \\ P(X = 5) &=& 0,093 & P(X = 15) &=& 0,001 \\ P(X = 6) &=& 0,145 & P(X = 16) &=& 0,000 \\ P(X = 7) &=& 0,180 & P(X = 17) &=& 0,000 \\ P(X = 8) &=& 0,180 & P(X = 18) &=& 0,000 \\ P(X = 9) &=& 0,146 & P(X = 19) &=& 0,000. \end{array}$$

O gráfico da distribuição de probabilidade é dado na figura 4.4.

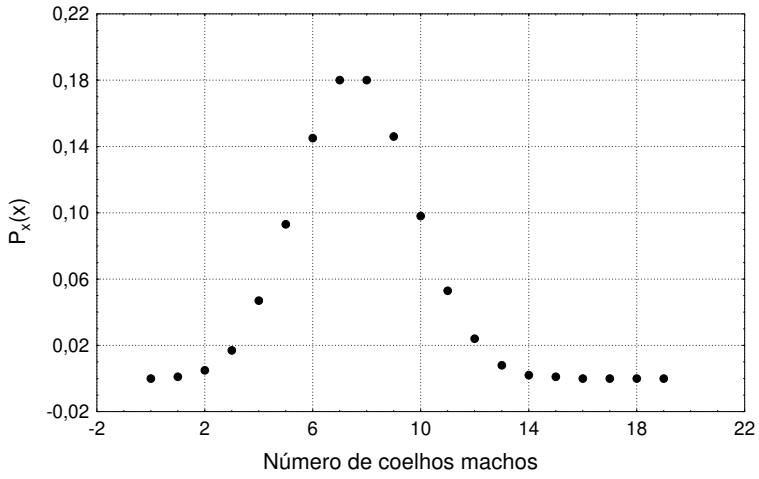


Figura 4.4: Distribuição de probabilidade para animais com febre aftosa

A Média e Variância de Uma Variável Binomial

Uma variável aleatória binomial X é a soma de n variáveis *independentes* do tipo Bernoulli (Y),

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_n.$$

Aplicando as propriedades da esperança matemática e variância, e lembrando que $E(Y_i) = \pi$ e $Var(Y_i) = \pi(1-\pi)$, temos:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y_1 + Y_2 + Y3 + ... + Y_n) \\ E(X) &= E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) + ... + E(Y_n) \\ E(X) &= \pi + \pi + \pi + ... + \pi \\ E(X) &= n\pi. \end{aligned}$$

No exemplo dos animais com febre aftosa , temos:

$$\begin{aligned} E(X) &= 10 \times 0,30 \\ E(X) &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, em média, esperamos encontrar três animais com aftosa, dentre os dez selecionados.

A variância fica:

$$Var(X) = Var(Y_1 + Y_2 + Y_3 + ... + Y_n),$$

como os $(Y's)$ são independentes, a variância de uma soma de variáveis aleatórias é a soma

das variâncias dessas variáveis, então:

$$\begin{array}{rcl} Var(X) & = & Var(Y_1) + Var(Y_2) + ... + Var(Y_n) \\ Var(X) & = & \pi(1-\pi) + \pi(1-\pi) + ... + \pi(1-\pi) \\ Var(X) & = & n\pi(1-\pi). \end{array}$$

No exemplo dos animais com febre aftosa, temos:

$$Var(X) = n\pi(1-\pi) = 10 \times 0,30 \times 0,70 = 2,1 \text{ animais}^2.$$

O desvio padrão vale:

$$D.P.(X) = \sqrt{Var} = \sqrt{2,1} = 1,449 \text{ animais.}$$

Uma variável aleatória binomial, como vimos, é obtida de contagens, freqüências de sucessos, todavia, em muitas situações, é importante expressar os dados na forma de *proporção*, por exemplo, representar que 18 sementes germinaram em 20 sementes testadas, corresponde a $p = 18 \div 20 = 0,90$. Neste caso (de proporções) a média e a variância são dadas por:

$$E(P) = \pi.$$

Demonstração:

$$E(P) = E\left(\frac{X_1}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1) = \frac{n\pi}{n} = \pi.$$

$$Var(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

Demonstração:

$$Var(P) = Var(\frac{X_1}{n}) = \frac{1}{n^2}Var(X_1) = \frac{1}{n^2}n\pi(1-\pi) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

As probabilidades das proporções são exatamente iguais as probabilidades das contagens. Para o exemplo dos animais com febre aftosa, a probabilidade da proporção de animais com febre aftosa, numa amostra de 10 animais, ser igual a 0,30 é igual a 0,267, ou seja, exatamente igual a probabilidade de encontrarmos 3 animais com febre aftosa, $P(X = 3) = 0,267$. Assim, a distribuição de probabilidades para a proporção de animais com febre aftosa é dada por:

P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)	P(X=4)	P(X=5)	P(X=6)	P(X=7)	P(X=8)	P(X=9)	P(X=10)
0,028	0,121	0,233	0,267	0,200	0,103	0,037	0,009	0,001	0,000	0,000

4.7 A Distribuição de Poisson

Esta distribuição é largamente utilizada para *contagens* de indivíduos, plantas, colônias de bactérias, itens, objetos, dados num *intervalo de tempo*, numa *área*, num *volume*, num *comprimento*. A unidade de medida deve ser definida de tal modo que as contagens sejam baixas. Considera-se um número baixo como sendo menor que 10. Exemplos de variáveis Poisson: número de indivíduos por quadrante de $1m^2$; número de colônias de bactérias de uma dada cultura por $0,01\ mm^2$ numa plaqueta de microscópio; número de defeitos por 100 m de tecido; número de acidentes numa esquina movimentada e bem sinalizada por dia; número de chamadas telefônicas numa central de PABX num intervalo de tempo de $\frac{1}{2}$ minuto; número de partículas radioativas emitidas numa unidade de tempo; e número de micronúcleos/1000 células.

Uma aplicação importante da distribuição de Poisson[4] na área biológica, diz respeito ao estudo do padrão de dispersão de uma certa espécie vegetal ou animal num campo ou floresta, enfim, numa determinada área. Portanto, esta distribuição é muito utilizada nas disciplinas de dinâmica de populações e entomologia.

Inicialmente precisamos considerar que os indivíduos da espécie se distribuem *aleatoriamente* no campo. Isto significa que a posição de um indivíduo é completamente *independente* da posição de qualquer outro indivíduo da população, como mostra a figura 4.5[5].

Para o estudo da dispersão, supõe-se que uma grade é sobreposta à área de estudo, formando um grande número de quadrantes (quadrados ou retângulos). A ilustração é dada na figura 4.7. Podemos contar o número de quadrantes com zero indivíduos, com um indivíduo, com dois indivíduos, e assim por diante. Observe que não há tendência de quadrantes com maior ou menor número de indivíduos e que o número de indivíduos num quadrante é *independente* do número de indivíduos em outro quadrante.

Pode este padrão de dispersão aleatória ser descrito matematicamente? A resposta é sim, e é feita através de um modelo, cuja função de probabilidade, ou seja, a probabilidade de encontrar X indivíduos por quadratne, é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{4.3}$$

Onde e é o número de Euler e vale 2,718282 e λ é o número médio de indivíduos por

[4]O nome desta distribuição está associado ao matemático francês S. Denis Poisson, (1781-1840).

[5]Outras duas formas de distribuições encontradas na natureza são a uniforme e por contágio, mostradas na fugura 4.6. Esta última é mais comum de ocorrer, neste caso, a distribuição de probabilidade utilizada é a binomial negativa.

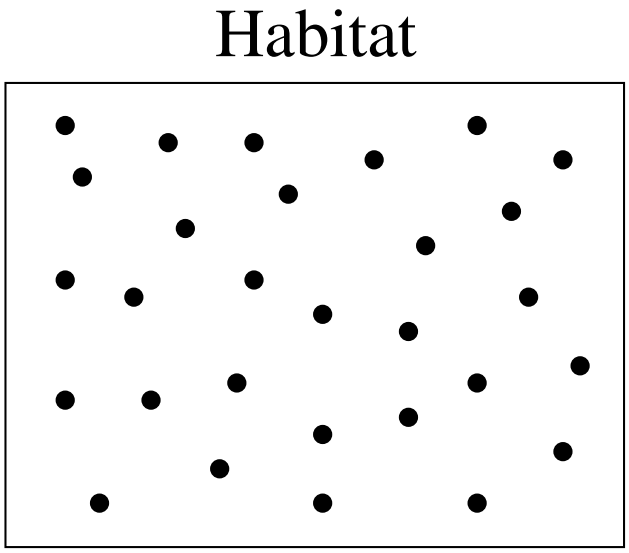
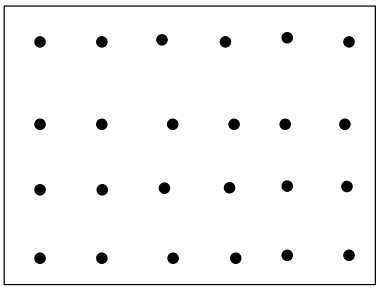
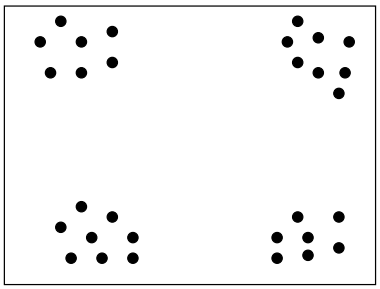


Figura 4.5: Distribuição aleatória dos indivíduos de uma determinada espécie numa área



(a) Distribuição uniforme



(b) Distribuição por contágio

Figura 4.6: Outras formas de distribuições

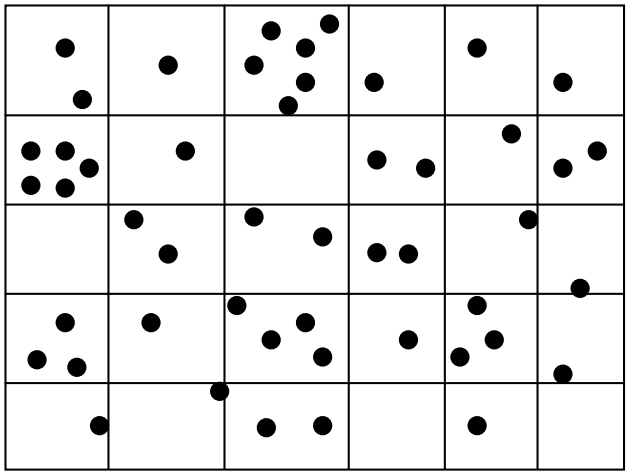


Figura 4.7: Distribuição em quadrantes

quadrante. O $k!$ representa "k fatorial", por exemplo, 3!=3.2.1=6. O 0! é definido como sendo igual a 1. As probabilidades de encontrar X plantas por quadrante dadas pela função 4.3, juntamente com os valores de $k = 0, 1, 2, 3, ...$ constituem a distribuição de Poisson. Probabilidades, para alguns valores de λ são dadas no Apêndice 2.

Se o número de quadrantes com k indivíduos aproximam-se dos valores esperados de quadrantes com k indivíduos pelo modelo de Poisson, então a dispersão da espécie é *aleatória*. Este é um importante resultado para os Biólogos.

Exemplo 1. Numa área dividida em quadrantes de $0,50m^2$, foram encontradas em média 2,5 espécimes. Considerando que o modelo de Poisson é adequado, qual é a probabilidade de se encontrar num quadrante exatamente 4 espécimes? Seja X o número de espécimes por $0,5m^2$.

$$P(X = 4) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^4}{4!} = 0,1336$$

Qual é a probabilidade de se encontrar no máximo 1 espécime por quadrante?

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^0}{0!} = 0,0821.$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2,5}(2,5)^1}{1!} = 0,2052.$$

Portanto, a resposta é dada por: 0,0821+0,2052=0,2873.

Exemplo 2. Numa placa de microscópio, dividida em quadrantes de $1mm^2$, encontra-se em média 5 colônias por mm^2. Considerando que a distribuição de Poisson é adequada, ou seja: 1) as colônias distribuem-se aleatoriamente na placa e, 2) o número médio de colônias

por mm^2 permanece constante e é baixo, determine a probabilidade de um quadrante ter exatamente 1 colônia. Como $\lambda = 5$, temos:

$$P(X = 1) = \frac{e^{-5}(5)^1}{1!} = 0,0337.$$

Qual a probabilidade de se encontrar pelo menos 2 colônias por mm^2? Pode-se calcular esta probabilidade como:

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}(5)^0}{0!} = 0,0067.$$

Portanto,

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,0067 + 0,03369) = 0,9596.$$

Qual a probabilidade de se encontrar 8 colônias em $2mm^2$? Neste caso, $\lambda \times A = 5 \times 2 = 10$ colônias. Assim:

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda A}(\lambda A)^k}{k!}$$

onde λ é o número médio de colônias por $1mm^2$ e A é a área de tamanho fixo. O resultado fica:

$$P(X = 8) = \frac{e^{-10}(10)^8}{8!} = 0,1126.$$

4.8 Aproximação da distribuição binomial pela distribuição de Poisson

O modelo de Poisson pode ser considerado como limite da distribuição binomial, isto é, para determinados valores de n **grande** (fazendo-se n cada vez maior) e π **pequeno** (fazendo-se π cada vez menor), verifica-se a seguinte aproximação:

$$b(k : n, \pi) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k} \cong \frac{e^{\lambda}(\lambda)^k}{k!}, \text{com} \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4.4}$$

com um único parâmetro $\lambda = n\pi$, interpretado como a freqüência média de ocorrência de um particular valor k. A distribuição limite é chamada de distribuição de Poisson. Para saber se a aproximação é boa, uma recomendação prática é verificar se a desigualdade $n\pi \leq 7$ é válida.

Na tabela 4.1 estão apresentadas algumas situações do cálculo das probabilidades usando os dois modelos a qual passamos a fazer algumas interpretações. O cálculo das probabilidades de Poisson foram calculadas para cinco valores de freqüências médias, quais sejam: $\lambda = 1$,

Tabela 4.1: Aproximação da distribuição binomial pela distribuição de Poisson, variando o tamanho da amostra n e as probabilidades π

Distribuição	n	π	k								
			0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Binomial	500	0,0020	0,367511	0,368248	0,184124	0,061252	0,015252	0,003032	0,000501	0,000071	0,000010
	1000	0,0010	0,367695	0,368063	0,184032	0,061283	0,015290	0,003049	0,000506	0,000072	0,000010
	2000	0,0005	0,367787	0,367971	0,183986	0,061298	0,015309	0,003057	0,000509	0,000072	0,000010
	5000	0,0002	0,367843	0,367916	0,183958	0,061307	0,015321	0,003062	0,000510	0,000073	0,000010
	10000	0,0001	0,367861	0,367898	0,183949	0,061310	0,015324	0,003064	0,000510	0,000073	0,000010
Poisson	$\lambda = 1$		0,367879	0,367879	0,183940	0,061313	0,015328	0,003066	0,000511	0,000073	0,000010
Binomial	500	0,0040	0,134794	0,270670	0,271213	0,180809	0,090223	0,035944	0,011909	0,003375	0,001063
	1000	0,0020	0,135065	0,270670	0,270942	0,180628	0,090223	0,036017	0,011970	0,003406	0,001080
	2000	0,0010	0,135200	0,270671	0,270806	0,180537	0,090223	0,036053	0,012000	0,003422	0,001088
	5000	0,0004	0,135281	0,270671	0,270725	0,180483	0,090224	0,036075	0,012018	0,003431	0,001093
	10000	0,0002	0,135308	0,270671	0,270698	0,180465	0,090224	0,036082	0,012024	0,003434	0,001095
Poisson	$\lambda = 2$		0,135335	0,270671	0,270671	0,180447	0,090224	0,036089	0,01203	0,003437	0,001097
Binomial	500	0,0100	0,006570	0,033184	0,083631	0,140230	0,175995	0,176351	0,146959	0,104759	0,132320
	1000	0,0050	0,006654	0,033437	0,083929	0,140303	0,175731	0,175908	0,146590	0,104602	0,132848
	2000	0,0025	0,006696	0,033563	0,084077	0,140339	0,175599	0,175687	0,146406	0,104523	0,133110
	5000	0,0010	0,006721	0,033639	0,084165	0,140360	0,175520	0,175555	0,146296	0,104476	0,133267
	10000	0,0005	0,006730	0,033664	0,084195	0,140367	0,175494	0,175511	0,146259	0,104461	0,133319
Poisson	$\lambda = 5$		0,006738	0,033690	0,084224	0,140374	0,175467	0,175467	0,146223	0,104445	0,133372
Binomial	500	0,0140	0,000868	0,006161	0,021827	0,051447	0,090763	0,127841	0,149753	0,150057	0,401284
	1000	0,0070	0,000890	0,006272	0,022084	0,051789	0,090996	0,127780	0,149377	0,149527	0,401286
	2000	0,0035	0,000901	0,006327	0,022213	0,051960	0,091112	0,127748	0,149189	0,149264	0,401286
	5000	0,0014	0,000907	0,006361	0,022290	0,052061	0,091181	0,127729	0,149077	0,149107	0,401286
	10000	0,0007	0,000910	0,006372	0,022315	0,052095	0,091203	0,127723	0,149040	0,149055	0,401286
Poisson	$\lambda = 7$		0,000912	0,006383	0,022341	0,052129	0,091226	0,127717	0,149003	0,149003	0,401286
Binomial	500	0,0200	0,000041	0,000419	0,002132	0,007221	0,018310	0,037069	0,062413	0,089889	0,782507
	1000	0,0100	0,000043	0,000436	0,002200	0,007393	0,018614	0,037453	0,062737	0,089987	0,781137
	2000	0,0050	0,000044	0,000445	0,002235	0,007480	0,018765	0,037644	0,062897	0,090034	0,780457
	5000	0,0020	0,000045	0,000450	0,002256	0,007532	0,018856	0,037758	0,062992	0,090061	0,780050
	10000	0,0010	0,000045	0,000452	0,002263	0,007549	0,018886	0,037795	0,063024	0,090070	0,779915
Poisson	$\lambda = 10$		0,000045	0,000454	0,002270	0,007567	0,018917	0,037833	0,063055	0,090079	0,779779

$\lambda = 2$, $\lambda = 5$, $\lambda = 8$ e $\lambda = 10$. O cálculo das probabilidades binomiais foi realizado com combinações de n e π, cujos produtos fossem iguais as médias da Poisson. Para $n = 500$, $\pi = 0,0020$ ($\lambda = 1$) e $k = 4$, observamos um erro relativo, ou seja, um desvio relativo da Poisson para a binomial de 0,50%, o que já é um valor considerável, indicando que a aproximação não é excelente para este tamanho de amostra. Para amostras de tamanhos iguais a 5.000 e 10.000, tal que $\lambda = 1$, os erros relativos para $k = 0,\ 1,\ 2,3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$, foram todos abaixo de 0,30%, valores baixos, indicando boa aproximação. Passando para uma média $\lambda = 10$, só encontramos erros relativos abaixo de 0,40% para $n = 10.000$ e $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$. Isto demonstra que a recomendação prática de se utilizar a aproximação para $\lambda \leq 7$ é procedente. Observa-se, também, que os erros relativos para valores de k próximos de λ são baixos para amostras de tamanho mínimo igual a 1.000, para as médias tomadas como exemplos..

Exemplo 1: Mil pássaros tem a "chance", um de cada vez, de escolher entre duzentas gaiolas dispostas em um círculo. Admitimos que os pássaros não têm preferência direcional. Vamos definir a varíavel de interesse como sendo X="número de pássaros por gaiola". Qual

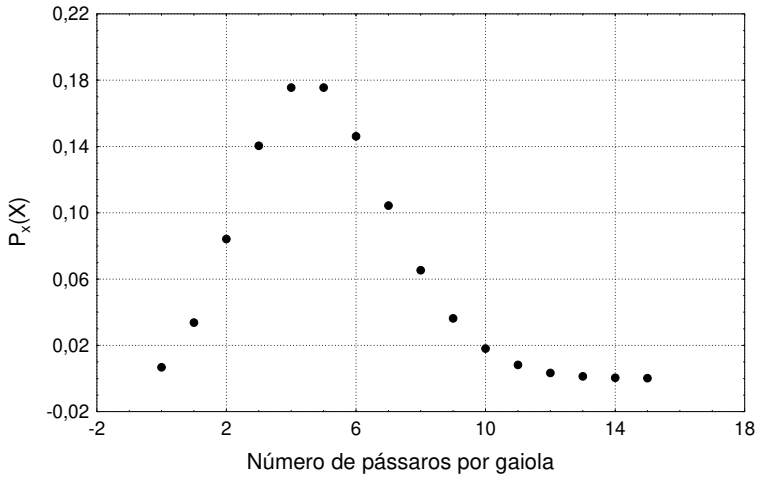


Figura 4.8: Gráfico da distribuição de probabilidades do número de pássaros

é a probabilidade de que uma gaiola específica seja escolhida $0, 1, 2, ...,$ vezes?

Como $n = 1000$, $\pi = 1/200 = 0,005$ e $n\pi = 1000 \times 0,005 = 5 \leq 7$ podemos usar a distribuição de Poisson como aproximação. Temos que $P(X = 0)$ é a probabilidade de uma gaiola não ser escolhida por nenhum pássaro, e assim por diante. Temos que:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{e^{-5}(5)^0}{0!} = \frac{0{,}00674\times 1}{1} = 0,0067\\
P(X=1) &= \frac{e^{-5}(5)^1}{1!} = \frac{0{,}00674\times 5}{1} = 0,0337\\
P(X=2) &= \frac{e^{-5}(5)^2}{2!} = \frac{0{,}00674\times 25}{1\times 2} = 0,0842\\
P(X=3) &= \frac{e^{-5}(5)^3}{3!} = \frac{0{,}00674\times 125}{1\times 2\times 3} = 0,1404\\
P(X=4) &= \frac{e^{-5}(5)^4}{4!} = \frac{0{,}00674\times 625}{1\times 2\times 3\times 4} = 0,1755.
\end{aligned}$$

Para os demais casos, temos:

$$\begin{aligned}
P(X=5) &= 0,1755 \quad P(X=11) = 0,0082\\
P(X=6) &= 0,1462 \quad P(X=12) = 0,0034\\
P(X=7) &= 0,1044 \quad P(X=13) = 0,0013\\
P(X=8) &= 0,0653 \quad P(X=14) = 0,0005\\
P(X=9) &= 0,0363 \quad P(X=15) = 0,0002\\
P(X=10) &= 0,0181 \quad P(X\geq 16) = 0.
\end{aligned}$$

A distribuição de probabilidades, de acôrdo com a distribuição de Poisson, é dada na figura 4.8.

Exemplo 2: a probabilidade de um indivíduo ter reação negativa a certa injeção é de 0,001. Suponha que 2.000 indivíduos receberam a injeção. Estruturar a função de probabil-

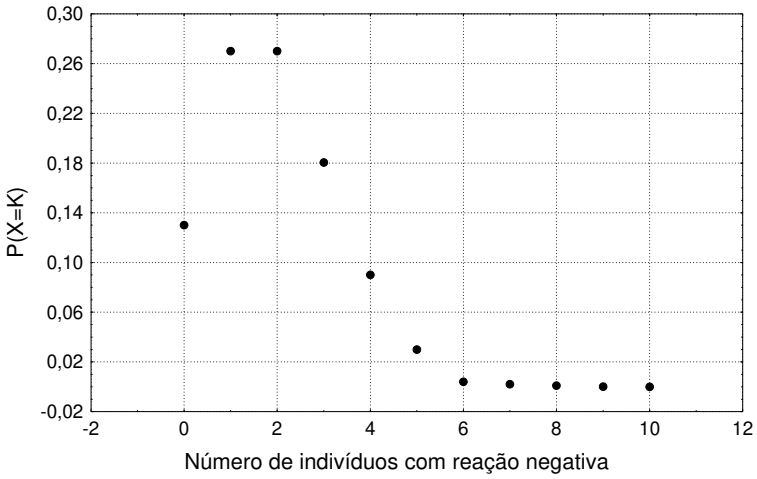


Figura 4.9: Distribuição de probabilidade para reação negativa

idade e fazer o gráfico da distribuição. Determinar a probabilidade de que, (a) exatamente três, (b) mais que quatro tenham reação negativa.

Com as informações do problema, temos:

$$\pi = 0,001 \quad n = 2000 \quad \lambda = 2000 \times 0,001 = 2$$

Assim:

$$P(X = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, ...$$

A distribuição de probabilidades de acôrdo com o modelo de Poisson é dada na figura 4.9. A probabilidade de exatamente 3 apresentarem reação negativa é:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0,1804 = 18,4\%.$$

A probabilidade de mais de 4 apresentarem reação negativa é:

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] \\ &= 1 - [0,1353 + 0,2707 + 0,2707 + 0,1804 + 0,0902] = 1 - 94,73\% = 5,27\%. \end{aligned}$$

A Média e a Variância de Uma Variável Poisson

Demonstra-se que:

$$E(X) = Var(X) = \lambda.$$

Portanto, na distribuição de Poisson, a média é igual a variância. Uma justificativa é que fazendo-se π tender a zero, implica que, $q = 1 - \pi$, tende para 1. Como a média, $\lambda = n\pi$, é um valor considerado fixo e finito, temos que a variância $\sigma^2 = n\pi(1-\pi)$, tende para $\sigma^2 = n\pi$.

No exemplo dos pássaros:

$$\begin{aligned} E(X) &= n\pi = \lambda \implies \text{média de 5 pássaros por gaiola.} \\ Var(X) &= 5 \text{ pássaros}^2. \\ D.P.(X) &= \sqrt{5} = 2,23 \text{ pássaros/gaiola.} \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

1) Num certo ano, o IBAMA registrou no litoral catarinense (área de reserva), 18 mortes de golfinhos.

a)Qual é a probabilidade de, num determinado mês do próximo ano, ocorrerem menos de 2 mortes?

b) Qual é a probabilidade de ocorrerem 2 mortes no próximo semestre?

a)

$$\begin{aligned} \lambda &= 18/12 = 1,5 \text{ golfinhos/mês} \\ P(X=0) &= (e^{-1,5}1,5^0)/0! = 0,223130 \times 1 = 0,22313 \\ P(X=1) &= (e^{-1,5}1,5^1)/1! = 0,334695 \\ P(X=0)+P(X=1) &= 0,22313 + 0,334695 = 0,557825. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lambda &= 18/2 = 9 \text{ golfinhos} \\ P(X=2) &= (e^{-9}9^2)/2! = 0,0050 \end{aligned}$$

2) Suponha que 80% de uma criação de suínos esteja atacada por leptospirose. Se uma amostra de 1000 suínos for examinada por um veterinário e seja Y o número de porcos doentes dessa amostra de 1000:

a) qual é o valor esperado de Y?

b) qual é o desvio padrão de Y?

Sendo:

$$n = 1000 \quad \pi = 0,80 \quad (1-\pi) = 0,20$$

a) $E(Y) = n\pi = 800$ suínos.

b) $D.P.(Y) = \sqrt{n\pi(1-\pi)} = \sqrt{160}$=12,649 suínos.

$Var(Y) = 160$ suínos^2.

3) Doze pares de animais experimentais são submetidos a duas dietas diferentes, A e B. A atribuição da dieta aos animais de cada par é feita ao acaso, aleatoriamente (princípio da

casualização). Após o experimento acha-se a diferença em ganho de peso entre os animais submetidos a dieta A e a dieta B. Se a diferença for positiva ($A - B > 0$), o resultado será chamado de sucesso.
a) Verifique se é um experimento binomial (atender as 4 suposições).
b) Calcule $E(X)$, $Var(X)$ e $D.P.(X)$.
c) Qual a probabilidade de que pelo menos 9 sucessos ocorram se as duas dietas não possuem diferenças reais no que diz respeito a variável ganho de peso?

a)

- Têm-se $n = 12$ repetições do experimento.
- π constante, em cada repetição a probabilidade de sucesso é de 50%.
- Só há dois tipos de resultados possíveis.
- Os resultados das repetições são independentes.

b)

$$\begin{aligned} E(X) &= 12 \times \frac{1}{2} = 6 \\ Var(X) &= n\pi(1-\pi) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \\ D.P.(X) &= \sqrt{3} = 1,73. \end{aligned}$$

c)

$$\pi = 0,50 = 50\% \quad (1-\pi) = 0,50 = 50\%.$$

$$\begin{aligned} \binom{12}{9} \quad (0,50)^9(0,50)^3 &= 0,0540 \\ \binom{12}{10} \quad (0,50)^{10}(0,50)^2 &= 0,0160 \\ \binom{12}{11} \quad (0,50)^{11}(0,50)^1 &= 0,0030 \\ \binom{12}{12} \quad (0,50)^{12}(0,50)^0 &= 0,000. \end{aligned}$$

$$0,0540 + 0,0160 + 0,0030 + 0,000 = 0,73 = 73\%$$

4) Na tabela 4.2, X significa número de filhos homens em famílias com 12 filhos. Calcule para cada valor da variável o número de famílias que você deveria esperar se $X : b(12; 0,5)$
A probabilidade de encontrarmos 0 homens numa família é dada por:

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} 0,50^0 0,50^{12-0} = 0,000.$$

Tabela 4.2: Número de famílias com X homens

X	Nº observado de famílias	Probabilidades	Nº esperado
0	5	0,000	0
1	35	0,003	32
2	180	0,016	171
3	599	0,054	577
4	1250	0,121	1294
5	1990	0,193	2063
6	2400	0,226	2416
7	2060	0,193	2063
8	1350	0,121	1294
9	600	0,054	577
10	179	0,016	171
11	35	0,003	32
12	7	0,000	0
Total	10.690	1,000	10690

A probabilidade de encontrarmos 1 homem numa família é dada por:

$$P(X = 1) = \binom{12}{1} 0,50^1 0,50^{12-1} = 0,003.$$

A probabilidade de encontrarmos 2 homem numa família é dada por:

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} 0,50^2 0,50^{12-2} = 0,016.$$

Essas probabilidades e as demais são dadas na terceira coluna da tabela 4.2. O número esperado de famílais com zero filhos homens, pela binomial, vale: $10690 \times 0 = 0$; o número esperado de famílias com 1 filho homem, pela binomial, vale: $10690 \times 0,003 = 32$, e assim para os demais valores de X. Esses valores são encontrados na quarta coluna da tabela 4.2.

Você acha que o modelo binomial é razoável para explicar o fenômeno? Justifique.
Sim. Pois as freqüências esperadas são próximas das freqüências observadas. Apresentam o mesmo comportamento, regularidade.

4.9 Exercícios Propostos

1) Considerando que a probabilidade de nascer uma criança do sexo feminino é de 47%, qual a probabilidade de que uma família de 6 filhos seja constituída por seis crianças do sexo feminino?

2) Suponhamos que a porcentagem de germinação de sementes de feijão seja de 70%. Vão ser semeadas 4 sementes por cova, as quais serão espaçadas de 0,40m entre linhas e 0,20m entre covas. Supondo-se que cada canteiro a ser semeado conste de 6 linhas de 5m de comprimento, qual o número médio esperado de covas falhadas (nem uma semente germinou, das quatro semeadas) por canteiro?

3) Um contador eletrônico de bactérias registra, em média, 5 bactérias por cm^3 de um líquido. Admitindo-se que esta variável tenha distribuição de Poisson;
a) qual é o desvio padrão do número de bactérias por cm^3?
b) Encontre a probabilidade de que pelo menos duas bactérias ocorram num volume de líquido de $1cm^3$.

4) Em 30 bezerros nascidos, 60% foi do sexo feminino. Calcular o valor esperado (esperança) e o desvio padrão esperado.

5) Se a probabilidade de um indivíduo sofrer uma reação nociva, resultante da infecção de um determinado soro é 0,0001. Determinar a probabilidade de, entre 2.000 indivíduos: a) exatamente três sofrerem a reação; b) mais de dois sofrerem a reação.

6) Um produtor de sementes vende pacotes com 20 sementes cada. Os pacotes que apresentarem mais de uma semente sem germinar serão indenizados. A probabilidade de uma semente germinar é 0,98. a) Qual é a probabilidade de um pacote não ser indenizado? b) Se o produtor vende 1000 pacotes, qual é o número esperado de pacotes indenizados? c) Quando o pacote é indenizado, o produtor tem um prejuízo de 1,20 u.m. (unidades monetárias) e, se o pacote não for indenizado, ele tem um lucro de 2,50 u.m. Qual o lucro líquido esperado por pacote? d) Calcule a média e a variância da variável "número de sementes que não germinam por pacote".

7) Sabe-se que 20% dos animais submetidos a um certo tratamento não sobrevivem. Se esse tratamento foi aplicado em 20 animais e se X é o número de não sobreviventes: a) qual é o número médio esperado de animais não sobreviventes, VAR(X) e DP(X)? b) Calcular a $P(2 < X \leq 4)$; c) Calcular a $P(X \geq 2)$.

8) Examinaram-se 2.000 ninhadas de 5 porcos cada uma, segundo o número de machos.

Os dados estão apresentados na tabela abaixo.

Número de machos (X)	Número de ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40
Total	2000

a) Calcule a proporção média de machos.
b) Calcule, para X=0, X=1 e X=2, o número de ninhadas que você deve esperar se $X : b(5, \pi)$, onde π é a proporção média de machos calculada em a).
c) Faça um gráfico, onde no eixo do Y vão as probabilidades (probabilidade de encontrar 0 machos por ninhada, 1 macho por ninhada,....,5 machos por ninhada) e no eixo da abcissas vai o número de machos.

9) Uma certa região florestal foi dividida em 109 quadrados para estudar a distribuição de *Primula simenses* selvagem. A priori, supomos que este tipo distribui-se aleatoriamente na região. O quadro abaixo indica o número de quadrados com X *Primula Simenses*; o número médio de plantas por quadrado foi de 2,2 (encontre esse valor).

X plantas por quadrado	Número de quadrados com X plantas
0	26
1	21
2	23
3	14
4	11
5	4
6	5
7	4
8	1
> 8	0
Total	109

a) Se as plantas se distribuem aleatoriamente na região, qual a probabilidade de encontrarmos pelo menos 2 Primulas num quadrante?

b) Dê as freqüências esperadas de quadrados para os valores de X=0, X=1 e X=2.
c) Apenas comparando os resultados de b) com as frequências observadas, podemos concluir que a distribuição da espécie é aleatória?
d) Faça um gráfico, onde no eixo das ordenadas vão as probabilidades (probabilidade de encontrar 0 plantas por quadrado, 1 planta por quadrado,.....,8 plantas por quadrado), e no eixo das abcissas vão o número de plantas/quadrado.

10) Quando contamos eritrócitos (células sanguíneas vermelhas) pode ser utilizado um reticulado, sobre o qual uma gota de sangue é igualmente distribuída. Sob microscópio é observada uma média de 8 eritrócitos por cada quadrado. É razoável que contagens por quadrado, frequentemente, se desviem de 1 ou 2 da média 8, e ocasionalmente de 3 ou mais?

11) Oito ratos experimentais movem-se "aleatoriamente" sobre uma superfície que é subdividida em vinte quadrantes de mesmo tamanho, numerados 1, 2, 3, ...,20. Uma fotografia é tirada. Admitindo-se a distribuição de Poisson,
a) qual é a probabilidade de que exatamente um rato seja encontrado no quadrante $n^{o}1$?
b) quantos quadrantes devem conter 0, 1, 2,...ratos?

12) Uma armadilha para pegar vespa foi testada. Somente 128 das 720 vespas atraídas pela isca puderam ser apanhadas. Portanto, a probabilidade de pegarmos uma vespa é estimada como sendo $\pi = 0,178$. Qual é a probabilidade de que dentre três vespas escolhidas aleatoriamente:
a) nenhuma seja capturada,
b) pelo menos uma seja capturada?

13) Admitindo que cada criança tenha 51% de probabilidade de ser menino:
Determine a probabilidade de uma família de 4 filhos ter:
a) exatamente um menino;
b) ao menos um menino.

14) Avaliaram-se 30 parcelas (área de terra de $20m^2$) de 27 plantas de mandioca cada uma, de acordo com o número de plantas doentes colhidas. Os dados estão apresentados na tabela abaixo:

Número de plantas doentes colhidas (X)	Número de parcelas com X plantas doentes
0	14
1	8
2	4
3	3
4	1
Total	30

a) Calcule a proporção média de plantas doentes.
b) Calcule para cada valor de X, o número de parcelas que você deve esperar se $X : b(27, \pi)$, onde π é a proporção média calculada em a).
c) Existe uma boa aproximação entre as proporções observadas e as estimadas pelo modelo binomial?
d) Faça o gráfico, onde no eixo do Y têm-se as probabilidades (probabilidade de encontrar 0 plantas doentes por parcela, 1 planta doente por parcela,..., 4 plantas doentes por parcela) no eixo do X têm-se o número de plantas doentes colhidas (0,1,2,3,4).

15) Determine o número esperado de meninos em uma família com 8 crianças, supondo ser a distribuição do sexo igualmente provável. Qual é a probabilidade de ocorrer o número esperado de meninos?

16) Suponhamos que o processo de esterelização para um experimento biológico compreenda n estágios diferentes, cada um com probabilidade π de sucesso. Se uma falha em qualquer dos estágios ocasiona contaminação, qual a probabilidade de contaminação se $n = 10$ e $\pi = 0,99$?

17) Suponha que X_t seja o número de partículas emitidas em t horas por uma fonte radioativa, tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro $20t$. Qual será a probabilidade de que exatamente 5 partículas sejam emitidas durante um período de 15 minutos?

18) Supondo-se que durante o abate de suínos, em um determinado frigorífico do Oeste Catarinense, o número de suínos descartados pelo Serviço de Inspeção Federal seja uma variável aleatória com média de 90 animais por mês (30 dias). Pergunta-se, qual a probabilidade de serem descartados:
a) quatro suínos por dia?
b) pelo menos 2 suínos por dia?

19) Numa família de 4 filhos, seja X = número de meninos e Y = número de variações na sequência de sexos. Relacionar o espaço amostral e, então:
a) construir a distribuição conjunta de X e Y;
b) X e Y são independentes?
c) quanto vale a covariância entre X e Y?

20) Segundo a teoria de Mendel, no enxerto de duas espécies de plantas com flores amarelas e brancas, 30% das plantas resultantes têm flor amarela. Em sete pares de plantas enxertadas, qual a probabilidade (a) de não resultar flor amarela, (b) de haver 4 ou mais plantas com flor amarela?

21) Um laboratório é contratado para fornecer, a um distribuidor, lotes de vacinas para gado. Ocasionalmente, algumas vacinas se revelam ineficazes. O distribuidor quer proteger-

se contra o risco de receber um número indesejável de vacinas ineficazes. Como não é possível testar todas as vacinas (já que o teste inutiliza a vacina), o distribuidor adota o seguinte processo de seleção: extrai de cada lote uma amostra aleatória de 10 ampolas, contendo um número X de vacinas estéreis. Se X=0, o lote é aceito. Se $X \geq 1$, o lote é rejeitado. Este processo é designado plano de amostragem simples com amostra de tamanho $n = 10$ e número de aceitação $c = 0$. Admitamos que o tamanho do lote seja suficientemente grande para que a distribuição de X seja (aproximadamente) binomial, com $n = 10$ e π=fração desconhecida de vacinas estéreis em cada lote.

a) Se $\pi = 0,20$, qual a probabilidade de o lote ser aceito?

b) Calcule a probabilidade, P(A), de aceitar um lote, para $\pi = 0,05$, $\pi = 0,10$, $\pi = 0,20$ e $\pi = 0,40$. Grafe $P(A)$ como função de π, unindo os pontos do gráfico por uma curva contínua (esta curva é chamada curva característica de operação (CCO) para o plano de amostragem.

22) Sementes certificadas de feijão são vendidas em um saco de 15 Kg ao preço de 20 u.m. cada. É característica de produção que 20% das sementes apresentem poder germinativo abaixo do especificado. Um comprador fez a seguinte proposta ao produtor de sementes: de cada saco escolhe 25 sementes, ao acaso e paga por saco:

- 25,00 u.m. se todas as sementes germinarem;
- 17,00 u.m. se uma ou duas sementes não germinarem;
- 10,00 u.m. se três ou mais sementes não germinarem.

O que é melhor para o produtor, manter o seu preço de 20,00 u.m. por saco ou aceitar a proposta do comprador?

Sugestão: encontrar o preço médio esperado pelo produtor.

23) O número de mortes por afogamento em fins de semana, numa cidade praiana é de 2 para cada 50.000 habitantes. Qual a probabilidade de que em 200.000 habitantes ocorram 5 afogamentos?

24) Num lote de sementes cujo percentual de germinação é 0,70, foi retirada uma amostra de 10 sementes e colocada num germinador. Se X é o número de sementes germinadas:

a) estruturar a função de probabilidade de X, e fazer o gráfico da distribuição de probabilidade;

b) determinar a probabilidade de germinarem duas ou mais sementes;

c) determinar a média, a variância e o desvio padrão da distribuição de X.

25) Seja X o número de crianças não imunizadas numa campanha de vacinação contra uma determinada doença, onde a probabilidade de não-imunização é $\pi = 10^{-3}$. De

5000 crianças vacinadas, numa determinada localidade, qual a probabilidade de não ficarem imunes:
a) uma criança;
b) uma criança ou mais;
c) estruture a função de probabilidade e faça um gráfico da distribuição de probabilidade.

26) Um grafólogo diz que pode determinar o sexo de uma pessoa com base em sua letra. Para testar tal afirmação, dão-se 15 pares de amostras de caligrafias a esse técnico, cada par sendo por um texto escrito por um homen e por uma mulher. Se esse técnico for, na verdade, incapaz de determinar seus julgamentos com base em palpites, qual é a probabilidade de ele identificar corretamente a caligrafia masculina em 10 ou mais desses 15 pares?

27) Um produtor de sementes afirma que apenas 5% das sementes que vende não germinam. Um comerciante compra regularmente um lote de sementes desse produtor, mas sob a seguinte condição: ele aceita o lote se, em 10 sementes escolhidas ao acaso, no máximo uma não germinar; caso contrário o lote todo é rejeitado.
a) Se o produtor de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?
b) Suponha que o produtor esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de sementes que não germinam é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

28) Verificou-se que o número de quebras cromossômicas em um roedor, em qualquer período de um dia, num local poluído, pode ser considerado como uma variável aleatória que tenha distribuição de Poisson com parâmetro 0,1. (Isto é, em média haverá uma quebra cromossômica a cada 10 dias). Vamos supor que este roedor ficará 20 dias neste local poluído para experiência.
a) Qual a probabilidade de se encontrar menos de três quebras cromossômicas?
b) Qual a probabilidade de se encontrar mais de duas quebras cromossômicas?

29) Em uma determinada região ocorre em média 1 geada a cada 5 anos. Vamos definir X como sendo o número de geadas nos próximos 5 anos.
a) Qual é a probabilidade de ocorrência de no máximo 1 geada nos próximos 5 anos?
b) Qual é a probabilidade de ocorrência de pelo menos duas geadas nos próximos 5 anos?

30) Um agricultor tem duas alternativas para a venda de seu produto que é fornecido em lotes de 500 sacos de sementes certificadas cada.
a) O comprador A, que paga 8,00 u.m. por saco e não exige nenhum teste.
b) O comprador B, que, para cada lote recebido retira 10 sacos ao acaso e os examina: se todos os 10 estão dentro das especificações, quanto ao poder germinativo, paga 5.000,00 u.m. pelo lote; se entre os 10 sacos houver um fora da especificação, paga 4.000,00 u.m. pelo lote;

e se entre os 10 houver dois ou mais sacos fora das especificações paga apenas 2.500,00 u.m. pelo lote. Sabendo o agricultor ser de 10% a porcentagem real de sacos fora da especificação que produz, qual a melhor alternativa para a venda de seu produto?
sugestão: calcule o preço de venda esperado para cada alternativa.

31) Um Engenheiro Agrônomo pode atender, normalmente, 4 estabelecimentos agrícolas por dia. Em média (λ), ele atende 3 estabelecimentos agrícolas por dia. Se o agrônomo tiver que atender mais de 4 estabelecimentos agrícolas em um dia ele deverá fazer horas-extras para atender a essas solicitações. Qual é a probabilidade do agrônomo ter que fazer horas-extras? Sendo $\lambda = 3$.

32) Um produtor de camarões de água-doce tratados com uma alimentação especial, deseja comparar o sabor proporcionado por esta nova alimentação com o sabor produzido pela alimentação tradicional. A cada um de 4 provadores são fornecidos 3 porções exatamente iguais, em ordem aleatória, duas das quais com a alimentação tradicional, e a outra com alimentação especial. Cada um desses provadores é inquirido sobre a porção que prefere. Suponha que essas duas fórmulas sejam igualmente saborosas. Seja Y o número de provadores que preferem camarões tratados com alimentação especial.
a) Qual é a probabilidade de pelo menos 3 dos 4 provadores preferirem a fórmula nova?
b) Calcule o valor esperado de Y.

33) Um casal deseja ter 8 crianças. Chamamos de X a variável número de filhos homens e que a probabilidade de nascer filho do sexo masculino ou feminino é de 50% para cada um, responda:
a) Verifique se esta situação pode ser estudada pela distribuição binomial (atender as quatro suposições do modelo). b) Calcule a $E(X)$ e $DP(X)$.
c) Qual a probabilidade que nasçam no mínimo 4 filhos homens?
d) Faça um gráfico, onde no eixo Y são as probabilidades (probabilidade de zero sucesso, 1 sucesso,..., 8 sucessos), e no eixo das abcissas vai o número de filhos homens.

34) O número de partículas gama, emitidas por segundo, por certa substância radioativa é uma variável aleatória com distribuiçào de Poisson com média $n\pi = 3$. Se um instrumento registrador torna-se inoperante quando há mais de 4 partículas por segundo,
a) Qual a probabilidade de isto acontecer em um dado segundo?
b) Qual é o desvio padrão dessa variável aleatória?

35) Uma fonte radioativa é observada durante 7 intervalos de tempo, cada um de dez segundos de duração. O número de partículas emitidas X durante cada período observado, tem uma distribuição de Poisson com parâmetro 5.
a) Qual é a probabilidade de quem em cada um dos 7 intervalos de tempo, 4 ou mais

partículas sejam emitidas?
b) Qual é a probabilidade de que em cada um dos sete intervalos de tempo, três ou menos partículas sejam emitidas?
c) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos sete intervalos, 4 ou mais partículas sejam emitidas?

36) Suponha que o registro metereológico mostra que em média 5 dos 30 dias do mês de novembro são chuvosos.
a) Supondo a distribuição binomial com cada dia visto como uma prova independente, encontre a probabilidade de que no próximo mês de novembro no máximo 3 dias sejam chuvosos.
b) Dê razões para justificar o uso da distribuição binomial na solução de a).

37) Um certo tratamento é capaz de imunizar 78% dos animais contra uma determinada doença. Uma nova amostra de 50 animais é testada. Seja X o número de animais que se tornarão imunes.
a) Verifique se é um experimento binomial (confronte as hipóteses do modelo com a situação real).
b) Qual é a E(X)?
c) Qual é o DP(X)?
d) qual é a $P(X < 2)$?

38) Numa campanha de vacinação contra a aftosa, um animal de cada 1000 vacinados não fica imune à moléstia. Se forem vacinados 5000 animais, qual a probabilidade de não ficarem imunes:
a) cinco animais;
b) dois animais ou mais.

39) Uma fonte mineral contém um número médio de 4 bactérias por cm^3. Dez tubos de ensaio, de $1cm^3$, são enchidos com este líquido. Supondo que a distribuição de Poisson é aplicável, encontre a probabilidade:
a) de que todos os 10 tubos de ensaio apresentem bactérias, isto é, contenham ao menos uma bactéria cada;
b) que exatamente 8 tubos de ensaio apresentem bactérias.

40) A experiência mostra que somente $\frac{1}{3}$ dos pacientes tendo certa doença recupera-se sob um tratamento padrão. Uma nova droga promissora será administrada a um grupo de 12 pacientes que tem a doença. Se a clínica requer que ao menos 7 dos pacientes se recuperem antes de aceitar a nova droga como o melhor tratamento, qual é a probabilidade de que a droga seja desacreditada, mesmo quando a taxa de recuperação aumenta para $\frac{1}{2}$?

41) Considere uma anomalia metabólica que atinge aproximadamente 1 em cada 100

bebês. Se 4 nascem em um hospital específico, em certo dia, qual é a probabilidade de:
a) nenhum apresentar esse problema?
b) não mais de um apresentar esse problema?
Resolva o exercício pela distribuição binomial e Poisson. Compare os resultados.

5 Modelos de Probabilidades para Medidas

5.1 Introdução

Vamos ver agora como criar um modelo probabilístico, o que é uma função densidade de probabilidade (f.d.p.), e como calcular probabilidades no caso de variáveis aleatórias contínuas.

De um modo geral, podemos dizer que as variáveis aleatórias, cujos os valores resultam de mensurações ou medições (geralmente são valores fracionários), são variáveis aleatórias contínuas. Exemplos: rendimento de milho em Kg/ha, diâmetro de Paepalanthus, diâmetro de Biomphalarias, altura de plantas, etc.

Como foi tratado na subseção 2.1.3.8, para representar a distribuição dos dados de variáveis aleatórias contínuas construímos um histograma. Um exemplo de um histograma para a variável aleatória contínua altura de plantas de eucalipto é dado na figura 5.1(a). A construção de modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas envolve a idéia da generalização do histograma, isto é, fazer o número de classes tender para o infinito. Fazendo-se o número de classes tender para o infinito, implica que os intervalos de classe tornam-se extremamente pequenos, podemos dizer, ínfimos. A forma do histograma sofre uma modificação, passando a apresentar uma curva suave, ou seja, uma linha contínua, como o da figura 5.1(b). Esta curva contínua é a representação gráfica de uma função, representada por $f_X(x)$, chamada de *função densidade de probabilidade* (f.d.p.), equivalente as funções de probabilidades para variáveis aleatórias discretas. Esta $f_X(x)$ é a expressão matemática do modelo probabilístico para a variável aleatória quantitativa contínua X. Na verdade, a variável aleatória X define a curva, ou seja, o modelo.

Na figura 5.1(a), a área de um determinado retângulo, indica a porcentagem de valores dentro daquela classe. Se somarmos as áreas de todos os retângulos chegaremos a 100%. Na figura 5.1(b), a área total sob a curva equivale a 1 ou 100% e, portanto, a área entre dois pontos, digamos x_1 e x_2, e a curva, corresponde a probabilidade de se encontrar um valor entre aqueles pontos ou a proporção de valores dentro daquele intervalo.

Já foram construídos muitos modelos teóricos para variáveis aleatórias contínuas; o que devemos fazer é escolher aquele adequado para a variável aleatória em estudo. A seguir apresentamos alguns exemplos de variáveis aleatórias contínuas com suas respectivas funções.

Exemplo 1: num estudo de radioatividade, as cintilações (que são contagens) seguem

(a) Histograma para a variável aleatória contínua altura de eucalipto

(b) Histograma alisado - curva contínua

Figura 5.1: A variável aleatória contínua altura de plantas de eucalipto varia continuamente

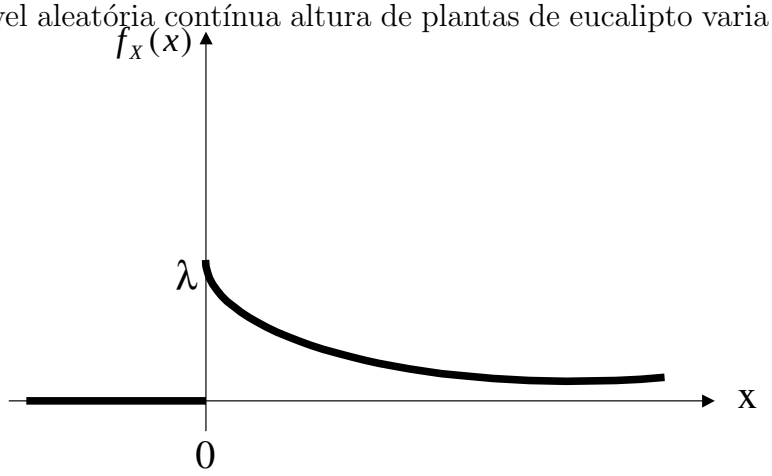


Figura 5.2: Representação gráfica do modelo exponencial

a distribuição de Poisson. Os instantes, quando os núcleos se desintegram, são representados por $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$. Em adição, os intervalos de tempo entre valores de t consecutivos, $\Delta t_1, \Delta t_2, ...$, é uma variável aleatória contínua e segue o modelo exponencial.

Definição: se a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X for definida da seguinte maneira:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ & \lambda > 0 \end{cases}$$

dizemos que X tem distribuição exponencial ou X segue o modelo exponencial com parâmetro λ, o número médio de ocorrências (igual a distribuição de Poisson). A representação gráfica desse modelo é dado na figura 5.2.

Exemplo 2: num estudo de comportamento animal, pássaros são libertados um de cada vez, sob circunstâncias que tornam difícil a orientação. Espera-se que os pássaros escolham

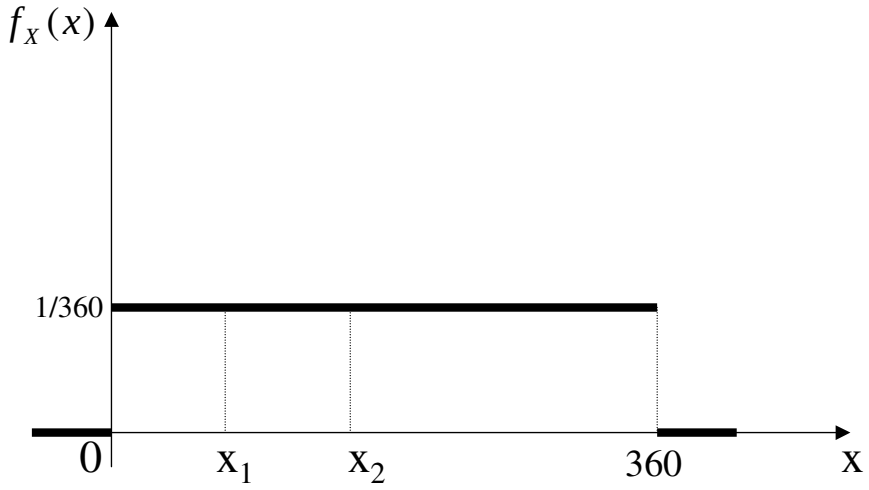


Figura 5.3: Modelo de distribuição da variável ângulo (graus)

direções aleatórias. Está-se medindo o ângulo entre o norte e a direção tomada pelo pássaro, no sentido horário (azimute). A direção é dita aleatória se cada azimute de 0^0 a 360^0 tem a mesma chance de ser escolhido.

Variável em estudo: $X =$ ângulo em graus.

Espaço amostral: $\Omega = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 360\}$.

Portanto, podemos estabelecer o seguinte modelo para a variável ângulo em graus X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{360} & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 360 \\ 0 & \text{para} \quad \text{outros casos.} \end{cases}$$

A representação gráfica desse modelo é dada na figura 5.3.

Definição: se a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para} \quad \text{outros casos.} \end{cases}$$

$$a < b, \text{ambos reais.}$$

dizemos que X tem distribuição uniforme , ou segue o modelo uniforme com parâmetros a e b. A representação gráfica desse modelo é dada na figura 5.4.

Continuando com o exemplo 2, podemos verificar que:

$$\int_a^b f_X(x)dx = 1$$

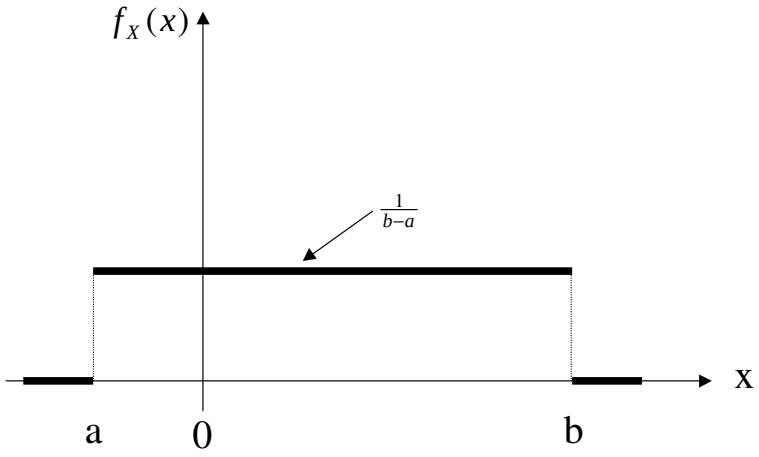


Figura 5.4: Representação gráfica do modelo uniforme

Resolvendo a integral da nossa função,para $a = 0$ e $b = 360$, obtemos:

$$\int_0^{360} \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360} x|_0^{360} = \frac{1}{360}(360 - 0) = \frac{360}{360} = 1.$$

A probabilidade da variável aleatória estar dentro de um intervalo $[x_1; x_2]$, corresponde a área delimitada pelo intervalo e a curva da função. Para sabermos a área usamos o cálculo integral. Por exemplo, a probabilidade do ângulo estar entre 0^0 e 90^0 é dada por:

$$P(0^0 \leq X \leq 90^0) = \int_0^{90} \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360} \int_0^{90} dx = \frac{1}{360} x|_0^{90} = \frac{1}{360}(90 - 0) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}.$$

Observe que a probabilidade de obter exatamente um determinado valor é zero. Por exemplo:

$$P(X = 90^0) = \int_{90}^{90} \frac{1}{360} dx = \frac{1}{360} \int_{90}^{90} dx = \frac{1}{360} x|_{90}^{90} = \frac{1}{360}(90 - 90) = \frac{0}{360} = 0.$$

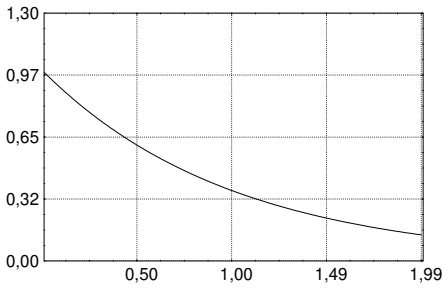
De modo geral, dados dois números x_1 e x_2 quaisquer a $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2 - x_1}{360^0}$.

Exemplo 3: A distribuição de Weibull tem muitas aplicações em teoria da confiabilidade, onde estuda-se sistemas e seus componentes, por exemplo, sistemas biológicos, como o corpo humano.

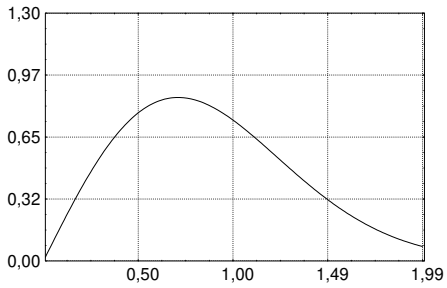
Definição: se a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória for dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta x^{\beta-1} e^{\beta x} & \text{para} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$

onde β é uma constante positiva, dizemos que X tem distribuição de Weibull, ou segue o modelo de Weibull. Os gráficos para $\beta = 1$ e $\beta = 2$ são dados na figura 5.5.



(a) Distribuição de Weibull para $\beta = 1$



(b) Distribuição de Weibull para $\beta = 2$

Figura 5.5: A distribuição de Weibull para $\beta = 1$ e $\beta = 2$

Como vimos, obtemos a *probabilidade* de que a variável aleatória X caia no intervalo $[x_1, x_2]$, calculando a área entre $[x_1, x_2]$ e a curva, e isso é feito através do cálculo da integral da função $f_X(x)$ entre os pontos x_1 e x_2, então:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx.$$

Atualmente temos softwares que calculam estas probabilidades. Tabelas com as probabilidades são dadas nos apêndices deste livro.

Qual a probabilidade de uma medida de α-globulina ser exatamente igual a $0,86666$?

$$P(X = 0,86666) = \int_{0,86666}^{0,86666} f_X(x)dx = 0$$

pois a área sob um ponto do eixo x é zero. Não há contradição nesse resultado, pois é extremamente improvável que X assuma esse valor particular. Além do mais, existem infinitos outros números na vizinhança de 0,86666, de tal forma que a probabilidade é tão pequena que tende a desaparecer. Então, para variáveis aleatórias contínuas, tanto faz escrever:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2).$$

A seguir apresentamos de forma formal (matemática) a definição de variável aleatória contínua.

Definição: diz-se que X é uma variável aleatória contínua, se existir uma função f(.) denominada *função densidade de probabilidade (fdp)* de X que satisfaça as seguintes condições:

a) $f_X(x) \geq 0$ para todo x (não-negativa)

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

c) para quaisquer x_1 e x_2, com $-\infty < x_1 < x_2 <= \infty$, teremos: $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$.

Pode-se construir modelos teóricos probabilísticos para variáveis aleatórias, escolhendo-se adequadamente as funções densidades de probabilidades. Teoricamente, qualquer função $f(.)$, que seja não-negativa e cuja área total sob a curva seja igual à unidade, caracterizará uma variável aleatória contínua.

5.2 A Média de Uma Variável Aleatória Contínua

Podemos estender todas as definições feitas para variável aleatória discreta, de modo equivalente, às variáveis aleatórias contínuas.

Se X é uma variável aleatória contínua, define-se a média de X, como sendo:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx.$$

A média de X também é conhecida como esperança matemática e pode ser entedida como um "centro de distribuição de probabilidade".

A expressão para a *variância* de variáveis aleatórias contínuas é dada por:

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[X - E(X)\right]^2 f_X(x)dx$$

ou,

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

onde:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx.$$

O desvio padrão é dado por:

$$DP(X) = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Exemplo. Determine a esperança e a variância da variável aleatória X, ângulo entre o norte e a direção tomada pelos pássaros (azimute), em graus, cuja f.d.p. é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{360}, & 0 \leq x \leq 360 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{360} x \frac{1}{360} dx.$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{360} \int_0^{360} x dx \\ E(X) &= \frac{1}{360} \frac{x^2}{2} |_0^{360} \\ E(X) &= \frac{1}{360} \frac{(360)^2}{2} \\ E(X) &= \frac{360}{2} \\ E(X) &= 180^0 \end{aligned}$$

Passamos agora para o cálculo da variância.

$$E(X^2) = \int_0^{360} x^2 \frac{1}{360} dx.$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{360} \int_0^{360} x^2 dx \\ E(X^2) &= \frac{1}{360} \frac{x^3}{3} |_0^{360} \\ E(X^2) &= \frac{1}{360} \frac{360^3}{3} \\ E(X^2) &= \frac{360^2}{3} \\ E(X^2) &= 43200^0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Retornando, temos que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= 43200 - 180^2 \\ Var(X) &= 10800. \end{aligned}$$

O desvio padrão vale $103,92^0$.

5.3 A Distribuição Normal

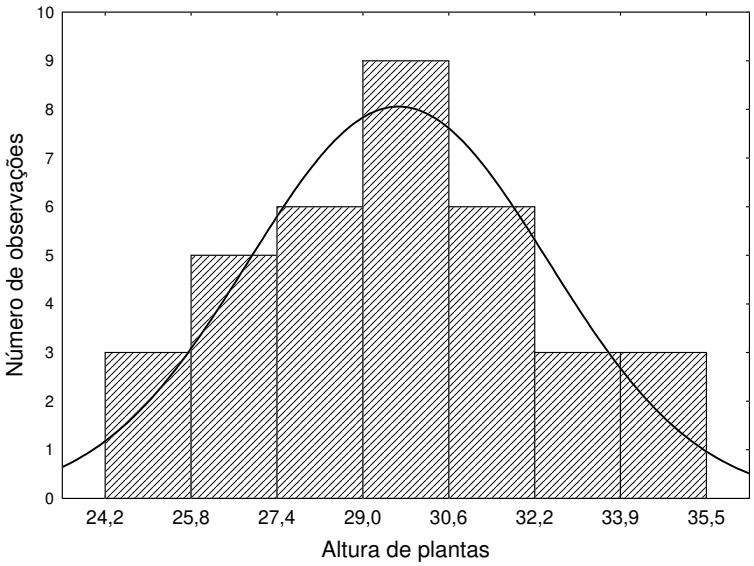


Figura 5.6: Distribuição de freqüência da altura de plantas de *Amaranthus*, em cm

5.3.1 Introdução

O modelo normal ocupa uma posição de grande destaque tanto a nível teórico como prático, isso porque o modelo normal representa com boa aproximação muitos fenômenos da natureza como, por exemplo, a característica altura de plantas de *Amaranthus*, cuja distribuição de freqüência é dada na figura 5.6. Observe que existe uma tendência das observações se concentrarem próximo do valor central, ou seja, da média da distribuição, e esta concentração vai diminuindo a medida que os valores de altura vão aumentando e diminuindo, ou seja, existe baixa concentração de plantas baixas, assim como de plantas altas. A distribuição é aproximadamente simétrica, isto é, tomando a média como ponto central, a lado esquerdo é aproximadamente igual ao lado direito.

Outra razão da importância do modelo normal é que as distribuições amostrais de estatísticas como médias e proporções, podem ser aproximadas pela distribuição normal, isto é muito importante para o estudo de *inferência estatística*. Esses resultados serão vistos com mais detalhes no estudo de distribuições amostrais, no próximo capítulo.

O cálculo de probabilidades das distribuições binomial e Poisson, pode ser feito com boa aproximação, através da distribuição normal. A aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal será vista na seção 5.3.4.

A distribuição normal surgiu a aproximadamente duas centenas de anos passados, e de que forma? Cientistas coletando um grande número de observações de uma variável

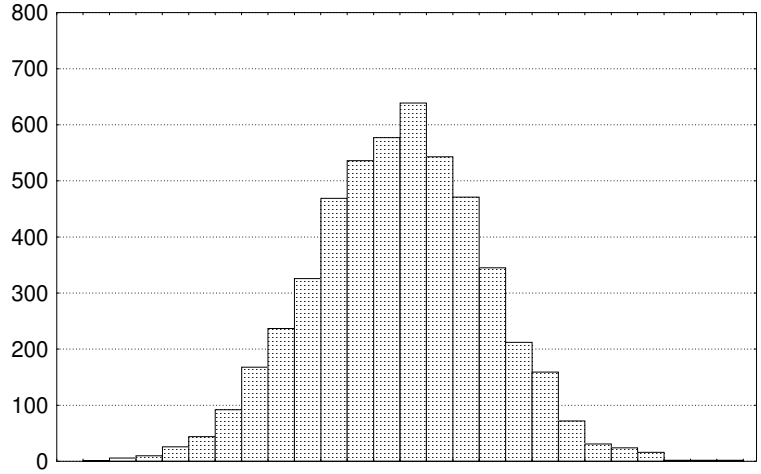


Figura 5.7: Distribuição de freqüência em forma de sino

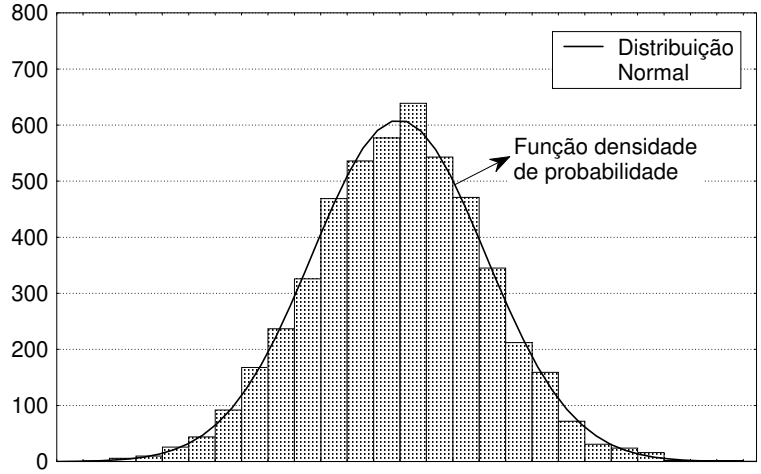


Figura 5.8: Uma curva contínua que aproxima a distribuição de freqüências observadas

e construindo sua distribuição de freqüência, verificaram que repetidamente o histograma apresentava a forma da figura 5.7. A distribuição de freqüências da figura 5.7 é conhecida como distribuição em forma de sino.

Mais tarde, esse fato foi transformado em termos matemáticos, isto é, numa expressão matemática que representasse aqueles fenômenos de forma bem aproximada. Esse modelo matemático pode ser visto na figura 5.8. Observa-se na figura 5.8 uma curva contínua, simétrica em torno do seu ponto central, isto é, da sua média. Costuma-se designar essa distribuição por distribuição Gaussiana devido ao seu criador, Karl F. Gauss (1777-1855).

Em termos formais, matemáticos, temos a seguinte definição para variável aleatória contínua com distribuição normal.

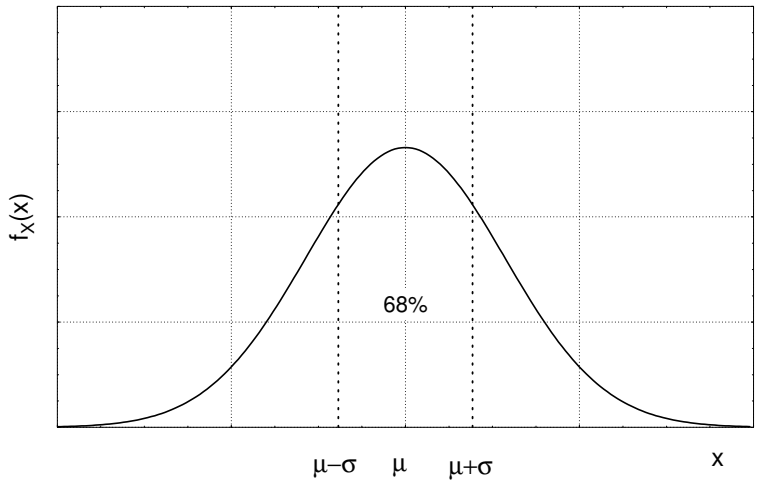


Figura 5.9: A distribuição normal com média μ e pontos de inflexão $\mu \pm \sigma$

Definição: dizemos que uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal, com parâmetros μ e σ^2, onde $-\infty < \mu < +\infty$ e $0 < \sigma^2 < +\infty$, representam a média e a variância da população X, respectivamente, se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

onde e representa a base dos logaritmos naturais e vale aproximadamente 2,7182, $\pi = 3,1416$ e σ é o desvio padrão. Veja a $f_X(x)$ na figura 5.8. Costuma-se representar essa variável aleatória por X $N(\mu, \sigma^2)$.

Pode-se demonstrar que:

i) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu.$

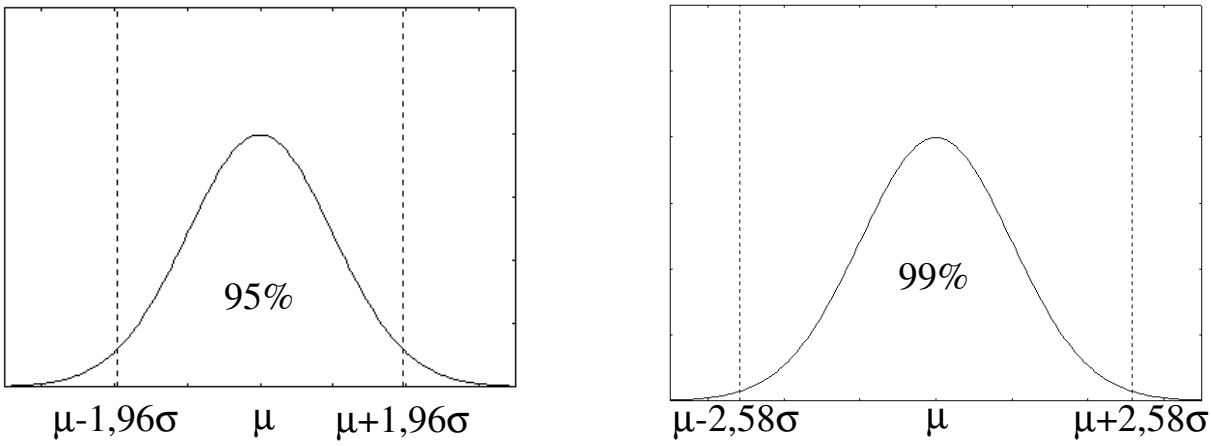
ii) $Var(X) = E[X - E(X)]^2 = \sigma^2.$

iii) $f_X(x)$ é simetrica ao redor de $x = \mu$, isto é, $f(\mu + x) = f(\mu - x)$ para todo x.

Assim, observamos que os dois parâmetros μ e σ^2, que caracterizam a distribuição normal, são a média e a variância de X. O desvio padrão é calculado a partir da variância de X e vale:

$$DP(X) = \sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

A distribuição normal fica completamente definida por dois parâmetros: *média* (μ) *e desvio padrão* (σ), então, é fácil perceber que para cada combinação de uma média e um



(a) Área de 95% na distribuição normal

(b) Área de 99% na distribuição normal

Figura 5.10: Áreas na distribuição normal

desvio padrão existe uma distribuição normal. Exemplos de possíveis variáveis com distribuição normal podem ser: pesos de bovinos, pesos de frangos, quantidades de chuva (mm), quantidades de α-globulina no plasma sanguíneo de pessoas, comprimentos do antebraço de morcêgos, etc. Portanto, na prática, temos um número ilimitado de distribuições normais.

O importante é que sob qualquer curva normal a área total é igual a 1 ou 100%. Uma propriedade importante da distribuição normal é que a porcentagem de observações posicionados entre $\mu - 1\sigma$, $\mu + 1\sigma$ e a curva é igual a 68%, ou seja, a área é igual a 68%, independentemente dos valores de μ e σ. A figura 5.9 ilustra a situação. Também, a porcentagem de observações, ou a área entre os pontos $\mu - 1,96\sigma$, $\mu + 1,96\sigma$ e a curva é igual a 95%. Também, a porcentagem de observações ou a área entre os pontos $\mu - 2,58\sigma$, $\mu + 2,58\sigma$ e a curva é igual a 99%. Estas áreas ou porcentagens independem dos valaores de μ e σ. A ilustração é dada na figura 5.10. Por exemplo, suponha que a espécie *Harengula clupeola*, conhecida como sardinha cascuda, distribuída na Lagoa da Conceição, Florianópolis, SC, apresente crescimento médio igual a 75 mm com desvio padrão igual a 5 mm. Assumindo que a variável em estudo apresente distribuição normal, podemos esperar que aproximadamente 95% dos valores, ou das espécimes, encontram-se no intervalo [65,2;84]. Como a curva normal é simétrica em relação a média, temos que a probabilidade de obtermos um valor acima da média é 50%, da mesma forma, a probabilidade de obter um valor abaixo da média é 50%.

A probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal tomar um valor entre

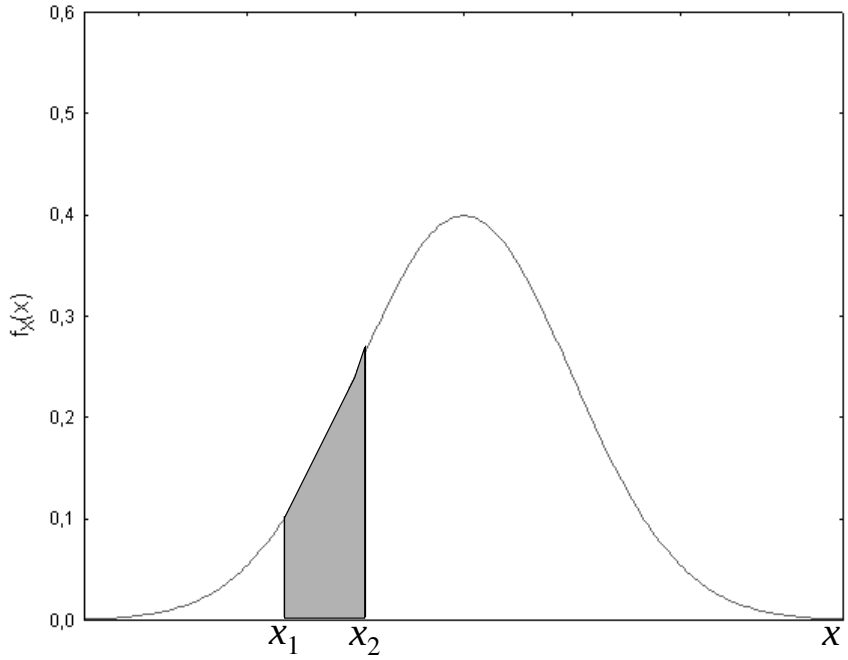


Figura 5.11: A probabilidade de x estar entre os pontos x_1 e x_2 e a curva corresponde a área achurada da figura.

dois pontos quaisquer, por exemplo, entre os pontos x_1 e x_2, é igual à área sob a curva normal compreendida entre aqueles dois pontos. Veja a figura 5.11. Suponha, então, que X $N(\mu, \sigma^2)$ e queiramos determinar a probabilidade de X estar entre x_1 e x_2, portanto, como estamos interessados em obter uma área, devemos realizar o seguinte cálculo:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Acontece que essa integral não pode ser calculada exatamente, conseqüentemente, a probabilidade só pode ser obtida aproximadamente, e por métodos numéricos. Podemos obter estas probabilidades com o uso de programas computacionais estatísticos, entre os quais podemos citar o Statistica, Minitab e o Statgraphics.

Para padronizar todas as distribuições normais numa única distribuição e apresentar as probabilidades numa única tabela, foi realizado uma transformação na variável aleatória X, originando uma nova variável aleatória, denominada de variável aleatória normal padronizada e representada pela letra Z, cuja distribuição denomina-se de *distribuição normal padrão*, a qual passaremos a estudar.

5.3.2 A Distribuição Normal Padrão

A transformação realizada para padronizar as distribuições normais é feita tendo a média como origem, referência do novo sistema, e o desvio padrão como medida de afastamento a contar da média, ou seja, a nova unidade de medida será o desvio padrão, isto é, o quanto em desvios padrões o valor de X se afasta da média μ. Esta nova escala é chamada de escala Z e é definida como sendo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

onde:

$$\begin{aligned} Z &= \text{número de desvios padrões a contar da média;} \\ X &= \text{é a variável na unidade original;} \\ \mu &= \text{é a média da população;} \\ \sigma &= \text{é o desvio padrão da população.} \end{aligned}$$

Exemplo: consideremos uma distribuição normal com média $\mu = 100$ e desvio padrão $\sigma = 10$. Para $x = 100$, temos:

$$z = \frac{100 - 100}{10} = 0.$$

Para $x = 120$, temos:

$$z = \frac{120 - 100}{10} = 2,$$

e assim por diante. A figura 5.12 apresenta a distribuição de X e de Z.

Definição: se $X : N(\mu, \sigma^2)$, então a variável aleatória Z definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tem uma distribuição $N(0, 1)$, isto é, tem distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty \leq z \leq +\infty.$$

A seguir fazemos a demonstração do valor média e da variância na distribuição normal padrão.

Média e Variância da Variável Aleatória Z

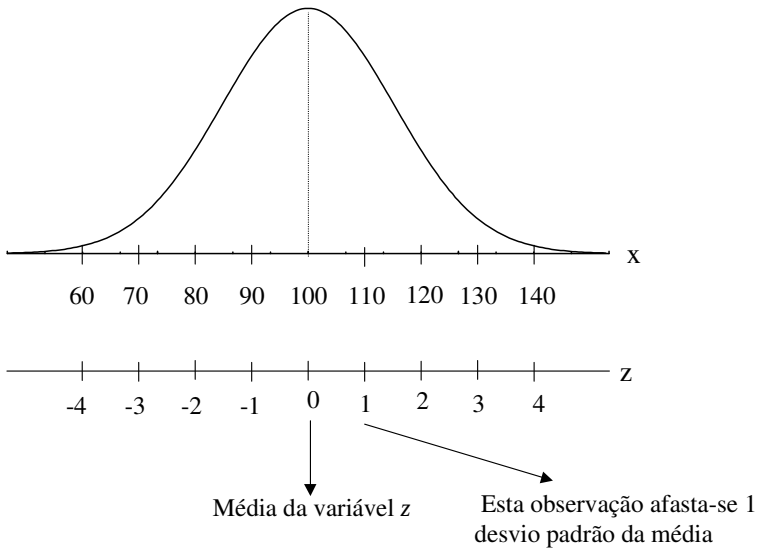


Figura 5.12: Distribuição das variáveis X e Z

Demonstração:

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X)-E(\mu)] = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0. \\
V(Z) &= E(Z^2) - [E(Z)]^2 \\
&= E(Z^2) \\
&= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}E(X-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}E(X^2-2\mu X+\mu^2) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-\mu^2] = \frac{1}{\sigma^2}[E(X^2)-[E(X)]^2] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1.
\end{aligned}$$

5.3.3 O Uso da Tabela da Distribuição Normal Padrão

No apêndice 3, temos a tabela da distribuição normal padrão. Esta tabela dá a área entre a média (zero), o valor de z e a curva, isto é, a tabela dá a probabilidade de um valor cair no intervalo [0 a z]. Veja a figura 5.13, na qual a área achurada corresponde a probabilidade.

A distribuição normal padrão ou reduzida, é absolutamente simétrica em relação a média (origem), em função disso, a tabela só é dada para valores positivos de z. Se o valor calculado de z for negativo, basta considerá-lo como positivo e entrar diretamente na tabela. A áera

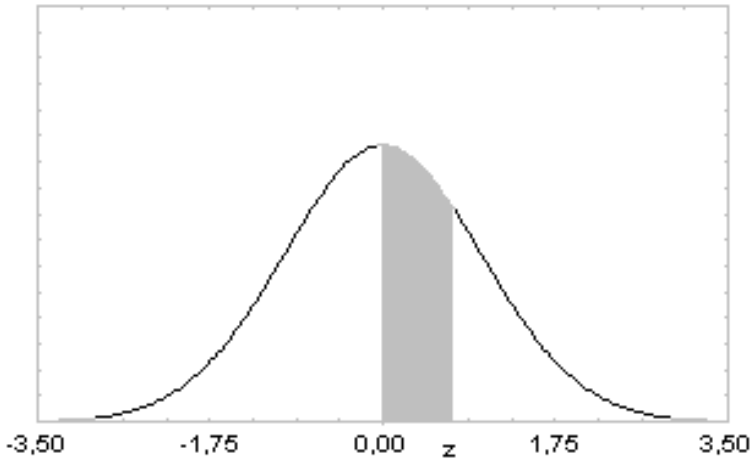


Figura 5.13: Distribuição normal padrão. A área achurada corresponde a probabilidade de uma observação estar no intervalo [0;z]

total vale 100% ou 1, assim, acima de μ temos 50% da área e abaixo de μ temos os outros 50%. A seguir vamos calcular probabilidades usando a tabela da distribuição normal padrão.

Exemplo 1. Vamos determinar a área entre 0(média) e z=1,25, isto é, $P(0 \leq z \leq 1,25)$. O que desejamos saber é a área achurada da figura 5.14. Essa área corresponde a probabilidade $P(0 \leq z \leq 1,25)$. Na tabela, encontramos para $z = 1,25$, $P(0 \leq z \leq 1,25) = 0,3944$.

Exemplo 2. Qual a área entre 0 (média) e $z = 1,73$, isto é, a $P(0 \leq z \leq 1,73)$. O que desejamos é a área entre 0 e 1,73 e a curva da figura 5.15. Com o auxílio da tabela para $z = 1,73$ temos $P(0 \leq z \leq 1,73) = 0,4582$.

Exemplo 3. Qual é a probabilidade de z estar entre -1,73 e 0 ($P(-1,73 \leq z \leq 0)$)? Como a curva da distribuição normal padrão é absolutamente simétrica, essa probabilidade pode ser obtida calculando-se a $P(0 \leq z \leq 1,73)$. Como vimos no exemplo 2 essa probabilidade vale 0,4582.

Exemplo 4. Qual é o valor de $P(z \geq 1,73)$? Essa probabilidade corresponde a área achurada da figura 5.16. A área da metade da curva normal vale exatamente 50%, logo a área além de z é 50% menos o valor tabelado de z=1,73, então:

$$P(z \geq 1,73) = 0,50 - P(0 \leq z \leq 1,73) = 0,50 - 0,4582 = 0,0418.$$

Exemplo 5. Qual é a probabilidade de z estar entre -1 e 1 ($P(-1 \leq z \leq 1)$)? A área achurada da figura 5.17 indica essa probabilidade.

$$P(-1 \leq z \leq 1) \quad = \quad P(0 \leq z \leq 1) + P(0 \leq z \leq 1)$$

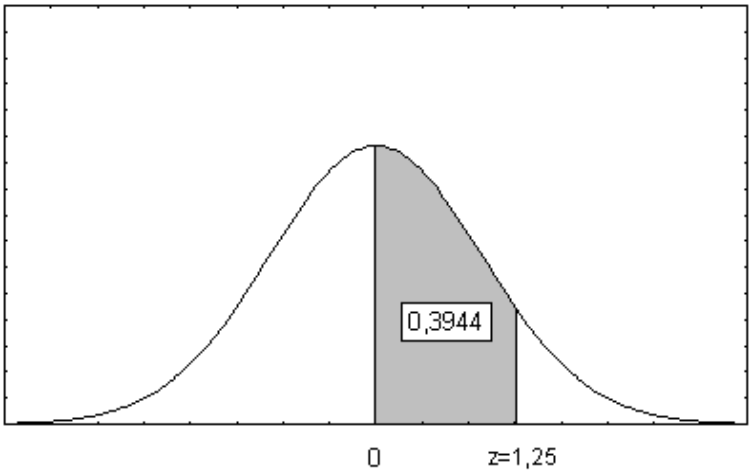


Figura 5.14: $P(0 \leq z \leq 1,25) = 0,3944$

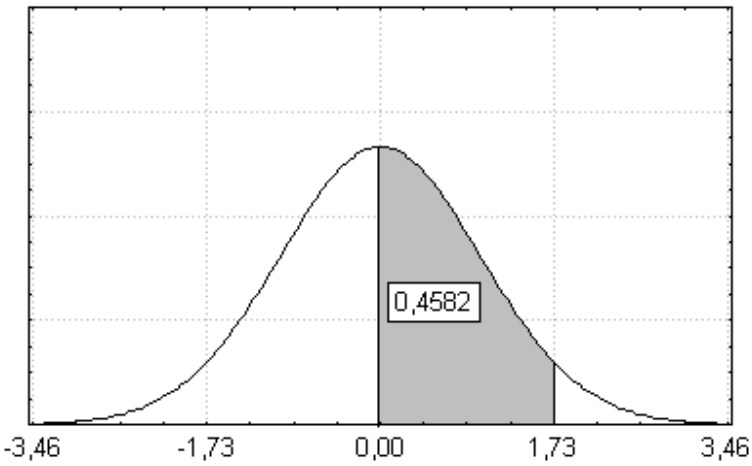


Figura 5.15: $P(0 \leq z \leq 1,73) = 0,4582$

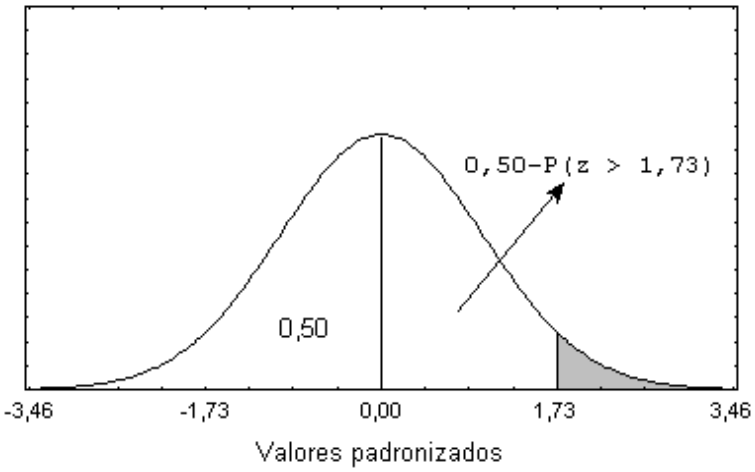


Figura 5.16: $P(z \geq 1,73)$

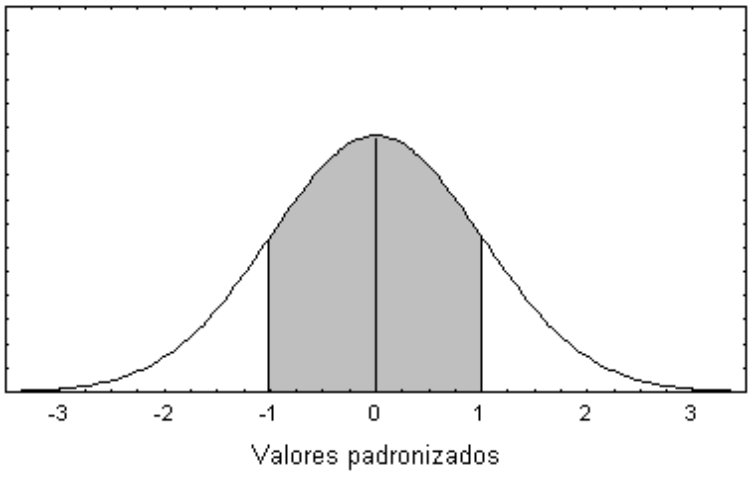


Figura 5.17: $P(-1 \leq z \leq 1)$

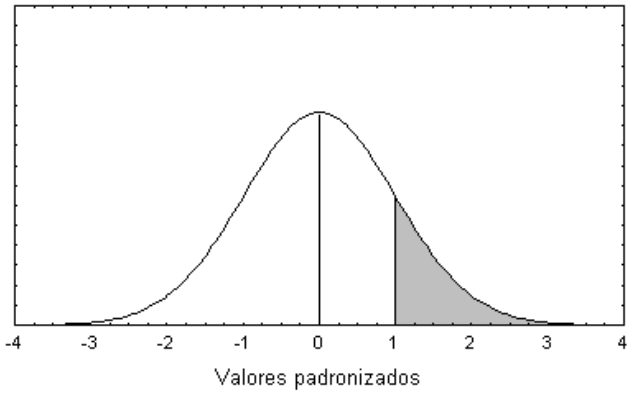


Figura 5.18: $P(1 \leq z \leq 3)$

$$\begin{aligned} &= 2P(0 \leq z \leq 1) \\ &= 2(0,3413) \\ &= 0,6826. \end{aligned}$$

Exemplo 6. Qual é a probabilidade de z estar entre 1 e 3 ($P(1 \leq z \leq 3)$)?. Essa probabilidade corresponde a área achurada da figura 5.18.

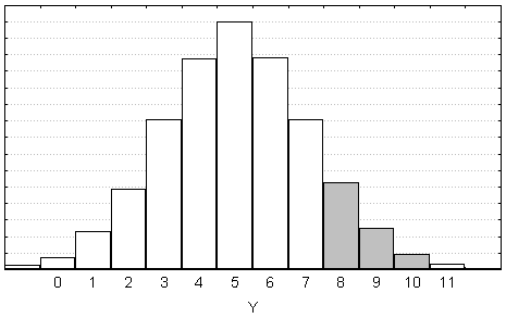
$$\begin{aligned} P(1 \leq z \leq 3) &= P(0 \leq z \leq 3) - P(0 \leq z \leq 1) \\ &= 0,4986 - 0,3413 \\ &= 0,1573. \end{aligned}$$

Exemplo 7. Suponha que X seja uma variável aleatória com distribuição normal de média $\mu = 3$ e variância $\sigma^2 = 16$, e desejamos calcular a $P(2 \leq X \leq 5)$. O primeiro passo é calcularmos a variável z.

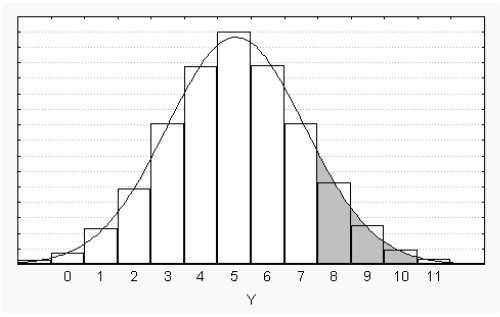
$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P\left(\frac{2-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{2-3}{4} \leq z \leq \frac{5-3}{4}\right) \\ &= P\left(\frac{-1}{4} \leq z \leq \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P(-0,25 \leq z \leq 0,5) &= P(0 \leq z \leq 0,25) + P(0 \leq z \leq 0,50) \\ &= 0,0987 + 0,1915 \\ &= 0,2902. \end{aligned}$$



(a) Distribuição de uma variável binomial, de média 5



(b) Distribuição normal como aproximação da binomial

Figura 5.19: Aproximação normal à distribuição binomial

5.3.4 A Distribuição Normal como Aproximação da Distribuição Binomial

Muitas situações reais podem ser convenientemente descritas pelo modelo binomial. Acontece que quando o número de repetições do experimento (n) for muito grande, para se calcular as probabilidades binomiais, são necessários cálculos extensos e, as vezes, somente é possível a resolução com o uso de computadores. Para n suficientemente grande e π não próximo de 0 (zero) e de 1 (um), obtém-se boas aproximações da normal à binomial. Para saber se a aproximação é boa, uma sugestão é verificar se $n\pi \geq 5$ e $n(1-\pi) \geq 5$.

Como o modelo normal é para variável aleatória contínua (pensar em intervalo), enquanto o modelo binomial é para variável aleatória discreta, pode-se melhorar a aproximação fazendo-se um pequeno ajuste, chamado de correção de continuidade, que consiste em subtrair e/ou somar 1/2 aos valores da variável aleatória discreta. Mostraremos o procedimento através de um exemplo.

Exemplo. Consideremos a variável aleatória $Y : b(10; 1/2)$, isto é, temos uma variável aleatória binomial com parâmetros $n = 10$ e $\pi = 1/2$, e desejamos calcular $P(8 \leq Y \leq 10)$, a figura 5.19 mostra a distribuição de Y e a curva normal, respectivamente. Observe na figura 5.19(b) a compensação de pequenas áreas que ocorre fazendo-se a correção de continuidade, ou seja, os retângulos possuem base unitária (um) com ponto médio, por exemplo, igual a 8, assim a base do retângulo vai de 7,5 a 8,5. Chamando X a variável com distribuição normal, temos:

$$P(8 \leq Y \leq 10) = P(7,5 \leq X \leq 10,5) = P\left(\frac{7,5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} \leq z \leq \frac{10,5 - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}\right)$$

onde, $n\pi$ e $\sqrt{n\pi(1-\pi)}$ são a média e o desvio padrão da distribuição binomial e valem $n\pi = 10(0,50) = 5,0$ e $\sqrt{10(0,50)(0,50)} = 1,58113$, respectivamente. Logo,

$$P\left(\frac{7,5-5,0}{1,58113} \leq z \leq \frac{10,5-5,0}{1,58113}\right) = P(1,5811 \leq z \leq 3,4785) = 0,49975 - 0,44295 = 0,057.$$

Resolvendo o problema pela distribuição binomial, obtemos:

$$P(8 \leq Y \leq 10) = 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,055.$$

Observamos que os dois resultados são bem próximos, mesmo com n pequeno, porém, $\pi = 0,50$.

Para verificarmos em que condições a aproximação da binomial pela normal é bastante satisfatória, foram calculadas as probabilidades pelos dois modelos, combinando-se diversos valores de n e de π. Os resultados são mostrados na tabela 5.1.

Exercícios resolvidos

1) O comprimento, em cm, de *Pnnaeus schmitti* (camarão marinho), em condições normais no estuário (Lagoa do Ibiraquera), tem distribuição aproximadamente normal, com média de 6,0 cm e variância de $0,2\ cm^2$.

a) Qual o intervalo simétrico em torno da média, que conterá 75% dos comprimentos dos camarões?

b) Qual o valor de comprimento, c, que é superado por 7% dos valores?

Do problema temos que:

$$\mu = 6,0 \quad \sigma^2 = 0,2 \quad \sigma = 0,4472.$$

Com o auxílio de um programa estatístico, ou com a tabela da distribuição normal padrão, para $P(Z_1 < Z < Z_2) = 75\%$, simétrico em torno de Z, obtemos $Z_1 = -1,150349$ e $Z_2 = 1,150349$. Portanto,

$$-1,150349 = \frac{X_1 - 6}{0,4472} \implies X_1 = 5,4856.$$
$$1,150349 = \frac{X_2 - 6}{0,4472} \implies X_2 = 6,5144.$$

b) Para uma probabilidade de 43% (50%-7%), obtemos na tabela da distribuição normal padrão aproximadamente $z = +1,48$. Portanto,

$$1,48 = \frac{c-6}{\sqrt{0,2}} \Rightarrow c = 6,66.$$

Assim, 7% dos camarões maiores tem comprimento igual ou superior a 6,66 cm.

Tabela 5.1: Aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal, variando o tamanho da amostra n e as probabilidades π

n	π	$n\pi$	$\sqrt{n\pi(1-\pi)}$	$P[0;3]$		$P[(1/5)n-2;(1/5)n+2]$		$P[(1/2)n-2;(1/2)n+2]$		$P[(4/5)n-2;(4/5)n+2]$		$P[$
				Bin	Nor	Bin	Nor	Bin	Nor	Bin	Nor	Bin
50	0.01	0.50	0.70	0.9984	0.9224	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.05	2.50	1.54	0.7604	0.7160	0.0032	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.10	5.00	2.12	0.2503	0.2350	0.1211	0.1191	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.30	15.00	3.24	0.0000	0.0002	0.2156	0.2099	0.0122	0.0103	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.50	25.00	3.54	0.0000	0.0000	0.0002	0.0002	0.5201	0.5205	0.0002	0.0002	0.0000
50	0.60	30.00	3.46	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2179	0.2201	0.0132	0.0150	0.0000
50	0.75	37.50	3.06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0005	0.4657	0.4488	0.0005
50	0.93	46.50	1.80	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0220	0.0133	0.5327
50	0.97	48.50	1.21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.9372
100	0.01	1.00	0.99	0.9816	0.9282	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
100	0.05	5.00	2.18	0.2578	0.2398	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
100	0.10	10.00	3.00	0.0078	0.0149	0.0099	0.0062	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
100	0.30	30.00	4.58	0.0000	0.0000	0.0457	0.0477	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
100	0.50	50.00	5.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3827	0.3829	0.0000	0.0000	0.0000
100	0.60	60.00	4.90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0580	0.0575	0.0001	0.0002	0.0000
100	0.75	75.00	4.33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2487	0.2402	0.0000
100	0.93	93.00	2.55	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	0.0744
100	0.97	97.00	1.71	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6472
200	0.01	2.00	1.41	0.8580	0.8190	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.05	10.00	3.08	0.0090	0.0171	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.10	20.00	4.24	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.30	60.00	6.48	0.0000	0.0000	0.0026	0.0032	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.50	100.00	7.07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2762	0.2763	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.60	120.00	6.93	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0055	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000
200	0.75	150.00	6.12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0906	0.0897	0.0000
200	0.93	186.00	3.61	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003
200	0.97	194.00	2.41	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1472
500	0.01	5.00	2.22	0.2636	0.2434	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.05	25.00	4.87	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.10	50.00	6.71	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.30	150.00	10.25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.50	250.00	11.18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1769	0.1769	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.60	300.00	10.95	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.75	375.00	9.68	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0072	0.0078	0.0000
500	0.93	465.00	5.71	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
500	0.97	485.00	3.81	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
1000	0.01	10.00	3.15	0.0101	0.0190	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.05	50.00	6.89	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.10	100.00	9.49	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.30	300.00	14.49	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.50	500.00	15.81	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1256	0.1256	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.60	600.00	15.49	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.75	750.00	13.69	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0002	0.0000
1000	0.93	930.00	8.07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1000	0.97	970.00	5.39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

2) O diâmetro de certa espécie de árvore é uma variável aleatória com distribuição normal de média 50 cm e desvio padrão de 6 cm. Se o diâmetro de uma árvore diferir da média de mais de 10 cm, esta árvore é vendida por 10 u.m; caso contrário, é vendida por 20 u.m. Qual o preço médio de venda de cada árvore?
Do problema temos que:

$$\mu = 50\ cm \quad \sigma = 6\ cm.$$

A probabilidade de uma árvore diferir mais do que 10 cm da média populacional é:

$$\begin{aligned} P(X > 60\ cm) + P(X < 40\ cm) &= P(Z > \frac{60-50}{6}) + P(Z < \frac{40-50}{6}) \\ P(Z > 1,67) + P(Z < -1,67) &= 2P(Z > 1,67) \\ &= 2[0,5 - P(0 < Z < 1,67)] \\ &= 2[0,5 - 0,45254] \\ &= 0,09492. \end{aligned}$$

A probabilidade de uma árvore apresentar diâmetro entre 40 e 60 cm é 1-0,09492=0,90508. Portanto, o preço médio de venda de cada árvore é:

$$E(X) = (10 \times 0,09492) + (20 \times 0,90508) = 0,9492 + 18,11 = 19,05.$$

3) Os ovos da produção de uma granja são classificados em grande ou pequenos, conforme seu diâmetro. Verificou-se que 45% dos ovos são considerados grandes. Supondo que os ovos são colocados em caixas de 60, aleatoriamente, pergunta-se:
a) Em que porcentagem de caixas teremos pelo menos 50% de ovos grandes? (50% é igual a 30 ovos).
b) Em que porcentagem de caixas teremos exatamente 50% de ovos grandes?
Sendo:

$$\pi = 0,45 \quad n = 60 \quad n\pi = 0,45 \times 60 = 27.$$

O desvio padrão do número de ovos por caixa, é dado por:

$$\sqrt{n\pi(1-\pi)} = \sqrt{60 \times 0,45 \times 0,55} = 3,85356 \text{ ovos.}$$

a) Usando aproximação normal à binomial, a probabilidade de uma caixa conter 30 ou mais ovos, vale:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 30) = P(X \geq 29,5) &= P(Z \geq \frac{29,5-27}{3,85356}) \\ P(Z \geq 0,65) &= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 0,65) \\ &= 0,5 - 0,24215 \\ &= 0,25785. \end{aligned}$$

b) A probabilidade de encontrarmos exatamente 30 ovos, é:

$$\begin{aligned} P(Y=30) = P(29,5 \leq X \leq 30,5) &= P(\frac{29,5-27}{3,85356} \leq Z \leq \frac{30,5-27}{3,85356}) \\ P(0,65 \leq Z \leq 0,91) &= 0,31859 - 0,24215 \\ &= 0,0764. \end{aligned}$$

4) Sabe-se que a probabilidade de um indivíduo inoculado contra um surto de gripe vir a ter uma reação séria idesejável é de 0,05. Usando a aproximção normal à distribuição binomial, calcule a probabilidade de que mais de 16 indivíduos dentre 200 indivíduos inoculados tenham tais reações.
Com as informações do problema temos que:

$$\begin{array}{lll} \pi = 0,05 & n = 200 & n\pi = 200 \times 0,05 = 10 \\ & n(1-\pi) = 200 \times 0,95 = 190 & \sqrt{n\pi(1-\pi)} = 3,0822. \end{array}$$

A probabilidade de que mais de 16 indivíduos tenham reações, é:

$$\begin{aligned} P(Y > 16) = P(Y \geq 17) \simeq P(X \geq 16,5) &= P(Z \geq \frac{16,5-10}{3,0822}) \\ &= P(Z \geq 2,1089) \\ &= 0,5 - 0,48257 \\ &= 0,0174 \\ &= 1,74\%. \end{aligned}$$

5.3.5 Exercícios propostos

1) Determinar a área limitada pela curva normal em cada um dos casos abaixo:
a) entre z=0 e z=1,2;
b) entre z=-0,68 e z=0;
c) entre z=0,46 e z=2,21;
d) entre z=-0,81 e z=1,94;
e) à esquerda de z=-0,6;
f) à direita de z=-1,23
g) à direita de z=2,05 e à esquerda de z=1,44.
h) entre z=-1 e z=+1
i) entre z=-1,96 e z=+1,96
j) entre z=-2,56 e z=+2,56

2) A altura dos indivíduos de uma população distribui-se normalmente com média de 1,56 m e desvio padrão de 0,09 m. Qual a percentagem nesta população de indivíduos com altura de 1,80 m ou mais?

3) O peso médio das reses, que se encontram num curral de uma determinada fazenda, é de 200 kg, e o desvio padrão é de 10kg. Em 120 animais retirados ao acaso do curral, quantos pesarão mais de 185 kg? Vamos considerar que o peso das reses tenha distribução normal.

4) Foi feito um estudo sobre a altura de plantas de milho de certo híbrido, observando-se que ela se distribui normalmente com média 2,20 m e desvio padrão de 0,20 m. Qual a porcentagem de plantas com altura: a)entre 2,15m e 2,25m; b)entre 2,00m e 2,40m; c)acima de 2,30m.

5) Em indivíduos sadios, o consumo renal de oxigênio tem distribuição normal de média 12 cm^3/min e desvio padrão 1,5 cm^3/min.

a) Determinar a proporção de indivíduos sadios com consumo: inferior a 10 cm^3/min; superior a 8 cm^3/min; entre 9,4 e 13,2 cm^3/min; igual a 11,6 cm^3/min.

b) Determinar o valor do consumo renal que é superado por 98,5% dos indivíduos sadios.

c) Determinar uma faixa simétrica em torno do valor médio que contenha 90% dos valores do consumo renal.

6) A observação dos pesos, X, de um grande número de espigas de milho mostrou que essa variável é normalmente distribuída com média $\mu = 90g$ e desvio padrão $\sigma = 7g$. Num programa de melhoramento, entre outras características, uma cultivar deve satisfazer a condição $78 < X < 104g$, onde X é a variável aleatória peso da espiga. Nessas condições, tendo -se 100 linhagens, pergunta-se:

a) Qual a proporção de linhagens que deverá ser aceita?

b) Qual o número de linhagens que continuará participando do programa de melhoramento?

7) Suponha que o conteúdo de bactérias de um tipo particular, presentes em um recipiente de água de 1 mililitro, tenha distribuição aproximadamente normal, com média de 85 bactérias e desvio padrão de 9 bactérias. Qual a probabilidade de uma dada amostra de 1ml conter mais de 100 bactérias?

8) A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representado por uma distribuição normal, com média de 5 kg e desvio padrão de 0,8 kg. Um abatedouro comprará 5.000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso, do seguinte modo: 20% dos leves como pequenos, os 55% seguintes como médios, os 15% seguintes como grandes e os 10% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

9) Num povoamento florestal de distribuição aproximadamente normal dos diâmetros à

altura do peito (D.A.P.), a média é de 16,2 cm, e o desvio padrão é de 3,4 cm. Determinar o valor D tal que tenhamos $P(D.A.P. > D) = 5\%$

10) Suponha que a variável diâmetro de *Paepalanthus* tenha distribuição normal com média $10mm$ e variância $4mm^2$.

a) Qual é a probabilidade de um *Paepalanthus* aleatoriamente retirado dessa população ter diâmetro maior que 14?

b) Se dois *Paepalanthus* forem selecionados aleatoriamente dessa população, qual é a probabilidade de ambos serem maiores que 14?

11) Num povoamento florestal temos uma distribuição aproximadamente normal dos diâmetros à altura do peito (D.A.P.) das árvores, com média de 12,6 cm e desvio padrão de 3,1 cm. Se cortarmos todas as árvores de menos de 15 cm de diâmetro, qual a porcentagem de árvores que restarão de pé?

12) Uma máquina de empacotar determinado produto apresenta variações de peso com desvio padrão de 20 g. Em quanto deve ser regulado o peso médio do pacote, para que apenas 10% tenham menos de 400 g?

13) O peso bruto de latas de conserva é uma variável aleatória, com média 1000 gramas e desvio padrão 20 gramas. As latas tem peso médio de 100 gramas e desvio padrão de 10 gramas, também com distribuição normal.

a) Qual a probablidade de uma lata conter menos de 850 gramas de peso líquido?

b) Qual a probabilidade de uma lata conter mais de 920 gramas de peso líquido? OBS. Considere X como sendo o peso bruto e Y como sendo o peso da lata. Como X e Y são independentes, a $VAR(X-Y) = VAR(X)+VAR(Y)$ e o $D.P.(X-Y) = \sqrt{VAR(X-Y)}$, assim $D.P.(X-Y) = 22,3606$.

14) As vendas de sementes de milho tem distribuição aproximadamente normal com média 500 sacos e desvio padrão 50 sacos. Se a empresa decide produzir 600 sacos no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos do mês, por estar com a produção esgotada?

15) Se X é uma variável aleatória $N(95; 56, 25)$, determinar b tal que

a) $P(X > b) = 0,975$ e

b) $P(X < b) = 0,3708$.

16) Sabe-se que o comprimento de pétalas de uma população de plantas da espécie X é normalmente distribuída com média $\mu = 3,2cm$ e $\sigma = 1,8cm$. Qual a proporção na população é esperada ter um comprimento de pétalas.

a) maior do que $4,5cm$?

b)entre 2,9 e $3,6cm$?

c) Determinar o valor do comprimento de pétalas que é superado por 65% das plantas.

17) Suponha que a altura em cm de uma cultivar de trigo é normalmente distribuída com média de $100cm$. Se um melhorista exige que ao menos 90% das plantas tenham altura superior a $80cm$, qual o maior valor que σ pode assumir, satisfazendo as exigências do melhorista?

18) Em um exame de estatística, a nota média foi 70, com $\sigma = 4,5$. Todos os alunos que obtiveram nota 75 a 89 receberam conceito B. Se as notas têm distribuição aproximadamente normal, e se 10 estudantes obtiveram conceito B, quantos se submeteram ao exame?

19) Uma enchedora automática de garrafas de vinho está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de $\mu = 1000cm^3$ e o desvio padrão $\sigma = 10cm^3$. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

a) Qual a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que $990cm^3$?

b) Qual a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões, em ambos os lados?

c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja $1.200cm^3$ e o desvio padrão $20cm^3$? Explique.

20) A observação dos pesos, X, de um grande número de espigas de milho mostrou que essa variável é normalmente distribuída com média $\mu = 90g$ e desvio padrão $\sigma = 7g$. Num programa de melhoramento, entre outras características, uma cultivar deve satisfazer a condição $78 < X < 104g$, onde X é a variável aleatória peso da espiga. Nessas condições, tendo-se 100 linhagens, pergunta-se:

a) qual a proporção de linhagens que deverá ser aceita?

b) qual a proporção de linhagens que deverá ser rejeitada?

c) qual o número de linhagens que continuará participando do programa de melhoramento?

21) Sabe-se que o peso médio, em arrobas, de abate de bovinos, é normalmente distribuído com média 18 e variância 2,25. Um lote de 5000 cabeças, com essa característica, foi destinado ao frigorífico que abate só a partir de um peso mínimo w. Supondo que foram abatidas apenas 4200 cabeças,

a) qual o número esperado de bovinos com peso entre 17 e 19?

b) qual o valor w?

c) qual a $P(w < X < \mu)$?

22) Suponha que os diâmetros de *Paepalanthus* sejam distribuídos com média $12cm$ e desvio padrão $5cm$. Um *Paepalanthus* é considerado pequeno se seu diâmetro for menor que $4cm$ ou grande se seu diâmetro for maior que $19cm$.

a) Encontre a porcentagem de *Paepalanthus* considerados pequenos e grandes.

b) Quinze por cento dos *Paepalanthus* maiores são classificados como grandes. Encontre o diâmetro mínimo para ser classificado como grande.

23) O tempo de validade de um princípio ativo de um determinado inseticida tem distribuição normal de média 803 dias e variância $1581(dias)^2$. Determinar a probabilidade de validade deste inseticida:

a) antes de 750 dias;

b) entre 700 e 900 dias;

c) depois do tempo médio.

24) A distribuição das relações altura/comprimento de conchas de mexilhões *Perna perna*, num ambiente de costão batido, pode ser representada por uma distribuição aproximadamente normal, com média de 0,5 e desvio padrão de 0,02414. Um pesquisador pretende classificá-los de acordo com a relação acima, do seguinte modo: 25% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios e os 25% restantes como grandes. Quais os valores de altura/comprimento que classificam os mexilhões como sendo pequenos, médios e grandes?

25) O comprimento do corpo de um animal da espécie X segue uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão $\sigma = 10mm$.

a) De quanto deve ser o comprimento médio do corpo, μ, para que apenas 10% dos animais tenham menos do que 500 mm?

b) Com o comprimento médio μ obtido no item a), qual a probabilidade de que o comprimento total de 4 animais escolhidos ao acaso seja inferior a 2000 mm?

26) Uma máquina automática para encher sacos de sementes de milho híbridos está regulada para que o peso médio de sementes em cada saco seja de $20Kg$ e o desvio padrão $0,2Kg$. Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal.

a) Qual a porcentagem de sacos em que o peso de sementes não se desvia da média em mais que dois desvios padrões?

b) O que acontecerá com porcentagem do item a) se a máquina for regulada de forma que a mádia seja $30Kg$ e o desvio padrão $0,30Kg$?

c) Qual a probabilidade de encontrar um saco com mais de $20,5Kg$?

27) O diâmetro de certa espécie de árvore é uma variável aleatoria com distribuição normal de média $40cm$ e desvio padrão $5cm$. Se o diâmetro de uma árvore diferir da média de mais de $8cm$, esta árvore é vendida por $10u.m$; caso contrário, é vendida por $20u.m$.

a) Qual o preço médio de venda de cada árvore?

b) Qual é probabilidade de encontrar uma árvore com diâmetro entre $35cm$ e $45cm$?

28) Uma máquina de encher sacos de sementes de milho híbridos pode ser regulada de modo a descarregar uma média de μKg de sementes por saco. Admitindo que a quntidade

em Kg necessária para encher um saco de sementes tenha distribuição normal, com desvio padrão de $0,3Kg$ por saco, calcule o valor de μ de modo que sacos com mais de $22Kg$ ocorram apenas 1% das vezes.

29) Numa espécie de planta, por exemplo, a *Grevilha robusta*, a altura das plantas tem distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de $4m$ e tal que 20% das plantas possuem alturas inferiores a $10m$.

a) Calcule a proporção de árvores com altura superior a $18m$.

b) Nesta população, qual é um valor da altura, A, cuja probabilidade de se encontrar uma árvore com altura maior ou igual a A seja de 10%, isto é, $P(altura >\text{A}) = 10\%$?

30) Num povoamento florestal, considere que X, a medida do diâmetro à altura do peito (DAP), tenha distribuição normal (aproximadamente), com média $\mu = 16,2cm$ e variância $\sigma^2 = 11,56cm^2$. Tomando-se ao acaso uma árvore do povoamento, pergunta-se: qual a probabilidade do DAP da árvore selecionada casualmente ser:

a) menor que 19,6cm?

b) entre 14,0 e 16,0cm?

c) qual o valor de DAP, que é superado por 10% dos valores?

Exercícios Sobre Aproximação Normal à Binomial

31) De um lote de sementes, extraímos uma amostra de 100 sementes ao acaso; se 10% das sementes do lote não germinam, calcular a probabilidade de 12 sementes da amostra não germinarem.

32) De um pomar de pessegueiros são colhidos 2000 frutos; se a probabilidade de um fruto colhido ser classificado como ideal para a indústria de conservas é de 0,45, qual a probabilidade de 950 ou mais pêssegos obterem a classificação ideal?

33) Dois pesquisadores desenvolveram a técnica do transplante nuclear, segundo a qual, um núcleo de uma célula de um dos últimos estágios de um embrião é transplantado para um zigoto (célula única, o óvulo fertilizado), para se verificar se o núcleo pode desenvolver-se normalmente. Se a probabilidade de que um transplante singelo seja bem sucedido é de 0,65, qual é a probabilidade de mais de 70 transplantes, em 100, obterem sucesso?

34) Para comparar a produção de duas cultivares, A e B, de uma determinada espécie vegetal, foram plantadas 60 áreas de terras de $5 \times 3 = 15m^2$, separadas em pares (30 pares) segundo a fertilidade do solo (isto é, existe homogeneidade da fertilidade dentro do par; entre os pares há diferença de fertilidade). Uma área de cada par recebeu a cultivar A e a outra

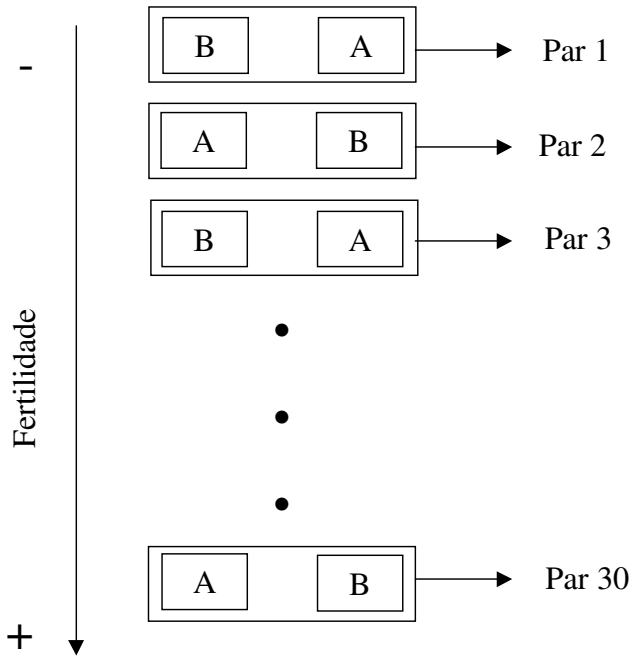


Figura 5.20: Projeto experimental para comparação de duas cultivares

área do par recebeu a cultivar B. Dentro de cada par foi feito um sorteio para saber qual a área que receberia a cultivar A e a B, respectivamente. Veja figura 5.20. As produções nas 60 áreas (30 pares) das cultivares foram anotadas, sendo que em 19 pares a cultivar A apresentou uma maior produção do que a cultivar B. Se não há qualquer diferença entre as duas cultivares quanto a produção, isto é, o fato da cultivar A produzir mais do que a B, ou a cultivar B produzir mais do que a A, é aleatória, casual. Nesse caso, a probabilidade p de que a produção de uma cultivar de um par seja maior que a produção de uma cultivar de um par seja maior que a produção da outra cultivar será de 0,50.
a) Calcular a probabilidade desse resultado (em 19 pares a cultivar A teve maior produção) ter ocorrido por acaso. Use a aproximação normal à binomial.
b) Caso essa probabilidade for menor ou igual a 5%, considera-se que essse resulatdo obtido no experimento indica que a cultivar A é realmente mais produtiva que a cultivar B. Qual a sua conclusão?

35) Dez por cento dos pés de milho que foram inoculados contra um certo vírus tiveram reações sérias indesejáveis devido a inoculação. Calcule a probabilidade de que mais de 20 pés de milho dos 150 pés inoculados tenham tais reações.

6 Introdução à Inferência Estatística

6.1 Introdução

Na seção 1.1, foi dito que um curso básico de estatística deve contemplar, de forma esquemática, os seguintes assuntos: Análise Exploratória de Dados, Modelos Probabilísticos, Amostragem e Inferência Estatística. Esquematicamente, isso foi ilustrado na figura 1.2.

Agora, nós vamos ver como reunir a Análise Exploratória de Dados, Modelos Probabilísticos e Amostragem, para podermos desenvolver um estudo importantíssimo dentro da estatística, conhecido pelo nome de Inferência Estatística, isto é, como tirar conclusões sobre parâmetros da população (por exemplo, sobre médias (μ), proporções (π), variâncias (σ^2)) com base no estudo de somente uma parte da *população*, ou seja, com base em uma *amostra*. Veja figura 6.1. Uma população, em estatística, é formada por todos os valores possíveis de uma característica desejável. Esses valores não precisam ser todos diferentes, nem um número finito. Exemplos de populações: 1) todos os valores possíveis da produção de milho em quilogramas por hectare (kg/ha); 2) todos os pesos ao nascer de coelhos da raça gigante, em gramas; 3) todos os valores de diâmetros de Biomphalarias do Poção do Córrego Grande; 4) todos os valores de micronúcleos de roedores de uma região poluída. Por outro lado, uma amostra, é uma parte (subconjunto) da população. Exemplos de amostras: 1) os rendimentos de milho, em kg/ha, de uma amostra de 5 unidades experimentais (canteiros); 2) os pesos ao nascer de uma ninhada de coelhos da raça gigante; 3) os diâmetros de uma amostra de 30 Biomphalarias do Poção do Córrego Grande; 4) os valores de micronúcleos de uma amostra de 25 roedores.

Num experimento, obtemos alguns dados experimentais (amostra) através do uso de repetições dos tratamentos, e generalizamos os resultados para todos os experimentos similares (população conceitual). A figura 6.2 ilustra o processo de generalização numa situação experimental.

Em inferência estatística utilizamos uma notação própria para diferenciar medidas usadas para descrever características da amostra e da população.

Uma *estatística* é uma medida usada para descrever uma característica da amostra. Assim, por exemplo, $\bar{X}$ a média da amostra; S o desvio padrão da amostra e P a proporção da amostra, são estatísticas.

Por outro lado, um *parâmetro* é uma medida usada para descrever uma característica da população. Geralmente são representados por letras gregas, assim, por exemplo, μ representa a média populacional; π representa a proporção populacional e σ representa o desvio padrão

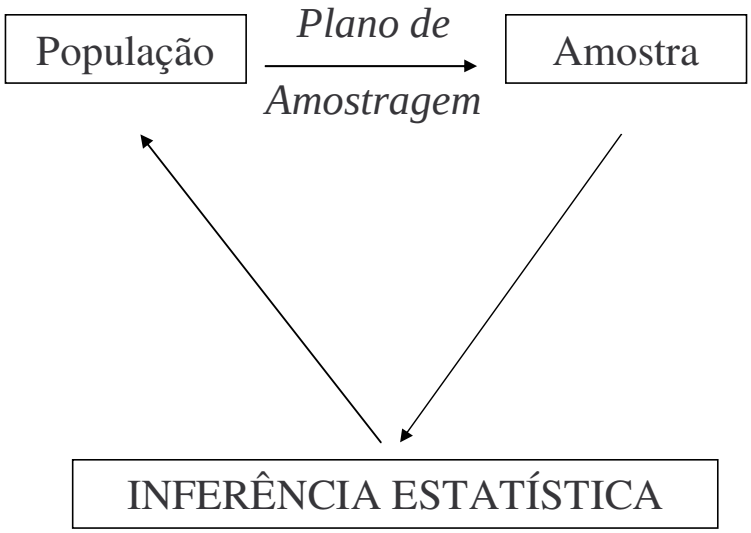


Figura 6.1: O raciocínio indutivo da inferência estatística

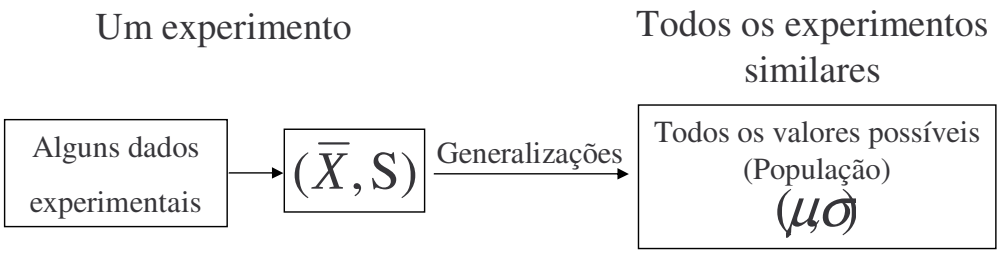


Figura 6.2: O processo de generalização com experimentos

populacional.

Quando uma estatística assume um determinado valor, temos o que denomina-se de *estimativa*. Temos os dados de uma particular amostra, calculamos o valor da estatística de interesse, este valor é a nossa estimativa. Por exemplo, a estimativa da produção média por planta da cultivar Gala é de $\bar{x} = 84\ kg/planta$. Outro exemplo, a estimativa da proporção de peixes com comprimento total menor do que 50 mm é $p = 46\%$.

Um resumo da notação utilizada é apresentada no quadro a seguir.

Notação utilizada para representar parâmetros, estatísticas (ou estimadores) e estimativas			
Característica	Parâmetros	Estatísticas ou Estimadores	Estimativas
Média	μ	$\bar{X}$	$\bar{x}$
Proporção	π	P	p
Variância	σ^2	S^2	s^2
Desvio padrão	σ	S	s

Os dois problemas básicos da inferência estatística são: Estimação e Testes de Hipóteses. Vamos, através de um exemplo, ilustrar estas duas situações.

Exemplo: um pesquisador está interessado em avaliar a produção média por planta, μ, da cultivar de maçã denominada Gala, para as seguintes condições: plantas com idade de aproximadamente 5 anos, em bom estado fitossanitário, cultivadas com alta tecnologia e para a região I do zoneamento agroclimático de Santa Catarina. A população é formada por todas as plantas da cultivar Gala nas condições citadas. Mais especificamente, a população é constituída por todos os valores de produção por planta. Para essa finalidade, o pesquisador vai coletar uma amostra aleatória de, por exemplo, 10 plantas[6], da referida cultivar nas condições descritas. Uma amostra de valores de produções por planta, em kg, foi:

Plantas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média ($\overline{x}$)	Desvio padrão (s)
Produção	84	82	90	86	80	91	85	79	81	82	84	4,0552

Com os 10 valores de produção/planta podemos calcular uma *estimativa* da produção média verdadeira por planta, $\bar{x} = 84$ kg. Portanto, estamos usando a média da amostra, $\bar{X}$, como estimador da média verdadeira, μ. Essa estimativa é chamada de estimativa *pontual*, pois origina um único valor. Esse é um raciocínio tipicamente indutivo, onde se parte do particular (amostra) para o geral (população). Esse é um exemplo de problema de estimação.

Um fato importante que se observa quando trabalhamos com amostras, é que sempre vamos ter que a média verdadeira, μ, é igual a média na amostra, $\bar{X}$, mais um erro de

[6]O tamanho da amostra deve ser determinado com o auxílio da estatística.

Tabela 6.1: Produção por planta, em Kg, de macãs das cultivares Gala e Golden

	Plantas											
Variedades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Média ($\bar{x}$)	Desvio padrão(s)
Gala	84	82	90	86	80	91	85	79	81	82	84,0	4,06
Golden	95	102	85	93	104	89	98	99	107	106	97,8	7,32

amostragem. A representação disso é dada por:

$$\mu = \bar{X} + \textit{erro amostral}$$

onde o termo *erro amostral* é a diferença entre a estatística ($\bar{X}$) e o parâmetro (μ). Apesar do nome *erro*, isto não quer dizer que a amostragem foi feita de forma errada e, que, portanto, deve-se coletar uma nova amostra. Esse valor pode ser negativo ou positivo, pequeno, nulo ou grande. Em todas as pesquisas vamos estar envolvidos com o erro amostral. Dizemos que uma estimativa é *precisa*, se tivermos alto grau de *confiança* de que o erro amostral associado a estimativa em questão, é pequeno. A *precisão* e a *confiança* são dois conceitos chaves nesse estudo. A precisão pode ser entendida como a diferença máxima entre a estimativa e o parâmetro que o pesquisador deseja considerar no seu estudo. Voltaremos a tratar deste assunto posteriormente.

Uma outra forma de estimação é através da construção de intervalos de confiança. Nesse caso, temos uma estimativa intervalar, isto é, temos um intervalo, dentro do qual esperamos que o valor populacional se encontre. Por exemplo, para os dados de produção/planta da cultivar Gala ao invés de dizer que a estimativa é de 84 kg/planta, podemos dizer que a média está no intervalo de 81,10 a 86,90.

Essa forma de estimação é muito mais informativa que a estimativa pontual. O pesquisador pode verificar se esse intervalo é curto (preciso, informativo) ou se é muito amplo (pouco informativo). Isto será estudado no capítulo 7.

O segundo problema é o de teste de hipóteses sobre os parâmetros. Por exemplo, um pesquisador deseja saber se a produção média/planta da cultivar Gala é a mesma da produção média/planta da cultivar Golden. Para isso, foi obtida uma outra amostra aleatória de 10 plantas da cultivar Golden sob as mesmas condições descritas para a cultivar Gala. Os dados das duas amostras aleatórias estão apresentadas na tabela 6.1.

As estimativas da produção média das duas cultivares, calculadas com os dados das duas amostras foram 84 Kg/planta e 97,8 kg/planta para as cultivares Gala e Golden, respectivamente. Portanto, a diferença verificada entre as duas cultivares, com essas duas amostras, foi de 13,8 kg/planta a favor da cultivar Golden.

Observando-se os dados individualmente, verificamos que para as plantas 3 e 6, as produções na cultivar Gala foram superiores a da Golden. Portanto, podemos pensar que é perfeitamente possível obtermos um par de amostras, dentre todas as amostras possíveis de serem sorteadas, no qual a produção média da cultivar Gala é superior a da Golden. Isso devido simplesmente a amostragem, ou seja, variações devido a amostragem.

Assim, o problema que se apresenta, é o de decidir o que é uma diferença real, isto é, devido à cultivar, ou uma diferença casual, isto é, devido a variação casual na amostra. Este tópico será estudado no capítulo 8.

Logicamente, o pesquisador pretende generalizar os resultados obtidos na análise estatística, isto é, ele deseja saber se há diferença significativa entre as médias verdadeiras μ_{Gala} e μ_{Golden} (desconhecidas pelo pesquisador). Como ele está trabalhando com duas amostras aleatórias, dentre um grande número de possíveis amostras, ele não pode fazer afirmações com 100% de certeza, mas ele pode perfeitamente fazer uma afirmação probabilística, indicando a probabilidade de erro ao fazer uma afirmação sobre uma hipótese em teste. Para isso, utilizaremos as distribuições de probabilidades, como veremos nas próximas seções.

6.2 Como Selecionar Uma Amostra

Como vimos nos exemplos anteriores, um pesquisador trabalha com apenas uma parte da população, isto é, com uma amostra. A maneira como é selecionada uma amostra é de extrema importância, pois é através dos dados amostrais que serão calculadas as estimativas dos parâmetros desconhecidos da população e, também, serão feitas afirmativas sobre os mesmos.

É fácil de se imaginar que é fundamental o pesquisador ter um bom conhecimento da população, pois quanto mais ele conhecer a população, mais informativa será a amostra selecionada. Por exemplo, se um Biólogo deseja fazer um estudo sobre a poluição de uma baía em peixes do genêro Bagre, ele vai precisar coletar uma amostra de peixes desse gênero e avaliar o número de micronúcleos em 5000 células. Para se ter uma amostra que permita tirar conclusões válidas, é necessário ter um bom conhecimento sobre o comportamento desse tipo de peixe.

As situações de amostragem, nas ciências biológicas e agronômicas, na prática, são inúmeras e podem ser mais ou menos complexas. Vejamos alguns exemplos de seleção de amostras.

Exemplo 1. Desejamos desenvolver uma pesquisa sócio-econômica, sobre os agricultores integrados à uma empresa, onde estamos interessados em diversos parâmetros relativos a atividade agropecuária. A população é constituída por todos os agricultores integrados à empresa. Podemos definir várias variáveis associadas a cada agricultor (propriedade agrícola). Essas variáveis serão observadas sobre uma amostra de 200 agricultores. Para selecionar os agricultores que participarão da amostra, sorteamos, com regras bem definidas, 200 fichas de um fichário, onde conste todos os agricultores integrados.

Exemplo 2. Estamos interessados numa pesquisa para tratar a glicemia[7] em peixes Mandi[8] através da injeção de glucagônio. Um parâmetro de interesse seria o teor de açúcar no sangue desses peixes. A população é constituída por todos os peixes Mandi do local de estudo. Nesse caso, o pesquisador não tem acesso a toda a população de peixes Mandi. Assim, ele vai selecionar (amostra) aqueles que estão acessíveis. Por exemplo, se desejamos uma amostra de 15 peixes, o pesquisador poderá utilizar os peixes capturados com uma tarrafa, ou selecionar alguns peixes em um laboratório. É importante que os peixes selecionados para participarem da amostra, tenham as mesmas características da população.

Exemplo 3. Numa pesquisa sobre propriedades químicas de uvas da cultivar Cabernet, com idade de $\pm$ 6 anos, nas seguintes condições (tratamentos):

- Tratamento 1: plantas sadias;
- Tratamento 2: plantas com infecção média da virose do enrolamento;
- Tratamento 3: plantas com infecção forte da virose do enrolamento,

podemos estar interessados no parâmetro teor médio de açúcar da cultivar, sob cada uma das três condições. As populações são formadas por todas as plantas adultas da cultivar cabernet na região considerada para cada um dos tratamentos. Nesse caso, o pesquisador seleciona intencionalmente 10 plantas, para cada tratamento, de um parreiral. Portanto, temos 3 amostras, cada uma de tamanho igual a 10.

Exemplo 4. Em estudos sobre a distribuição e abundância de primatas na natureza, deseja-se conhecer o número de animais em uma determinada área e a área de ocorrência atual desses animais.

Necessita-se fazer a abertura de algumas trilhas (transectos) na mata, por onde serão feitas as observações e caminhadas. O tamanho da amostra corresponde ao número de vezes que cada trilha deve ser caminhada, por exemplo, 40 repetições. A contagem por transectos

[7]Presença de glicoce no sangue em cota fisiológica.

[8]Designação comum a várias espécies de peixes siluriformes, especialmente da família dos pimelodideos.

lineares é um dos métodos mais usados para a estimativa da densidade de várias espécies de animais.

Em resumo, a obtenção de soluções adequadas para problemas de amostragem exige, em geral, muito bom senso, conhecimento do fenômeno biológico e experiência. Como percebemos, existem muitas maneiras de se retirar uma amostra de uma população. Existe um campo dentro da estatística que trata especificamente dos projetos para retirar amostras. Entretanto, o plano mais simples e talvez o mais importante em estatística é o plano conhecido como Amostragem Casual Simples e, é desse plano, que trataremos agora.

6.3 Amostragem Aleatória Simples

O que caracteriza este tipo de amostragem, é que todos os elementos da população tem probabilidade igual de pertencer a amostra e, todas as possíveis amostras, tem igual probabilidade de serem sorteadas.

Vamos, a partir de um exemplo, apresentar com detalhes uma definição precisa, ou seja, matemática, de amostra aleatória simples. Essa é a definição mais adequada à experimentação.

Exemplo: considere a população das 17 alunas da turma de estatística básica do curso de Ciências Biológicas. Na tabela 6.2 está representada a distribuição dos valores de altura (X) das alunas da turma juntamente com a distribuição de probabilidades.

Obter uma amostra aleatória simples dessa população, equivale matematicamente a colocar numa caixa de papel, 17 pedacinhos de papéis numerados de 1 a 17 e, após, proceder a um sorteio. A altura x do primeiro elemento selecionado pode assumir qualquer valor da primeira coluna da tabela 6.2, com probabilidades apresentadas na terceira coluna da mesma. Vamos representar essa primeira observação por X_1. Vamos repor esse papel na caixa. O segundo papel escolhido aleatoriamente, também pode assumir qualquer valor x da primeira coluna da tabela 6.2, com as probabilidades dadas na terceira coluna. Vamos representar essa segunda observação por X_2. Repomos esse papel na caixa. Repetimos esse procedimento até selecionar todos os n elementos da amostra $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Observe que a distribuição de probabilidades de X_1, é a mesma distribuição da população, isto é, de X; a distribuição de probabilidades de X_2, é a mesma distribuição de probabilidades de X; e, assim, para $X_3, ..., X_n$.

Então, diz-se que $X_1, X_2, ..., X_n$ tem a mesma distribuição de probabilidades, e qual é esta distribuição? a distribuição da população, ou seja, de X. Dizemos que $X_1, X_2, ..., X_n$

Tabela 6.2: Distribuição de freqüências das alturas das alunas do curso de estatística básica.

Altura	Frequências absolutas	Frequências relativas
1,56	1	0,059
1,60	4	0,235
1,61	2	0,117
1,62	1	0,059
1,63	1	0,059
1,65	1	0,059
1,67	2	0,117
1,68	1	0,059
1,70	1	0,059
1,72	2	0,117
1,73	1	0,059
Total	45	1,0000

são *identicamente distribuídas*.

De um modo geral, as observações X_1 (altura da primeira aluna sorteada), X_2 (altura da segunda aluna sorteada),...,X_n (altura da n-ésima aluna sorteada) serão *independentes* caso a amostragem seja feita com reposição. Na prática, em particular na experimentação, a amostragem é feita sem reposição, o que acarreta perda da independência, porém para populações grandes os resultados (propriedades) importantes para a inferência podem ser considerados equivalentes, como será mostrado mais adiante. Agora, podemos definir amostra aleatória simples de forma precisa.

Definição: uma amostra aleatória simples de tamanho n, de uma variável aleatória X, é aquela cujas n observações $X_1, X_2, ..., X_n$ são independentes e identicamente distribuídas.

6.3.1 Obtenção de Uma Amostra Aleatória Simples

A obtenção de uma amostra verdadeiramente aleatória vai depender muito da situação da população de interesse. Freqüentemente, não é possível obter-se uma amostra aleatória - aquela em que cada membro da população pode participar da amostra - pois a mesma não se adapta aos dados da pesquisa. Por exemplo, na pesquisa para tratar a glicemia em peixes Mandi através da injeção de glucagônio (200 μg), os peixes que formam a amostra são os

acessíveis, que estão no laboratório ou que serão capturados com uma tarrafa.

Na pesquisa para estudar o teor médio de açúcar da cultivar cabernet, em três condições (tratamentos) diferentes, quais sejam: 1) plantas sadias; 2) plantas com infecção média da virose do enrolamento e 3) plantas com infecção forte da virose do enrolamento, o pesquisador selecionou intencionalmente 10 plantas de cada tratamento de um parreiral.

Uma outra situação, é o caso da pesquisa sócio-econômica dos agricultores de um determinado município, em que temos uma listagem de todos os agricultores desse município. Nesse caso, podemos numerar todos os agricultores de 1 até N, sorteando-se, a seguir, por meio de um processo bem definido, que nos garanta a aleatoriedade, n agricultores dessa seqüência, os quais formarão a amostra.

Um procedimento útil para realizar o sorteio é usar a tabela de números aleatórios. Esta tabela é dada no apêndice 7. As tabelas de números aleatórios contém os 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e são formadas por sucessivos sorteios do conjunto deles. Essas tabelas foram exaustivamente testadas e a sua aleatoriedade é garantida.

Na tabela de números aleatórios, esses números podem ser lidos isoladamente, ou em grupos de dois, três, quatro, ou mais algarismos; podem ser lidos em qualquer ordem: por colunas em qualquer sentido, por linhas em qualquer sentido, diagonalmente. Vamos, através de um exemplo, fazer uma ilustração do uso da tabela de números aleatórios.

Exemplo. A finalidade da pesquisa é determinar o peso médio, o peso total, em toneladas, e a porcentagem de fornecimentos abaixo de X toneladas, de cana-de-açúcar, entregue pelos fornecedores à indústria. A população é formada por 250 fornecedores de cana-de-açúcar. Deseja-se sortear uma amostra de 21 fornecedores.

Primeiramente, os 250 fornecedores são listados por ordem alfabética. Após isso, a população é numerada de 1 até 250. Como a identificação exigiu números com 3 algarismos, é necessário lermos números de 3 algarismos na tabela de números aleatórios. Utilizando a tabela (apêndice 7), sorteia-se as colunas 8, 9 e 10, e, vamos, ler percorrendo as colunas de

cima para baixo, os números encontrados foram:

826	*97*	820	*176*	452	328	868	817	402	253
232	497	*174*	397	419	519	699	*13*	415	772
406	*207*	313	348	963	476	932	870	827	718
140	490	499	*134*	719	*209*	681	471	612	424
537	*56*	331	742	981	662	625	957	450	331
902	910	*7*	929	775	785	935	*30*	573	941
611	264	893	441	809	813	*113*	*79*	933	*136*
883	*233*	640	655	520	815	440	*69*	798	
928	741	*234*	746	312	616	*173*	995	496	
138	694	806	952	876	*3*	876	436	379	

A amostra selecionada é formada pelos números em itálico na matriz. Através desses números identifica-se os agricultores que vão fazer parte do estudo.

Em resumo, para selecionarmos uma amostra, com a utilização da tabela de números aleatórios, devemos seguir os seguintes passos:

- 1) faça uma lista dos itens da população;
- 2) numere os itens da lista, a começar de 1;
- 3) leia os números na tabela de números aleatórios de modo que o número de algarismos em cada um seja igual ao número de algarismos do último número da sua listagem. Exemplo, se o último número é 1370, devem ser lidos números com 4 algarismos. Sortear o início da leitura dos números, por exemplo, iniciar na quinta linha da esquerda para a direita;
- 4) despreze os números que não correspondem aos números da lista ou que sejam repetições de números lidos anteriormente (amostragem sem reposição). Continue o processo até ter o número desejado de observações;
- 5) use os números assim identificados para coletar os itens que vão fazer parte da amostra.

Exemplo. Um pesquisador deseja comparar os teores médios de proteína de três cultivares de cevada. Para executar o experimento ele dispõe de uma área de terra homogênea (mesma fertilidade, mesma umidade, etc.) de tamanho 288 m^2. Portanto, as três cultivares vão ser comparadas em igualdade de condições. Um princípio básico da experimentação

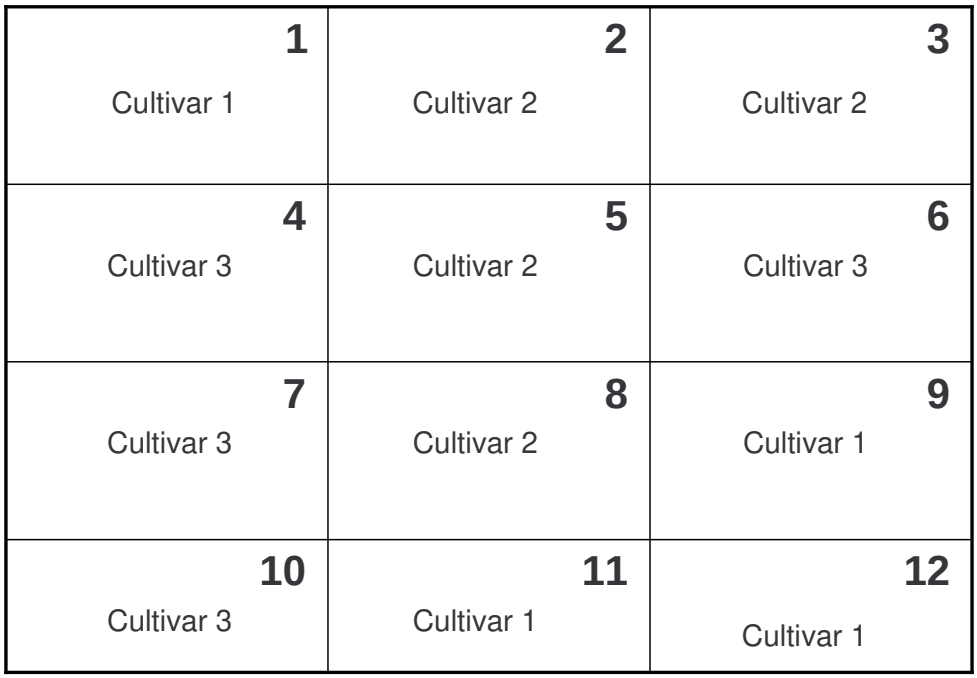


Figura 6.3: Croqui de campo, indicando o processo de aleatorização do experimento

é o uso de repetições, ou seja, são necessários pelo menos dois valores para cada cultivar. Assim, a área total vai ser dividida em 12 canteiros de tamanhos 6m $\times$ 4m, totalizando $24m^2$/canteiro. O número de repetições (tamanho da amostra) por cultivar é 4. O croqui da área é dado na figura 6.3.

A aleatorização das três cultivares foi feita do seguinte modo:

- enumerou-se os canteiros de 1 a 12, como indicado no canto superior direito da figura 6.3;
- leu-se números na tabela de número aleatórios (Apêndice 7), com dois algarismos, selecionando-se apenas os valores que estão na faixa de 1 a 12 e desprezando-se os valores repetidos. Sorteou-se a sexta linha para iniciar a leitura dos números, da esquerda para a direita, produzindo a seguinte listagem: {12, 1, 11, 9, 5, 8, 3, 2, 7, 10, 6, 4};
- os canteiros 12, 1, 11 e 9 receberam a cultivar 1; os canteiros 5, 8, 3 e 2 receberam a cultivar 2 e os canteiros 7, 10, 6 e 4 receberam a cultivar 3.

Exercício. A finalidade da pesquisa é o de determinar o número de insetos/quadrante e o total de insetos na área. Sortear 15 quadrados de um total de 100, de 10 m^2 cada.

As técnicas estatísticas que veremos nas seções subseqüêntes deste livro, pressupõem que a amostra foi selecionada aleatoriamente ou por algum processo equivalente. Embora, para os dados de uma pesquisa, nem sempre uma amostra aleatória é possível, tomando-se algumas precauções especiais no delineamento da pesquisa, esta suposição (amostra aleatória) pode ser pertinente, por exemplo, num experimento, fazendo-se a casualização (sorteio) dos tratamentos às unidades experimentais (Box *et al.*, 1978).

6.4 Distribuições Amostrais

O objetivo pelo qual selecionamos uma amostra, é para obter estimativas de parâmetros desconhecidos da população (μ, σ^2, π), fazer afirmações sobre os mesmos e, também, para auxiliar na verificação da forma (distribuição) como a estatística se distribui.

Vamos raciocinar em cima da seguinte pergunta, relativa ao exemplo em que o pesquisador está interessado em avaliar a produção média (μ), por planta, da cultivar de maçã Gala. O valor da produção média por planta ($\bar{x}$), numa amostra de 10 plantas, vai ser um valor próximo da verdadeira produção média referente a todas as plantas da cultivar Gala?[9]

Como o valor da verdadeira produção média por planta é desconhecido, responderemos a pergunta através do estudo de como se distribuem os possíveis valores de $\bar{x}$.

Quando se extraem repetidas amostras de uma mesma população, provavelmente os valores das médias amostrais são todos diferentes e, também, diferentes da verdadeira média da população, simplesmente devido ao fato de serem considerados elementos diferentes da população. Como exemplo, veja a terceira coluna (amostras) e a sexta coluna (médias amostrais) da tabela 6.4. Esta variabilidade é conhecida como *variabilidade amostral*. Portanto, torna-se imprescindível, quando vamos fazer inferências sobre parâmetros populacionais, levar em consideração a distribuição amostral. Estas são descritas pelas distribuições de probabilidades, como a distribuição normal e a binomial, por exemplo. Como exemplo de distribuição amostral temos os 16 valores das médias amostrais dadas na tabela 6.4, obtidas das 16 amostras possíveis de tamanho $n = 2$.

Os valores da estatística, calculados nas amostras, vão formar uma nova população (de médias, de variâncias, de proporções), cuja distribuição recebe o nome de distribuição amostral (de médias, de variâncias, de proporções). Assim o conjunto:

- $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_k$ é denominado de distribuição amostral das médias ou da média; o conjunto:

[9]Depende da estatística, do tamanho da amostra e da variabilidade na população.

Tabela 6.3: Pesos de 4 suínos

Suínos	Peso (kg)
A	68
B	80
C	84
D	87

- $p_1, p_2, ..., p_k$ é denominado de distribuição amostral das proporções ou da proporção; o conjunto:

- $s_1^2, s_2^2, ..., s_k^2$ é denominado de distribuição amostral da variância.

onde k é o número de todas as amostras possíveis. No exemplo temos $k = 16$.

Para ilustrar o desenvolvimento do estudo de distribuição amostral da proporção, da média e da variância, vejamos um exemplo simples. Salientamos, que esse exemplo, no qual a população é bastante pequena ($N = 4$), e a amostragem é feita com reposição, tem fim puramente didático. Para a nossa finalidade, suponhamos conhecidos os pesos de todos os suínos, embora o agricultor só irá conhecer os pesos dos suínos amostrados. Os pesos dos animais são dados na tabela 6.3.

Os valores dos parâmetros proporção(π) de suínos com peso inferior a 75kg, peso médio(μ), variância(σ^2) e desvio padrão(σ) são:

$$\begin{aligned} \pi &= 1/4 = 0,25 \\ \mu &= \sum x/N = 79,75\ kg. \\ \sigma^2 &= \frac{\sum(x-\mu)^2}{N} = \frac{208,75}{4} = 52,18\ kg^2. \\ \sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52,18} = 7,22\ kg. \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.4.1 Distribuição Amostral da Proporção

Vamos considerar que um suíno com menos de 75 kg obtenha um preço bastante inferior na agroindústria. Sabemos que existe apenas 1 suíno nessa situação na população, portanto, a proporção, (π), de suínos com peso inferior a 75 kg na população é de 1/4=0,25. O agricultor deseja estimar esta proporção de suínos com peso inferior a 75 kg observando alguns suínos da população. Para isso, ele decide selecionar uma amostra aleatória de 2

Tabela 6.4: Todas as amostras possíveis de tamanho igual a dois, com reposição, da população dada na tabela 6.3, com as respectivas proporções, médias e variâncias amostrais.

Amostras	Amostras	Pesos	Proporção < 75 kg (P)	Média peso $(\bar{X})$	Variância $(\div 1)$ (S^2)	Variância $(\div 2)$ (S^2)
1	A,B	68;80	1/2=0,50	74,0	72,0	36,00
2	A,C	68;84	1/2=0,50	76,0	128,0	64,00
3	A,D	68;87	1/2=0,50	77,5	180,5	90,25
4	B,C	80;84	0/2=0	82,0	8,0	4,00
5	B,D	80;87	0/2=0	83,5	24,5	12,25
6	C,D	84;87	0/2=0	85,5	4,5	2,25
7	B,A	80;68	1/2=0,50	74,0	72,0	36,00
8	C,A	84;68	1/2=0,50	76,0	128,0	64,00
9	D,A	87;68	1/2=0,50	77,5	180,5	90,25
10	C,B	84;80	0/2=0	82,0	8,0	4,00
11	D,B	87;80	0/2=0	83,5	24,5	12,25
12	D,C	87;84	0/2=0	85,5	4,5	2,25
13	A,A	68;68	2/2=1	68,0	0,0	0,00
14	B,B	80;80	0/2=0	80,0	0,0	0,00
15	C,C	84;84	0/2=0	84,0	0,0	0,00
16	D,D	87;87	0/2=0	87,0	0,0	0,00

suínos, com reposição, e usar a proporção encontrada nesta amostra, como estimativa da proporção na população. Isto nos sugere algumas perguntas fundamentais:

- quais as proporções amostrais que o agricultor pode obter?
- qual a probabilidade de cada uma?
- qual a forma da distribuição das proporções amostrais?
- qual a média da distribuição amostral das proporções?
- qual a variância da distribuição amostral das proporções?

Para responder a essas perguntas, precisamos construir a distribuição amostral das proporções. Na tabela 6.4 temos todas as 16 amostras possíveis de tamanho igual a dois suínos ($N^n = 4^2$) e as correspondentes 16 proporções amostrais. Observe, por exemplo, para a amostra (A,A), que não temos uma ordenação nos resultados, pois só temos um suíno A.

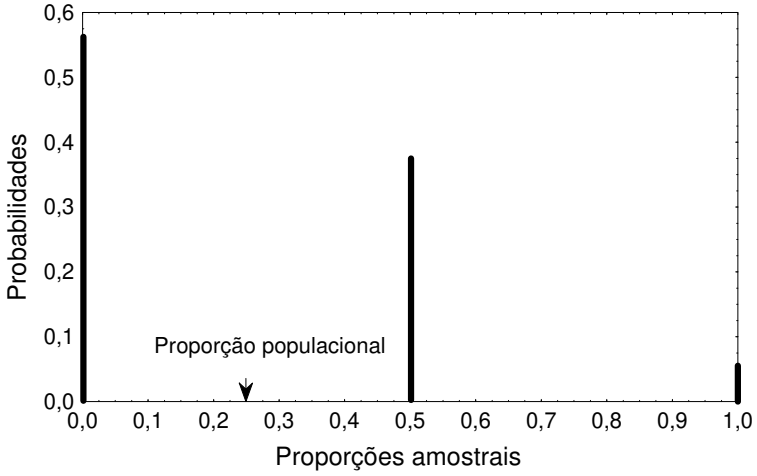


Figura 6.4: Distribuição amostral da proporção de suínos com peso abaixo de 75 kg, tamanho da amostra igual a 2.

A distribuição amostral da proporção de suínos com peso abaixo de 75 kg, para $n = 2$, fica:

x_i	0	1	2
$p = x_i/2$	0	0,50	1
$Prob(P = p)$	9/16=0,5625	6/16=0,3750	1/16=0,0625

onde x_i representa os possíveis valores da variável aleatória X "número de suínos com peso inferior a 75 kg na amostra".

A representação gráfica da distribuição amostral da proporção de suínos com peso inferior a 75 kg, para amostras de tamanho 2, extraídas de uma população com 4 suínos e, proporção populacional igual a 0,25, é dada na figura 6.4.

Como a nossa amostra é de tamanho dois, é impossível obter uma proporção amostral com valor igual a 0,25. Porém, podemos observar que a verdadeira proporção (populacional) encontra-se entre 0 e 0,50, que são os valores que apresentam as maiores probabilidades de ocorrência na amostra. A forma da distribuição é assimétrica.

Como vimos no estudo de variáveis aleatórias discretas, contagens ou proporções, podem ser estudadas pela distribuição binomial. Vamos, para a situação em estudo, verificar se as pressuposições do modelo binomial são atendidas.

1) Temos duas repetições ($n = 2$).

2) Em cada repetição, somente temos duas possibilidades: peso abaixo de 75 kg, ou, então, igual ou acima de 75 kg.

3) As probabilidades permanecem constantes em todas as repetições do experimento.

4) Os resultados das repetições são independentes.

Portanto, as pressuposições do modelo binomial são todas atendidas para a variável aleatória X. Da tabela da distribuição binomial (Apêndice 1), para $n = 2$ e $\pi = 0,25$, obtemos:

$$Prob(P = 0) = P(X = 0) = 0,5625;$$

$$Prob(P = 0,50) = P(X = 1) = 0,3750;$$

$$Prob(P = 1) = P(X = 2) = 0,0620.$$

Como podemos ver, obtemos exatamente os mesmos valores da distribuição amostral das proporções. Assim, na prática, não é preciso construir empiricamente a distribuição amostral das proporções, pois, a mesma, pode ser obtida pela distribuição binomial.

Conforme visto na seção 5.3.4 para determinadas condições de n e de π, a distribuição binomial pode ser bem aproximada pela distribuição normal com parâmetros

$$\mu_X = n\pi \ e \ \sigma_X^2 = n\pi(1-\pi)$$

conseqüentemente a distribuição das proporções também pode ser aproximada pela distribuição normal com parâmetros

$$\mu_P = \pi \ e \ \sigma_P^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

Observa-se que a média das proporções amostrais é sempre igual a proporção populacional ($\mu_P = \pi$), e a medida que n aumenta, a variabilidade amostral diminui, isso implica que amostras grandes têm forte tendência a fornecer uma estatística amostral próxima do verdadeiro valor do parâmetro populacional.

O desvio padrão da distribuição amostral das proporções é dado por:

$$\sigma_P = \sqrt{\pi(1-\pi)/n}.$$

Como pode ser verificado com os dados da tabela 6.4:

$$\mu_P = (0,5+0,5+0,5+0+0+0+0,5+0,5+0,5+0+0+0+1+0+0+0)/16 = 4/16 = 0,25$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 \\ &+ (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 \\ &+ (1-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2/16 = 1,5/16 = 0,09375.\end{aligned}$$

Note que $\mu_P = 0,25 = \pi$ e $\sigma_P^2 = 0,09375 = 0,18750/2 = \pi(1-\pi)/n$.

Usualmente os processos de seleção de amostras são feitos sem reposição e isto implica em uma correção na fórmula da variância e do desvio padrão da proporção, mas não na média. Dos dados da tabela 6.4 vamos calcular a média, a variância e o desvio padrão das 12 primeiras amostras, que representam os possíveis valores se o processo fosse sem reposição. Temos:

$$\mu_P = (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0 + 0 + 0 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0 + 0 + 0)/12 = 3/12 = 0,25$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 \\ &+ (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0,5-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 + (0-0,25)^2 \\ &= 0,75/12 = 0,0625.\end{aligned}$$

A correção na variância é feita através do termo $(N-n)/(N-1)$[10], um valor menor ou igual a 1 (o valor 1 somente ocorre para $n = 1$). Assim, a variância e o desvio padrão das proporções com a correção são dadas por:

$$\sigma_P^2 = \frac{\pi(1-\pi)}{n}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

Podemos observar que a variância das proporções calculada com as 12 amostras (sem reposição), $\sigma_P^2 = 0,0625$, corresponde a $(N-n)/(N-1)$=$(4-2)/(4-1) = 2/3$, da variância das proporções calculada com as 16 amostras (com reposição), $\sigma_P^2 = 0,09375$, ou seja, $0,625 = (2/3) \times 0,09375$.

No caso de populações infinitas, este termo pode ser desconsiderado, pois ele é aproximadamente igual a 1. Nos casos de populações finitas, este termo também pode ser ignorado quando o tamanho da amostra for menor do que 5% do tamanho da população ($n < 0,05N$).

Exemplo 1. Um processo de encher garrafas de vinho dá em média 10% de mal enchidas. Extraída uma amostra de 125 garrafas, qual a probabilidade de que a proporção amostral de garrafas mal enchidas esteja entre 9% e 11%?

Como n é grande, π não é próximo de zero e $n\pi = 125(0,10) = 12,5$, podemos considerar a distribuição normal para aproximar probabilidades binomiais. Nesse exemplo, a população

[10]Este termo é proveniente da variância da distribuição hipergeométrica, distribuição exata dos dados quando a amostragem é feita sem reposição. Detalhes em Bussab & Morettin (1987)

é infinita, pois ela é formada por todas as garrafas enchidas e que virão a ser enchidas, portanto, não há necessidade de se fazer a correção para população finita no desvio padrão. No exemplo, a média e o desvio padrão valem:

$$\pi = 0,10 \quad (1-\pi) = 1 - 0,10 = 0,90 \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = \sqrt{\frac{0,10(0,90)}{125}} = 0,0268.$$

Vamos calcular os valores de z_1 e z_2:

$$z_1 = \frac{p-\pi}{\sigma_P} = \frac{0,09-0,10}{0,0268} = -0,37.$$

$$z_2 = \frac{p-\pi}{\sigma_P} = \frac{0,11-0,10}{0,0268} = 0,37.$$

Portanto, a probabilidade vale:

$$Prob(0,09 \leq P \leq 0,11) = Prob(-0,37 \leq z \leq 0,37) = 2Prob(0 \leq z \leq 0,37) = 2(0,1443) = 0,2886 = 28,86\%.$$

Exemplo 2. Sabe-se que 5% das latas de pêssego industrializados pela indústria A, em uma jornada de trabalho, apresentam peso drenado fora dos padrões. Qual a probabilidade de, em uma amostra de 200 latas, apresentarem-se fora dos padrões: a) 6% ou mais? e b) 4% ou menos?

Temos n suficientemente grande e $n\pi = 200(0,05) = 10$, portanto, em termos práticos, podemos usar a distribuição normal como aproximação da distribuição binomial. Vamos considerar a população como sendo infinita. A média e o desvio padrão são dados por:

$$\pi = 0,05 \quad (1-\pi) = (1-0,05) = 0,95 \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{0,05(0,95)}{200}} = 0,0154.$$

Para o item a) a probabilidade vale:

$$z = \frac{0,06-0,05}{0,0154} = 0,65.$$

$$Prob(P \geq 0,06) = Prob(z \geq 0,65) = 0,5 - Prob(0 \leq z \leq 0,65) = 0,5 - 0,2422 = 0,2578 = 25,78\%.$$

Para o item b) a probabilidade vale:

$$z = \frac{0,04-0,05}{0,0154} = -0,65.$$

$$Prob(P \leq 0,04) = Prob(z \leq -0,65) = 0,5 - 0,2422 = 0,2578 = 25,78\%.$$

Exemplo 3. (Bussab & Morettin, 1987). Um procedimento de controle de qualidade foi planejado para garantir um máximo de 10% de itens defeituosos na produção. A cada

15 minutos sorteia-se uma amostra de 50 peças e, havendo mais de 15% de defeituosas, pára-se a produção para verificações. Qual a probabilidade de uma parada desnecessária? Observação: os diferentes valores de p são obtidos devido à variação aleatória na amostra. Mesmo a população tendo uma proporção $\pi = 10\%$, podemos obter uma amostra com p acima de 15% devido puramente ao "azar" de selecionar a amostra. Por isso a pergunta acima: qual a probabilidade de uma parada desnecessária? ou seja, encontrar um $p \geq 15\%$ quando, na verdade, temos $\pi = 10\%$.

Temos que $n\pi = 50(0,10) = 5$. Obtemos para a média e o desvio padrão os seguintes valores:

$$\pi = 0,10 \quad (1-\pi) = (1-0,10) = 0,90 \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{0,10(0,90)}{50}} = 0,0424.$$

$$z = \frac{0,15 - 0,10}{0,0424} = 1,18.$$

$$Prob(P \geq 0,15) = Prob(z \geq 1,18) = 0,1190 = 11,90\%.$$

6.4.2 Distribuição Amostral da Média

Passamos agora a estudar a distribuição amostral da estatística $\bar{X}$, a média amostral.

Para mostrarmos os principais resultados (propriedades) de uma distribuição amostral de médias, retornemos ao exemplo da população de 4 suínos, dada na tabela 6.3, e que, o agricultor, agora, deseja estimar o peso médio dos suínos (μ).

Com o objetivo de avaliar a média populacional ($\mu = 79,75\ kg$), o agricultor decide selecionar uma amostra aleatória simples de tamanho 2, com reposição. De forma análoga ao que foi feito para a proporção amostral, devemos observar todas as possíveis amostras de tamanho $n = 2$, com reposição, e para cada uma das amostras calcular a média ($\bar{x}$). Os resultados possíveis são apresentados na tabela 6.4.

Os valores da média, variância e desvio padrão da distribuição amostral das médias são:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}} &= \frac{(74,0 + 76,0 + 77,5 + ... + 80,0 + 84,0 + 87,0)}{16} \\ &= 79,75\ kg. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\bar{X}} &= \frac{(74,0 - 79,75)^2 + (76,0 - 79,75)^2 + ... + (84,0 - 79,75)^2 + (87,0 - 79,75)^2}{16} \\ &= 26,09\ kg^2. \\ \sigma_{\bar{X}} &= \sqrt{26,09} = 5,11\ kg. \end{aligned}$$

Observamos que o valor da média da distribuição amostral das médias é o mesmo da média da população ($\mu_{\bar{X}} = \mu$). A variância da distribuição amostral das médias é dada por:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 26,09 = \frac{52,18}{2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

O desvio padrão da distribuição da média é dado por:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

No exemplo $\sigma_{\bar{X}} = 7,22/\sqrt{2} = 5,11$ kg.

No caso de população finita de tamanho N e amostragem aleatória simples sem reposição, a média da distribuição amostral da média é igual a média da população, porém a variância e o desvio padrão ficam dados por:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

Na tabela 6.4 vamos calcular a variância e o desvio padrão das 12 médias de peso de suínos obtidas com amostras de tamanho $n = 2$. Estas 12 médias são obtidas de amostras sem reposição de uma população finita.

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\bar{X}} &= \frac{(74,0-79,75)^2 + (76,0-79,75)^2 + ... + (83,5-79,75)^2 + (85,5-79,75)^2}{12} \\
&= 17,40\ kg^2. \\
\sigma_{\bar{X}} &= \sqrt{17,40} = 4,17\ kg.
\end{aligned}$$

O termo $\sqrt{(N-n)/(N-1)}$ é denominado fator de correção para população finita. Quando ocorrer a desigualdade $n < 0,05N$ este termo pode ser omitido da expressão da variância.

Mostramos como fica a média e a variância da distribuição amostral da média. O próximo passo é verificarmos a forma da distribuição amostral das médias, isto é, qual modelo probabilístico poderia ser utilizado para descrever a distribuição amostral das médias? Nas figuras 6.5 e 6.6 temos os histogramas das médias amostrais possíveis para amostras de tamanhos 2 e 3, respectivamente, para os dados da tabela 6.3. Observamos que a medida que o tamanho da amostra aumenta de 2 para 3, as médias amostrais ficam mais concentradas em torno da média verdadeira (μ), porque o desvio padrão diminui. Os casos extremos, de médias muito grandes ou pequenas, passam a ter uma menor freqüência de ocorrência. É sabido que se a população sobre a qual desejamos selecionar uma amostra aleatória simples $(X_1, ..., X_n)$, *tem*

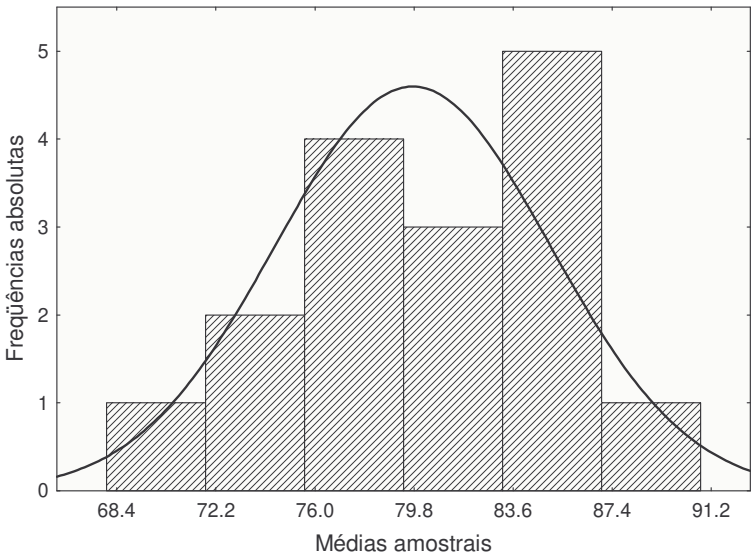


Figura 6.5: Histograma da distribuição amostral das médias para amostras de tamanho 2

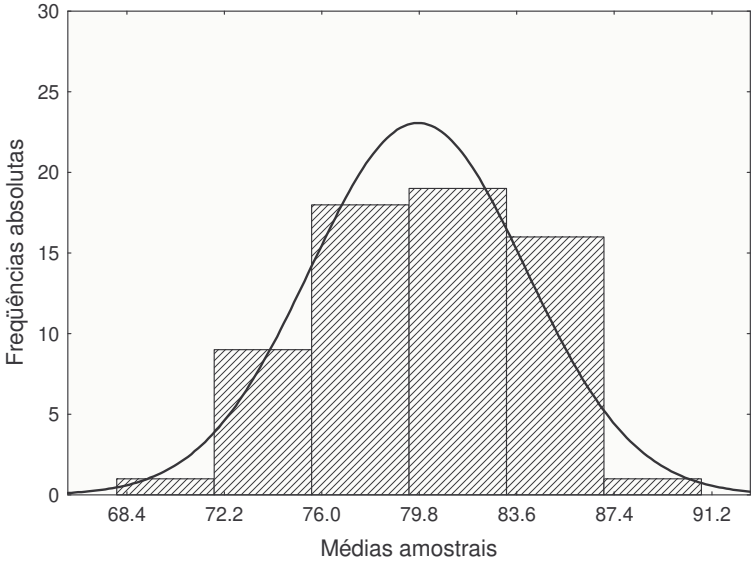


Figura 6.6: Histograma da distribuição amostral das médias para amostras de tamanho 3

distribuição normal com média μ e variância σ^2, a distribuição amostral das médias também será normal, para qualquer tamanho de amostra, com média μ e variância σ^2/n;

Passamos agora a analisar o comportamento dos histogramas das médias para várias distribuições de X, quando vamos aumentando o tamanho da amostra. Na figura 6.7 têm-se os histogramas correspondentes à distribuição amostral das médias relativas a 3 diferentes distribuições: Poisson, Uniforme e Bimodal.

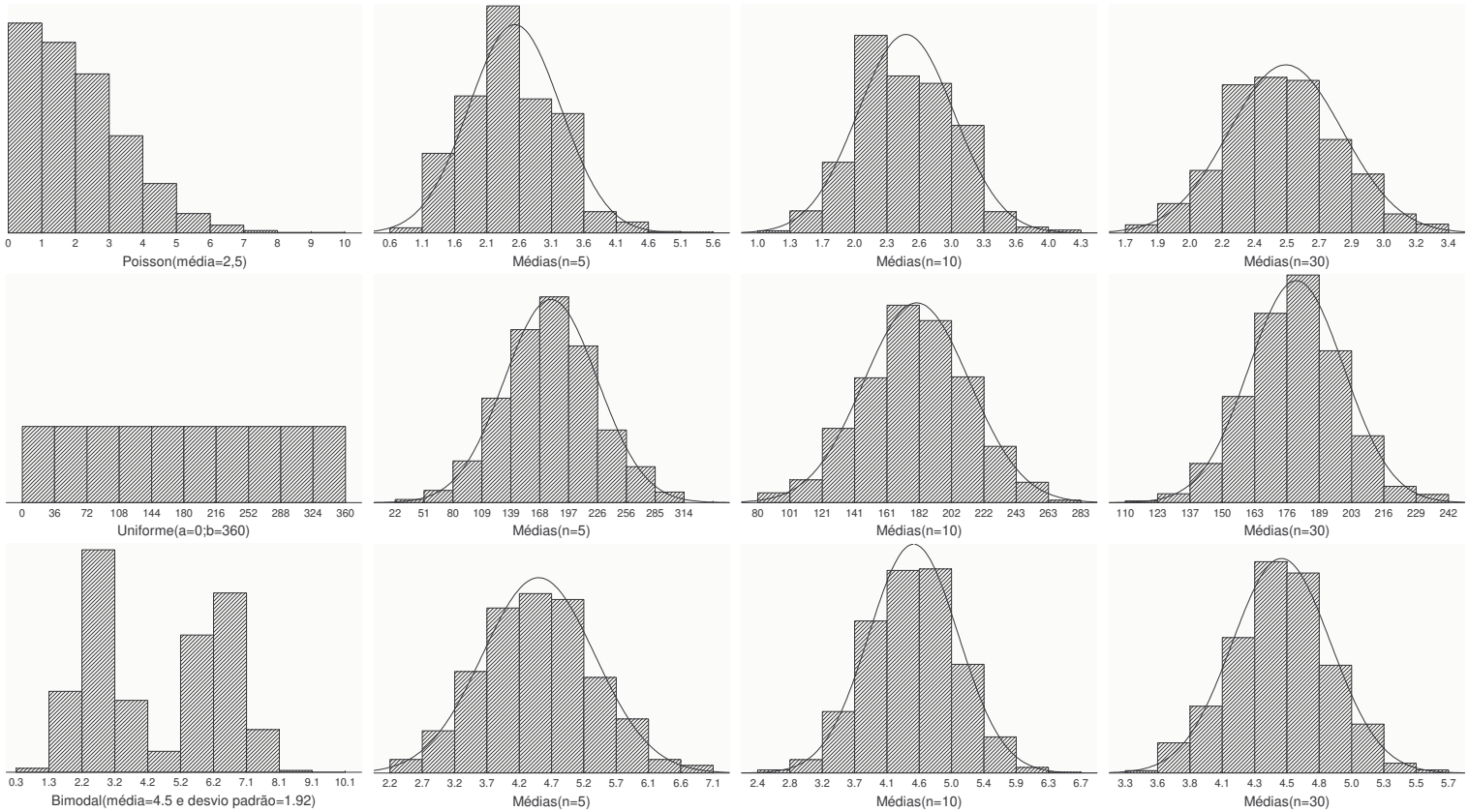


Figura 6.7: Histogramas da distribuição amostral das médias para três populações(Poisson, Uniforme e Bimodal) e para três tamanhos de amostras(n=5, n=10 e n=30)

Os exemplos da figura 6.7, nos indicam que quando o tamanho da amostra vai aumentando, independente da distribuição da variável aleatória X, a distribuição amostral das médias aproxima-se cada vez mais de uma distribuição normal, com média igual a média populacional (2,5 para a distribuição de Poisson, 180 para a Uniforme e 4,5 para a Bimodal) e variância decrescente. A rapidez dessa convergência depende da distribuição da população original da qual a amostra é retirada. Se a população original é uniforme, sua convergência é rápida. Já, se a distribuição da população tem a forma bimodal ou assimétrica, essa convergência é mais demorada. Este resultado, fundamental na teoria de inferência estatística, é conhecido como *teorema central do limite*. Esse teorema diz o seguinte:

- se a população sobre a qual desejamos selecionar uma amostra aleatória simples $(X_1, ..., X_n)$, tem uma distribuição qualquer com média μ e variância σ^2, a distribuição amostral das médias será aproximadamente normal com média μ e variância σ^2/n, para amostras suficientemente grandes. Como sugestão, aceita-se que para amostras com mais de 30 observações a aproximação já pode ser considerada muito boa.

Em muitas das situações práticas com n grande e n/N pequeno, o teorema central do limite também se aplica quando a amostragem é sem reposição.

Exemplo 1. Suponha que o peso dos 35.000 alunos da UFSC, matriculados no primeiro semestre de 2005, é normalmente distribuído com média de 60,5 kg e desvio padrão de 12 kg.
a) Qual será a média e o desvio padrão da distribuição amostral da média, na hipótese de utilizar amostras de tamanho $n = 36$ sem reposição?
b) Qual é a probabilidade da média de uma amostra de tamanho $n = 36$ se encontrar entre 58 e 62 kg?
c) e abaixo de 55 kg? e
d) e acima de 65 kg?
Resolução:
a) A média e o desvio padrão da distribuição amostral valem:

$$\mu_{\bar{X}} = 60,5\ kg \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2\ kg.$$

pois $(35.000 - 36)/(35.000 - 1) \cong 1$, não necessitando da correção para população finita.
b) A probabilidade vale:

$$z_1 = \frac{58 - 60,5}{2} = -1,25 \quad z_2 = \frac{62 - 60,5}{2} = 0,75.$$

$$\begin{aligned} P(58 \leq \bar{X} \leq 62) &= P(-1,25 \leq z \leq 0,75) \\ &= 0,39435 + 0,27337 \\ &= 0,6677. \end{aligned}$$

c) A probabilidade vale:

$$z = \frac{55 - 60,5}{2} = -2,75$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 55) &= P(z < -2,75) \\ &= 0,0030. \end{aligned}$$

d) Aprobabilidade vale:

$$z = \frac{65 - 60,5}{2} = 2,25$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > 65) &= P(z > 2,25) \\ &= 0,0122. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Uma nova ração para aumento de peso deve ser aplicada a uma amostra aleatória de 25 frangos ($n = 25$), de um grande lote (o lote é a população). Supondo que o desvio padão (σ) do ganho de peso no período de um mês seja de 2 kg, qual a probabilidade de que a média dessa amostra ($\bar{X}$) difira da média de todo o lote (μ) em 0,5 kg ou mais ($\mid \bar{X} - \mu \mid \geq 0,5$)? considerando que os frangos tratados com a nova ração não tem um ganho de peso maior do que os tratados com a ração padrão.

Inicialmente, passamos a calcular o valor da variável z.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{0,5}{2/\sqrt{25}} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25.$$

Portanto, a probabilidade pedida vale (lembre do módulo):

$$\begin{aligned} P(z \leq -1,25) + P(z \geq 1,25) &= 2P(z \geq 1,25) \\ &= 0,2112. \end{aligned} \tag{6.2}$$

A probabilidade de $\bar{X}$ diferir de μ em mais do que 0,5 kg, devido ao acaso, é de 21,12%.

Exercícios resolvidos

1. O governo coleta uma amostra aleatória de 400 estudantes da UFSC, para obter uma indicação dos que são a favor do ensino superior pago. Determine a probabilidade de

obter uma proporção amostral que difira por mais de 3 pontos percentuais da proporção populacional de estudantes que são a favor do ensino pago, se esta proporção é 10%.

$$\begin{aligned} Prob(0,07 \leq P \leq 0,13) &= Prob\left(\frac{0,07-0,10}{\sqrt{\frac{0,10(0,90)}{400}}} \leq z \leq \frac{0,13-0,10}{\sqrt{\frac{0,10(0,90)}{400}}}\right) \\ &= Prob(-2 \leq z \leq 2) = 0,9545. \end{aligned}$$

Portanto, a resposta é 1-0,9545=0,0455 ou 4,55%.

2. Os camarões machos da espécie *Penaeus paulensis* para serem considerados adultos devem apresentar um comprimento total maior ou igual a 22 mm. Se numa população de camarões machos, a média dos comprimentos foi igual a $\mu = 27,3mm$ e desvio padrão $\sigma = 7,8mm$, portanto, considerada como sendo uma população adulta. Pergunta-se:
a) Qual a probabilidade de, para uma amostra de $n = 35$ camarões, obtermos uma média $\bar{X} < 22mm$?
b) Qual deve ser o valor para a média do comprimento total, μ, a fim de que a $P(\bar{X} \leq 22) = 0,05$ *ou* 5%?
a)

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 22) &= P\left(z < \frac{22-27,3}{7,8/\sqrt{35}}\right) = P(z < -4,02) \\ &= 0,5 - 0,49997 = 0,00003 \text{ } ou \text{ } 0,003\%. \end{aligned}$$

b) Para uma área de 5%, no lado esquerdo da curva, o valor de z é -1,645.

$$-1,645 = \frac{22-\mu}{1,3184} \Rightarrow \mu = 24,1688mm.$$

6.5 Exercícios Propostos

1. Se vamos extrair amostras de n=100 observações de uma população muito grande, em que a proporção populacional é 20%, que percentagem de proporções amostrais poderemos esperar nos intervalos?
a) 16% a 24%
b) maior que 24%.

2. A proporção de estômatos da epiderme abaxial da folha de macieira da variedade M-9 com tamanho acima de um determinado valor é $\pi = 0,12$ *ou* 12%. Extraída uma amostra de 35 folhas, qual a probabilidade de que a proporção esteja entre 8% e 13%?

3. Sabe-se que 46% de peixes *Xenomelaniris brasiliensis*, na localidade da praia da Barra da Lagoa, Florianópolis, apresentam comprimento total acima de 50mm. Qual é a probabilidade de uma amostra aleatória com 35 peixes apresentar mais que 53% ou menos que 40% de peixes com comprimento total acima de 50 mm?

4. Um distribuidor de sementes determina, através de testes, que 5% das sementes não germinam. Ele vende pacotes de 200 sementes com garantia de 90% de germinação. Qual a probabilidade de um pacote não satisfazer a garantia?

5. Os níveis de glutationa na região do cerebelo em ratos apresentam média de 1,7μM e desvio padrão de 0,4μM. Os níveis de glutationa de uma amostra de 8 ratos foram mensurados. A média da amostra é usada para decidir se os ratos estão estressados. Aplica-se a seguinte regra de decisão: se o nível de glutationa da amostra de 8 ratos é igual ou maior do que 2,0 μM os ratos são considerados estressados. Qual a probabilidade de se considerar os ratos como estressados?

6. Suponha que o rendimento de milho, em kg/ha, no Oeste Catarinense, é uma variável normalmente distribuída, com média de 7069 kg/ha e desvio padrão de 593,15 kg. Que valores espera-se encontrar para a média e o desvio padrão da distribuição amostral das médias, na hipótese de utilizar amostras de tamanho n=36? Qual é a probabilidade da média de uma amostra se encontrar: a) entre 6809 e 7395 kg/ha; b) abaixo de 6816 kg/ha; c) acima de 7389 kg/ha.

7. O número de hemócitos/μl de hemolinfa (THC) em fêmeas de camarão *Macrobrachium rosemberguii* é normalmente distribuída com média (μ) de 18.000 e desvio padrão (σ) de 5125. Em uma amostra aleatória de $n = 30$ fêmeas, qual a probabilidade de que o número médio de hemócitos/μl de hemolinfa (THC) seja maior do que 19.000?

8. O número de estômatos da epiderme abaxial em áreas aleatórias de 0,24 mm^2 de macieira da variedade M9 é normalmente distribuída com média $\mu = 159,8$ e desvio padrão de $\sigma = 34,5582$. Em uma amostra aleatória de $n = 35$ folhas, qual a probabilidade de que o número médio de estômatos seja menor do que 140?

9. Uma variável aleatória X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10. a) Qual a $P(90 < X < 110)$? b) Se $\bar{X}$ é a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \bar{X} < 110)$.

10. A proporção esperada de filhotes machos de tartaruga *Caretta caretta* conhecida como cabeçuda é de 0,50. Uma fêmea desta espécie bota 200 ovos numa determinada praia. a) Qual a probablidade da proporção amostral de machos, nesta ninhada, estar entre 0,48 e 0,53?

b) Se a proporção de nascimentos de machos for maior do que 0,60 pode indicar algum

desequilíbrio ambiental, como, por exemplo, sombreamento da praia. Qual a probabilidade disso ocorrer?

7 Estimação dos Parâmetros

7.1 Introdução

Estimação é o nome técnico para o processo que consiste em utilizar os dados de uma amostra para avaliar parâmetros populacionais desconhecidos, ou, como o próprio nome indica, estimar os mesmos. Dentre as diversas características (parâmetros) de uma população que podem ser estimadas, nós vamos estudar as mais utilizadas, quais sejam: *a média*(μ), *a proporção*(π) e a *variância*(σ^2).

Um pesquisador sempre está desenvolvendo um processo de estimação. Por exemplo, um Biólogo pode estar interessado na proporção de micronúcleos em 5000 células sanguíneas em peixes do genêro bagre; um Agrônomo pode estar interessado na produção média de uma cultura. Outros exemplos, os prejuízos causados pelo ataque de uma praga ou doença; o diâmetro de caramujos; o tamanho de Lulas encontradas no trato digestivo de Atuns; tamanho de crustáceos da classe Malacostraca e sub-classe Eumalacostraca, popularmente conhecida com o nome de Caprelas; parâmetros estatísticos genéticos (variância genética, ambiental, fenotípica).

Os resultados estatísticos apresentados neste capítulo têm um papel fundamental para os pesquisadores, no sentido de responder aos objetivos do trabalho.

7.2 Propriedades dos Estimadores

Um *estimador* é uma estatística que será usado para a estimação de um parâmetro populacional. Os estimadores mais freqüentes são a média, a proporção e a variância amostrais, representados por: $\bar{X}$, P e S^2, respectivamente, utilizados para estimar os parâmetros μ, π e σ^2, respectivamente. É desejável que os estimadores apresentem certas propriedades, ou seja, certas qualidades. Dentre as propriedades desejáveis de um estimador podemos citar:

- *não-tendencioso ou não-viesado*, quer dizer, a média da sua distribuição amostral é igual ao parâmetro populacional que desejamos estimar. Em termos formais, temos que: para θ e $\hat{\theta}$, o parâmetro e o estimador de uma característica qualquer, respectivamente, a não tendenciosidade implica que $E(\hat{\theta}) = \theta$, isto é, sua média deve ser igual ao parâmetro. Por exemplo, $E(\bar{X}) = \mu$ e $E(P) = \pi$;

- *precisão*, quer dizer, deseja-se que o estimador seja altamente concentrado, isto é, que

tenha pequena variância amostral (cada observação próxima da média de todas as observações).

- *acurácia*, quer dizer, que o estimador seja o mais próximo possível do parâmetro, isto é, que o erro amostral, $e = \hat{\theta} - \theta$, seja o menor possível. Cada observação o mais próximo do parâmetro.

O exemplo a seguir, tirado de Bussab & Morettin (1987), serve bem para ilustrar as propriedades de um estimador. No exemplo, supõe-se que desejamos comprar um rifle e, dentre muitos, foram selecionados 4 deles, denominados de A, B, C e D. Com o objetivo de testá-los, foram dados 15 tiros com cada um deles. A representação gráfica é dada na figura 7.1. Com o objetivo de selecionar uma arma dentre as quatro, devemos adotar alguns critérios. Os rifles B e D são viesados, isto é, os tiros estão deslocados do alvo, além disso, o rifle B tem pouca precisão. O rifle A não é viesado, porém, apresenta baixa precisão, isto é, os tiros estão muito espalhados. Os rifles A, B e D apresentam baixa acurâcia, isto é, os tiros não acertam o alvo. De acordo com esses critérios o rifle selecionado seria o C, pois ele é não-viesado, com boa precisão e acurâcia.

Como já vimos, os estimadores $\bar{X}$ e P são não-tendenciosos para os parâmetros μ e π, respectivamente. Para o parâmetro σ^2 um estimador não-tendencioso é a variância amostral dada por:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

Podemos notar que a divisão é feita por $n-1$ e não por n, como seria esperado. A divisão por n forneceria um estimador tendencioso, como podemos verificar com os dados das duas últimas colunas da tabela 6.4.

$$E(S^2) = \frac{72,0 + 128,0 + ... + 0,0 + 0,0}{16} = 52,18 = \sigma^2$$

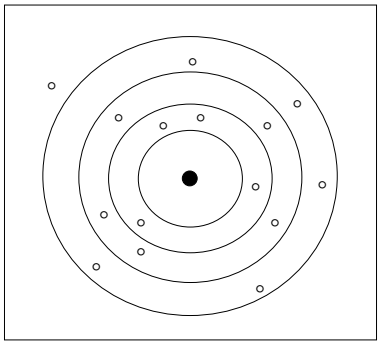
usando $n - 1 = 2 - 1 = 1$ no denominador do cálculo das variâncias amostrais, e

$$E(S^2) = \frac{36,0 + 64,0 + ... + 0,0 + 0,0}{16} = 26,09 \neq \sigma^2$$

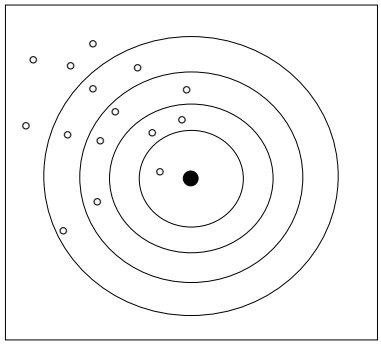
usando $n = 2$ no denominador do cálculo das variâncias amostrais.

Nas situações onde temos dois estimadores T_1 e T_2 não-tendenciosos para o mesmo parâmetro θ, e desejamos decidir por um deles, podemos utilizar o conceito de eficiência relativa definida por:

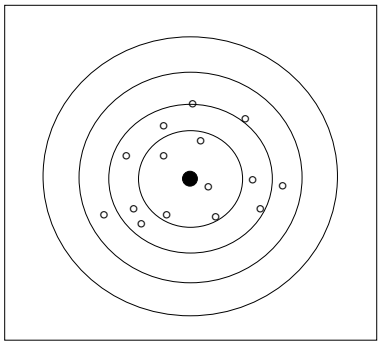
$$EF(T_1|T_2) = \frac{Var(T_1)}{Var(T_2)}.$$



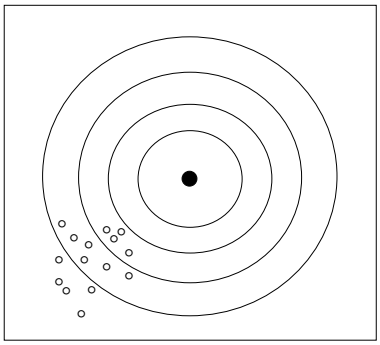
(a) Rifle A: não-viesado, pouca precisão, pouca acurâcia



(b) Rifle B: viesado, pouca precisão e pouca acurâcia



(c) Rifle C: não-viesado, boa precisão e acurâcia



(d) Rifle D: viesado, boa precisão e baixa acurâcia

Figura 7.1: Resultados de 15 tiros dos rifles A, B, C e D (ilustração das propriedades dos estimadores). Fonte: Bussab & Morettin (1987).

Dizemos que T_2 é mais eficiente do que T_1 se $EF(T_1|T_2)$ for maior do que 1. Por exemplo, para estimar a média populacional, para uma variável aleatória com distribuição normal, a média $\overline{X}$ e a mediana Md amostrais são dois estimadores não-tendenciosos e pode-se mostrar que

$$EF(Md|\overline{X}) = \frac{Var(Md)}{Var(\overline{X})} = \frac{(\pi/2)(\sigma^2/n)}{\sigma^2/n} = \frac{\pi}{2} = 1,57,$$

indicando que a média amostral é 57% mais eficiente do que a mediana amostral como estimador da média da população.

7.3 Métodos para Encontrar Estimadores

Se desejamos estimar a proporção populacional π, é intuitivo pensarmos em utilizar a proporção amostral como estimador. O mesmo valeria para a estimação da média populacional. Porém, existem situações que não se tem uma indicação tão clara de qual estimador é que deve ser usado. Por exemplo, um experimento foi instalado de acordo com o delineamento inteiramente casualizado. Neste delineamento as unidades experimentais são as mais homogêneas possíveis, portanto, espera-se que a variação seja devida ao fator em estudo. Como exemplos de fatores de interesse podemos citar: locais, variedades, espécies, dietas, etc. O modelo matemático desse delineamento é dado por:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij}$$

onde y é a característica que estamos interessados, por exemplo, comprimento do corpo de um animal; μ é uma média geral; τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator em estudo e ϵ são variações aleatórias que ocorrem no experimento não devidas ao fator de estudo. O pesquisador tem interesse em estimar os parâmetros μ e τ. Para estimar μ, uma sugestão é usar a média geral do experimento ($\bar{Y}$). Para estimar τ, o que devemos usar? Demonstra-se que um estimador do i-ésimo nível do fator em estudo é dado por:

$$\hat{\tau_i} = \bar{Y_i} - \hat{Y}.$$

Faz-se então necessário a existência de métodos apropriados para a obtenção de estimadores dos parâmetros que possam ser de interesse. Os três métodos mais utilizados são: 1) *método da máxima verossimilhança* e 2) *método dos momentos* e 3) *método dos mínimos quadrados* . Vamos apresentar o método da máxima verossimilhança.

7.3.1 Método da Máxima Verossimilhança

Suponha, por exemplo, que dentre $n = 3$ sementes em teste, obtemos 2 sucessos (duas sementes germinaram) e 1 fracasso (uma semente não germinou). Vamos considerar que a probabilidade de uma semente germinar é π, onde $0 \leq \pi \leq 1$. Vamos definir a variável X como sendo o número de sementes que germinaram. O que devemos utilizar como estimador de π? Este é um experimento binomial (verifique as pressuposições do modelo binomial), e a sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}.$$

Para $n = 3$ e $k = 2$, temos:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \pi^2 (1 - \pi)^1 = 3\pi^2(1 - \pi).$$

Vamos chamar esta expressão de *função de máxima verossimilhança* representada por:

$$L(\pi) = 3\pi^2(1 - \pi). \tag{7.1}$$

O estimador de máxima verossimilhança de π é o valor P que maximiza a função 7.1. Do Cálculo Diferencial sabemos que o valor desejado é aquele que anula a primeira derivada e faz com que a segunda derivada seja negativa, apresentamos a seguir a primeria derivada de $L(\pi)$ em relação a π:

$$\begin{aligned} L^{'}(\pi) &= 2\pi(1 - \pi) + \pi^2(-1) \\ &= 2\pi(1 - \pi) - \pi^2 \\ &= 2\pi - 2\pi^2 - \pi^2 \\ &= 2\pi - 3\pi^2 \\ &= \pi(2 - 3\pi) \end{aligned}$$

do que segue que $p = 0$ ou $p = 2/3$, pois são os dois valores que anulam a primeira derivada. É fácil ver que o valor que maximiza a função de máxima verossimilhança é $p = 2/3$, basta substituir o valor de π em 7.1 por esses dois valores de p, onde obtemos:

$$L(0) = 3(0)^2(1 - 0) = 0.$$

$$L(2/3) = 3(2/3)^2(1 - (2/3)) = 0,44.$$

A derivada segunda, em relação a π, fica:

$$(2 - 3\pi) + \pi(-3) \quad \rightarrow \quad 2 - 6(\pi).$$

Da segunda derivada podemos ver que, substituindo-se π por $p = 2/3$, temos:

$$2 - 6(2/3) = -2$$

assim, como a segunda derivada é negativa, temos que $p = 2/3$ é ponto de máximo.

De modo geral, o estimador de máxima verossimilhança é o valor do parâmetro de interesse que maximiza uma função, denominada função de máxima verossimilhança, que é obtida a partir dos dados e a função de probabilidade associada aos mesmos.

7.4 Estimativas Pontuais e Intervalares

De modo geral, vamos supor que os valores da população se distribuem segundo um dado modelo probabilístico, cujos parâmetros são desconhecidos e, portanto, precisam ser estimados. Lembramos que os estimadores possuem as suas correspondentes distribuições amostrais.

Na estimação por ponto, procede-se a estimação do parâmetro através de um único valor. A obtenção dos estimadores $\bar{X}$, P e S é feita de forma direta, aplicando as definições de média aritmética, proporção e desvio padrão aos dados da amostra, tomando-se o cuidado de que para o cálculo do desvio padrão usa-se $n-1$ no denominador. Assim, uma estimativa pontual da média populacional, μ, é a média aritmética da amostra, $\bar{x} = (\sum x)/n$. Uma estimativa da proporção populacional , π, é obtida através do cálculo da proporção na amostra, dada por: $p = n_1/n$, onde n_1 é o número de elementos na amostra que possuem determinada característica desejada e n é o número total de elementos na amostra. Como estimativa do desvio padrão populacional, σ, usa-se o desvio padrão da amostra, s, dado por: $s = \sqrt{\sum(x - \bar{x})^2/(n-1)}$.

Por outro lado, na estimação por intervalo, encontramos um limite inferior e um limite superior, os quais vão formar um intervalo de valores, dentro do qual esperamos, com certo grau de confiança, que o verdadeiro valor do parâmetro esteja incluído.

O intervalo de confiança é muito mais informativo do que uma estimativa através de um único valor. Pois, no intervalo, além de termos a informação pontual, também temos uma boa idéia da variabilidade do parâmetro. Devido a grande importância dos intervalos de confiança passamos, agora, a estudá-los com mais detalhes.

7.4.1 Intervalos de Confiança

Como já tivemos a oportunidade de estudar, o processo de obtenção de amostras aleatórias produz estimativas cujos valores são diferentes do parâmetro populacional, e também diferentes entre si, gerando, o que denominamos de variabilidade amostral da estatística. A variabilidade amostral é estudada através das distribuições amostrais. Nós já estudamos no capítulo 6, as distribuições amostrais da média e da proporção, portanto, conhecemos o modelo probabilístico, a média e a variância das mesmas.

Devido a variabilidade amostral, é importante que se faça uma estimativa intervalar para um parâmetro populacional. Essa estimativa intervalar nos dá um intervalo dentro do qual esperamos, com um alto grau de confiança, que o parâmetro se encontre.

Para compreendermos o processo de construção de um intervalo de confiança, vamos supor que tenhamos coletado uma amostra de 35 estudantes de graduação do curso de Ciências Biológicas, e observamos a idade média de 23 anos. A questão que nos vem em mente é a seguinte: será que este valor de $\bar{x} = 23$ anos está próximo do verdadeiro valor (μ), desconhecido, isto é, próximo da média de idade de todos os alunos do curso?

Para responder a esta pergunta, nós devemos levar em consideração a distribuição amostral da média. Do estudo sobre distribuições amostrais, vimos que a distribuição amostral das médias é normal ou aproximadamente normal na maioria das situações práticas, para um tamanho de amostra suficientemente grande.

Sendo normal, simétrica em torno da média μ, sabemos que 68% das médias amostrais estão a menos de 1 desvio padrão de cada lado da média da distribuição amostral, que é igual a média da população, μ. Vejamos os cálculos.

$$\begin{aligned}
P(-1 \leq Z \leq 1) &= P\left(-1 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1\right) = 68\% \\
&= P\left(-1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 68\% \\
&= P\left(-\mu - 1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq -\mu + 1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 68\% \\
&= P\left(\mu - 1\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 68\%.
\end{aligned}$$

A figura 7.2 mostra os resultados. Observamos que 32% das médias amostrais estarão afastadas mais do que 1 desvio padrão da média verdadeira(μ). Assim, se afirmarmos que a média de uma amostra se afasta menos do que 1 desvio padrão da média, a partir da média verdadeira, podemos esperar estar certos 68% das vezes e, consequentemente, errados 32% das vezes. Vimos, por construção que:

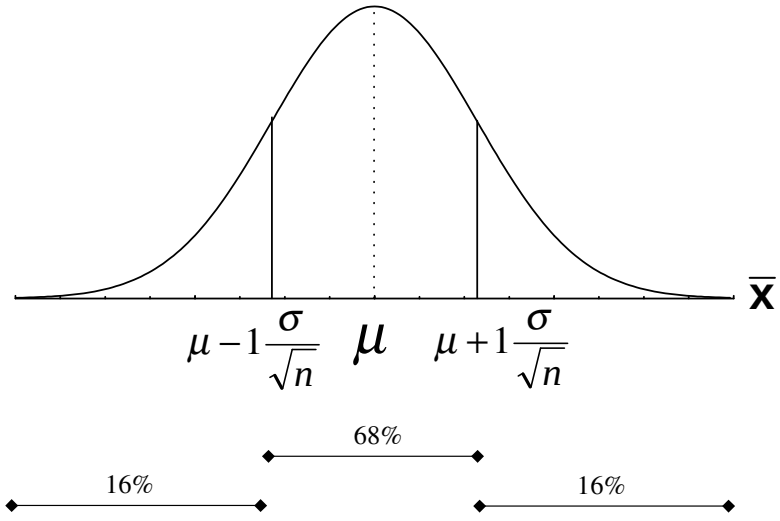


Figura 7.2: Intervalo para uma média com 68% de confiança

$$P(\mu - 1\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X} \leq \mu + 1\sigma/\sqrt{n}) = 68\%.$$

Desejamos um intervalo de confiança para a média verdadeira, μ, portanto, podemos reescrever a desigualdade entre parênteses, da seguinte forma:

$$P(\bar{X} - 1\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1\sigma/\sqrt{n}) = 68\%.$$

Podemos afirmar, com uma confiança de 68%, que a verdadeira média está entre $\bar{X} \pm 1\sigma/\sqrt{n}$.

Sabemos também, que 95% das médias amostrais, estarão a menos de 1,96 desvios padrões de cada lado da média da distribuição amostral, $\mu_{\bar{X}} = \mu$. Vejamos os cálculos.

$$\begin{aligned}
P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) &= P\left(-1,96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1,96\right) = 95\% \\
&= P\left(-1,96\frac{-\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\% \\
&= P\left(-\mu - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq -\mu + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\% \\
&= P\left(\mu - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 95\%.
\end{aligned}$$

A figura 7.3 mostra os resultados. Aqui, cerca de 5% da médias estarão a mais de 1,96 desvios padrões da média verdadeira. Se fizermos a afirmativa de que a média de uma amostra está a menos de 1,96 desvios padrões da média, a partir da média verdadeira, podemos esperar estar certos 95% das vezes, conseqüentemente, errados 5% das vezes. Porém estamos interessados no intervalo de confiança para a média verdadeira, μ, portanto, vamos

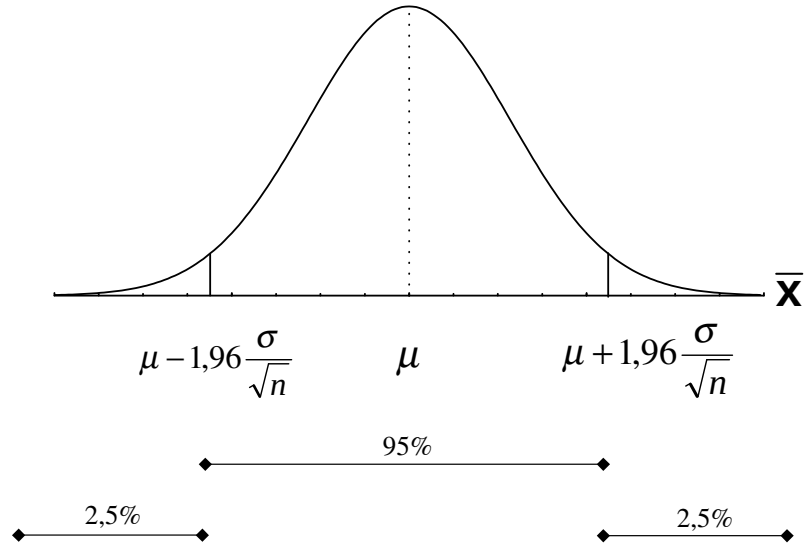


Figura 7.3: Intervalo para uma média com 95% de confiança

reescrever a desigualdade da seguinte forma:

$$P(\bar{X} - 1,96\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96\sigma/\sqrt{n}) = 95\%.$$

Temos 95% de confiança de que a média verdadeira encontra-se no intervalo $\bar{X} \pm 1,96\sigma/\sqrt{n}$.

A figura 7.4 mostra os resultados para um intervalo com 99% de confiança. Aqui, cerca de 1% das médias estarão a mais de 2,58 desvios padrões da verdadeira média. Se fizermos a afirmativa de que a média amostral está a menos de 2,58 desvios padrões da verdadeira média, podemos esperar estar certos 99% das vezes e, conseqüentemente, errados 1% das vezes. Neste caso, o intervalo de confiança é dado por: $\bar{X} \pm 2,58\sigma/\sqrt{n}$.

Na verdade, nós nunca saberemos se uma média amostral está bem próxima, ou bem afastada da média verdadeira, sendo assim, só é possível construirmos um intervalo de confiança, dentro do qual esperamos que o verdadeiro valor da média populacional se encontre, com um certo grau de confiança.

Esse intervalo é chamado de intervalo de confiança, e a nossa confiança de estarmos certos é de $1 - (Probabilidade\ de\ erro)$, dada em porcentagem, e, por isso, chama-se de *nível de confiança*, representado pela letra grega γ (lê-se gama). A probabilidade de erro, $P(erro)$, denomina-se de *nível de significância* e representa-se pela letra grega α (lê-se alfa).

Do exposto, podemos estabelecer a forma do intervalo de confiança para a média populacional, considerando que a estatística $\bar{X}$ avaliada com os dados da amostra é $\bar{x}$.

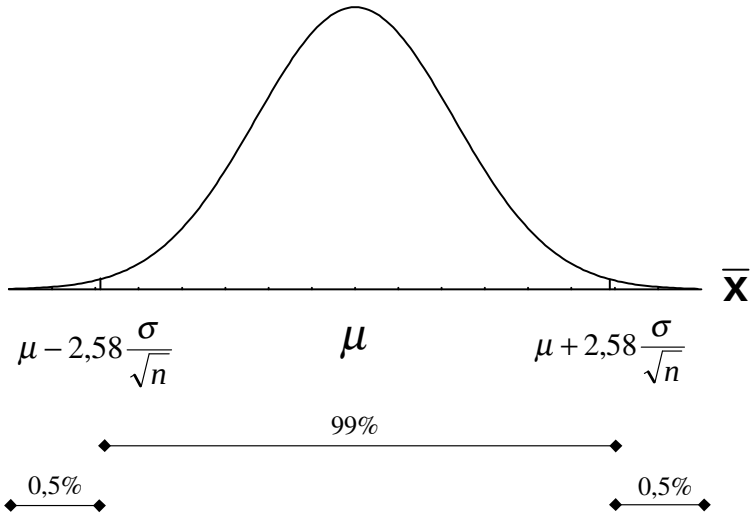


Figura 7.4: Intervalo para uma média com 99% de confiança

$$\text{I.C.}(\mu;\gamma): \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}.$$

Onde, $\bar{x}$ é a média da amostra; $z_{\alpha/2}$ é um valor obtido na tabela da distribuição normal padrão ao nível de significância α; $\sigma_{\bar{X}}$ é o desvio padrão da distribuição amostral da média ou erro padrão da média, calculado por: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Interpretação do Intervalo de Confiança

De uma população com a característica X de interesse do estudo, se retirarmos todas as amostras possíveis de tamanho n e, para cada uma das amostras, calcularmos o intervalo de confiança da forma: $\bar{x} \pm 1,96\sigma/\sqrt{n}$, então, 95% deles conterão o parâmetro populacional, μ. A representação gráfica do significado do intervalo de confiança é dada na figura 7.5.

Como vemos na figura 7.5, o intervalo pode ou não conter o parâmetro μ, mas, pelo exposto nesta seção, temos 95% de confiança de que o intervalo contenha o verdadeiro valor do parâmetro populacional.

Desse modo, tudo o que foi feito e dito aqui para o estimador $\bar{X}$ do parâmetro μ, é válido também para qualquer outro estimador (por exemplo: P, S).

7.4.2 Intervalo de Confiança para a Média da População

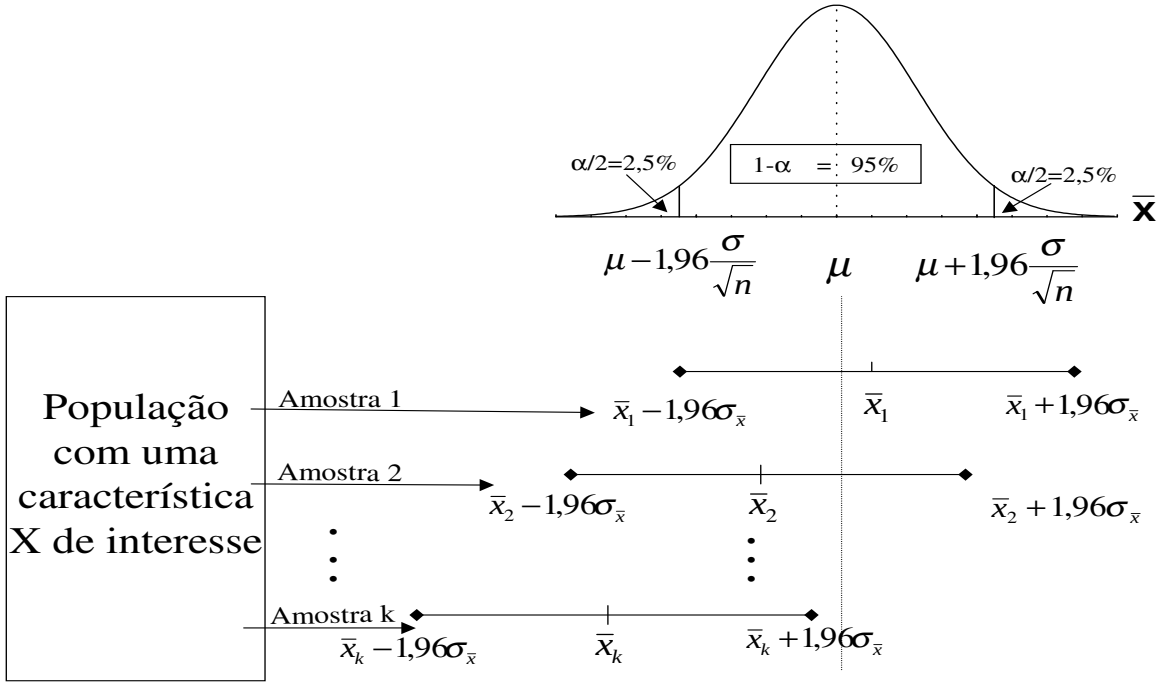


Figura 7.5: Interpretação de um intervalo de confiança para a média verdadeira, com confiança de 95% e variância conhecida

Vamos dividir o estudo do intervalo de confiança para a média da população, (μ), em dois casos:

- quando o desvio padrão da população (σ) é conhecido;
- quando o desvio padrão da população (σ) não é conhecido

Intervalo de Confiança para a Média Populacional Quando o Desvio Padrão da População é Conhecido

Para que o intervalo de confiança tenha validade, deve-se verificar a suposição de que a distribuição amostral das médias seja normal. Conforme vimos, isso é verdade se a variável X tem distribuição normal, caso contrário, será aproximadamente normal, se a amostra for suficientemente grande ($n > 30$).

Quando o desvio padrão populacional é conhecido, o intervalo de confiança para a média da população é dado por:

$$\boxed{\text{I.C.}(\mu;\gamma):\ \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}},} \tag{7.2}$$

onde, $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Exemplo 1. A distribuição dos pesos de pacotes de sementes de milho, enchidos automaticamente por uma certa máquina, é normal, com desvio padrão (σ) conhecido e igual a 200 g. Uma amostra de 15 pacotes retirada ao acaso apresentou os seguintes pesos, em kg,

20,05	20,10	20,25	19,78	19,69	19,90	20,20
19,89	19,70	20,30	19,93	20,25	20,18	20,01
20,09						

Construir os intervalos de 95% e 99% de confiança para o peso médio dos pacotes de sementes de milho.

Os valores da média e do desvio padrão da média são:

$$n = 15 \quad \bar{x} = 20,02 \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{0,20}{\sqrt{15}} = 0,0516.$$

Como a população conceitualmente é infinita (formada pelos pacotes enchidos e que virão a ser enchidos), não é necessário fazermos a correção no desvio padrão. Assim, o intervalo de confiança, fica:

$$\begin{aligned} I.C.(\mu; 95\%) &: 20,02 \pm 1,96(0,0516) \\ &: 20,02 \pm 0,1012 \\ &: 19,92 \leq \mu \leq 20,12. \end{aligned}$$

Portanto, temos 95% de confiança, de que a média da população esteja entre os pesos 19,92 e 20,12 kg/pacote.

O intervalo com confiança de 99% fica:

$$\begin{aligned} I.C.(\mu; 99\%) &: 20,02 \pm 2,58(0,0516) \\ &: 20,02 \pm 0,1332 \\ &: 19,89 \leq \mu \leq 20,15. \end{aligned}$$

Podemos afirmar, com 99% de confiança, de que a média da população está entre os pesos 19,89 e 20,15 kg/pacote.

Intervalo de Confiança para a Média Populacional Quando o Desvio Padrão da População é Desconhecido

Na maioria das situações práticas, o desvio padrão da população, σ, não é conhecido, usa-se, nesse caso, o desvio padrão da amostra, s, como estimativa do desvio padrão populacional, substituindo-se nas fórmulas, σ por s.

Esta substituição pura e simples, no intervalo de confiança dado em 7.2, causa uma alteração no nível de confiança quando o tamanho da amostra é pequeno ($n < 30$), isto é, o pesquisador pensa que está trabalhando com um nível de confiança, por exemplo, de 95%, quando, na realidade, o nível de confiança é menor, portanto, deve-se ampliar o intervalo. Como é feito esse ajuste? Sabemos que a média tem distribuição normal com média μ e desvio padrão $\sigma/\sqrt{n}$, logo, quando conhecemos σ, a estatística

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

terá distribuição normal padrão com média 0 (zero) e variância 1 (um) e representa-se por: $Z \sim N(0, 1)$. E, assim, usamos esse modelo para resolvermos o nosso problema de estimação. Porém, quando usamos o desvio padrão da amostra, S, no lugar do desvio padrão da população, σ, obteremos uma nova estatística, denominada de estatística t, dada por:

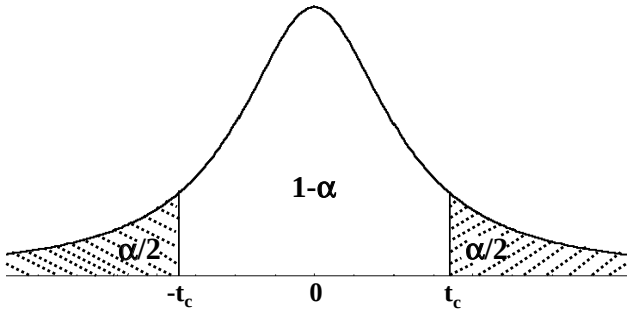
$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Essa estatística t tem distribuição t de Student[11] com $(n - 1)$ graus de liberdade[12]. Assim como a distribuição normal, ela é simétrica, com média zero, porém, apresenta maior variabilidade nos extremos da distribuição. Quando o n é suficientemente grande, o desvio padrão da amostra, S, aproxima-se do desvio padrão da população, σ, e as correspondentes distribuições também aproximam-se. Na figura 7.6 podemos verificar a forma da distribuição das estatísticas t e Z. A principal diferença entre as duas distribuições é que a distribuição t tem maior área nas extremidades, isto é, ela é mais dispersa, devido ao uso do desvio padrão amostral, S. Isso significa que, para um dado nível de confiança, o valor de t será um pouco maior que o correspondente valor de Z, ampliando o intervalo.

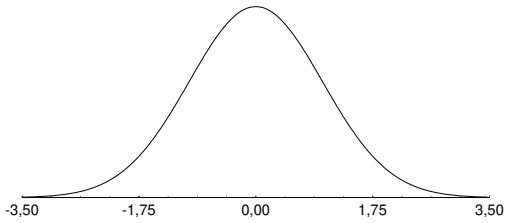
Um intervalo de confiança para a média, quando usamos o desvio padrão da amostra é

[11] O criador da distribuição t de Student foi W. S. Gossett, o qual adotou o pseudônimo de Student (século XX). Posteriormente essa distribuição foi estudada por Ronald A. Fisher.

[12] Wonnacott & Wonnacott (1981), página 186, explicam graus de liberdade da seguinte forma: numa amostra de n observações, existem n graus de liberdade; para calcularmos o desvio padrão, precisamos calcular os desvios em torno da média, $(X_i - \bar{X})$, os primeiros $n - 1$ resíduos são livres, porém, o último fica completamente determinado pela condição $\Sigma(X_i - \bar{X}) = 0$. Exemplo, consideremos uma amostra de 2 observações, 21 e 15. Como $\bar{X} = 18$, os resíduos são 3 e -3, o segundo resíduo sendo necessariamente o negativo do primeiro. Enquanto o primeiro resíduo é livre, o segundo é estritamente determinado, logo, há apenas um grau de liberdade.



(a) Distribuição t de Student



(b) Distribuição normal padrão

Figura 7.6: Forma das distribuições t de Student e normal padrão

dado pela equação:

$$\text{I.C.}(\mu;\gamma):\bar{x} \pm t_{n-1;\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \tag{7.3}$$

onde $\bar{x}$ e s são a média e o desvio padrão da amostra, respectivamente; n é o tamanho da amostra; γ é o nível de confiança; α é o nível de significância e t é um valor de tabela da distribuição t de Student, obtido com $n-1$ graus de liberdade e nível de significância α.

A distribuição t só é teoricamente adequada quando a variável em estudo apresentar distribuição normal. Na prática, quando n aumenta, indo além de 30 observações, a necessidade de admitir normalidade diminui.

Uso da Tabela da Distribuição t

No apêndice 4, temos a tabela da distribuição de Student. A distribuição t de Student é ligeiramente diferente para cada amostra, ou seja, ela é dependente do tamanho da amostra. Para obter um valor de t precisamos de duas informações: 1) o nível de significância desejado, isto é, a probabilidade de erro e 2) o número de graus de liberdade, isto é, o tamanho da amostra menos um, $(n-1)$. Por exemplo, para $\alpha = 0,05$ e $n = 28$, portanto, 27 graus de liberdade, o valor de t é 2,052. Encontre este valor na tabela.

Nota-se que esta tabela esta disposta de forma diferente da tabela da distribuição normal padrão. As áreas (probabilidades) estão na primeira linha da tabela e não no corpo da tabela e, observe que estas áreas correspondem ao nível de significância (α); os valores de t estão no corpo da tabela e os graus de liberdade estão relacionados na primeira coluna (margem esquerda).

Exemplo 1. O peso médio, ao nascer, de bezerros da raça Ibagé, examinada uma amostra de 20 partos, foi de 26 kg com um desvio padrão de 2 kg. Dê a estimativa por intervalo do verdadeiro peso médio utilizando um nível de confiança de 95% ($\alpha = 5\%$).

Da tabela da distribuição t obtemos $t_{19;0,05} = 2,093$. O intervalo de confiança fica:

$$\begin{aligned} I.C.(\mu; 95\%) &: 26 \pm 2,093\frac{2}{\sqrt{20}} \\ &: 26 \pm 0,936 \\ & 25,064 \leq \mu \leq 26,936. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Os resíduos industriais jogados nos rios, muitas vezes, absorvem o oxigênio necessário à respiração dos peixes e outras formas de vida aquática. Uma lei estadual exige um mínimo de 5 ppm de oxigênio dissolvido, a fim de que o conteúdo do mesmo seja suficiente para manter a vida aquática. Seis amostras de água retiradas de um rio revelaram os índices:4,9, 5,1, 4,9, 5,0, 5,0 e 4,7 ppm de oxigênio dissolvido. Construir o intervalo com 95% de confiança para a verdadeira média de oxigênio, em ppm, e interpretar.

A média e o desvio padrão da amostra valem: $\bar{x} = 4,9333$ e $s = 0,1366$. O valor tabelado de t, com 5 graus de liberdade e $\alpha = 0,05$ é 2,571. O intervalo de confiança fica:

$$\begin{aligned} IC(\mu; 95\%) &: 4,9333 \pm 2,571\frac{0,1366}{\sqrt{6}} \\ &: 4,9333 \pm 0,14337 \\ & 4,79 \leq \mu \leq 5,08. \end{aligned}$$

Podemos afirmar com 95% de confiança que a verdadeira média de oxigênio dissolvido está entre 4,79 e 5,08 ppm. Portanto, não podemos afirmar que o conteúdo de oxigênio dissolvido é suficiente para manter a vida aquática.

7.4.3 Intervalo de Confiança para Uma Proporção Populacional

O intervalo de confiança para uma proporção populacional (π), é muito semelhante ao intervalo de confiança para uma média populacional com σ conhecido. A principal diferença está no desvio padrão da distribuição amostral das proporções, que é dado por:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}.$$

Assim, o intervalo de confiança é dado por:

$$\boxed{\text{I.C.}(\pi;\gamma): p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{\pi(1-\pi)}{n}}.} \tag{7.4}$$

Usamos z na expressão do intervalo de confiança, pois, como vimos, a proporção amostral, P, segue uma distribuição aproximadamente normal para n suficientemente grande e π próximo de 0,50, então,

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

tem distribuição normal com média 0 (zero) e variância 1 (um) e para $\alpha = 0,05$, temos:

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95.$$

Isso implica que, o intervalo de confiança para π, com 95%, é dado por:

$$p - 1,96\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \leq \pi \leq p + 1,96\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}.$$

Uma dificuldade encontrada para o cálculo do desvio padrão, é que precisamos saber o valor de π, o qual é desconhecido e desejamos estimá-lo. Sabemos que para uma amostra suficientemente grande, espera-se que a proporção amostral, P, seja próxima da verdadeira proporção, π. Além disso, vemos que ocorre uma compensação entre P e $(1-P)$. Portanto, na fórmula do desvio padrão, vamos substituir π pelo seu estimador P, a qual fica,

$$S_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}.$$

A expressão do intervalo de confiança, considerando a proporção estimada com os dados de uma amostra, é dada por:

$$\boxed{\text{I.C.}(\pi;\gamma): \text{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}.} \tag{7.5}$$

Chamamos a atenção que para determinar o intervalo de confiança de uma proporção não usamos a distribuição t de Student.

Exemplo 1. Em certo lago, uma amostra de 1000 peixes acusou 290 tilápias. Construa um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira proporção de tilápias na população

piscosa do lago. Interpretar o intervalo.
A proporção verificada na amostra (estimativa pontual) vale $p = 290/1000 = 0,29$. Para $\alpha = 0,05$, o valor de z é igual a 1,96. O intervalo de confiança é:

$$\begin{aligned} IC(\pi; 95\%) &: 0,29 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,29(0,71)}{1000}} \\ &: 0,29 \pm 0,0281 \\ & 0,2619 \leq \pi \leq 0,3181. \end{aligned}$$

Podemos afirmar, com 95% de confiança, que a porcentagem de tilápias está entre 26,19% e 31,81%.

Exemplo 2. Uma amostra de 35 peixes da espécie *Xenomelaniris brasiliensis* coletada na localidade Praia da Barra da Lagoa, Florianópolis, SC, apresentou 46% de peixes com comprimento total acima de 50 mm. Encontre um intervalo, com 99% de confiança, dentro do qual deve estar a verdadeira proporção de peixes com comprimento acima de 50 mm.
O valor de z para $\alpha = 0,01$ é 2,58. O intervalo fica:

$$\begin{aligned} IC(\pi; 99\%) &: 0,46 \pm 2,58\sqrt{\frac{0,46(0,54)}{35}} \\ &: 0,46 \pm 0,2174 \\ & 0,2426 \leq \pi \leq 0,6774. \end{aligned}$$

Observção: a amplitude do intervalo é muito grande. Para obter um intervalo com maior precisão é necessário aumentar o tamanho da amostra.

7.4.4 Erro de Estimação ou de Amostragem

Erro de Estimação da Média

Ao coletarmos uma amostra e calcularmos a média dos valores desta amostra ($\bar{X}$), dificilmente ela vai ser igual a média verdadeira (μ), apesar de estarem próximas, para amostras suficientemente grandes. Como a amostra é uma parte da população, é lógico pensar que os dois valores dificilmente vão coincidir. Lembre-se do estudo da distribuição amostral da média. Portanto, quando vamos estimar um parâmetro, sempre estamos sujeitos a cometer um erro, denominado erro de estimação ou de amostragem, que é a diferença entre a estatística amostral e o parâmetro, isto é,

$$e = \bar{X} - \mu.$$

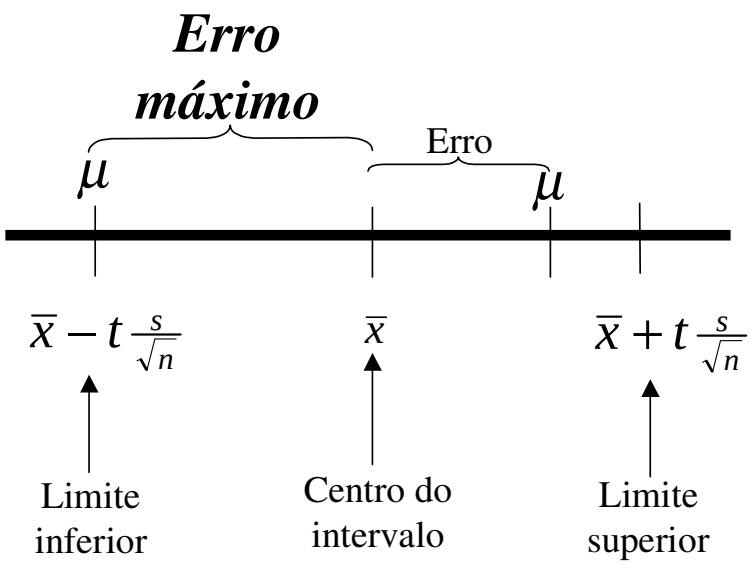


Figura 7.7: Erro de estimação associado a um intervalo de confiança

A figura 7.7 ilustra o erro de estimação associado a um intervalo de confiança. Podemos ver que a média verdadeira (μ), pode estar próxima ou distante da média da amostra ($\bar{x}$), assim, no intervalo de confiança, dizemos que temos, por exemplo, 95% de confiança de que elas não diferem mais do que $t_{5\%;n-1}(S/\sqrt{n})$.

A expressão do intervalo de confiança da média verdadeira quando o desvio padrão populacional é desconhecido é dada por:

$$\bar{X} \pm t\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Com o intervalo de confiança, podemos concluir, com nível de confiança γ, que a média da amostra não se afasta mais do que $t(S/\sqrt{n})$ da média verdadeira. Portanto, o erro de estimação máximo associado ao intervalo de confiança é dado por:

$$e = t\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Podemos ver que o erro máximo de estimação é a semi-amplitude do intervalo de confiança.

Sendo assim, é bastante comum na prática, especificarmos um erro máximo tolerável, por exemplo, 10% da média da amostra, e encontrar o tamanho da amostra necessário para que a nossa pesquisa tenha uma precisão (erro) e confiança de acordo com o desejado.

Exemplo. Um experimentador, está interessado em desenvolver um meio de cultura eficiente para micropropagação da espécie *Eucalyptus viminalis*. Esse meio de cultura contém hormônio BAP na concentração de 0,1 mg/l e cinetina a 0,2 mg/l. Cada tubo de ensaio

recebeu um nó de uma planta de 4 meses. As culturas foram avaliadas após 30 dias. A variável aqui estudada foi o número de folhas. Os resultados foram os seguintes:

Tubo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número	10	10	2	8	14	8	11	11	12	8
Tubo	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número	14	14	9	6	6	8	8	6	12	8
Tubo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Número	12	10	15	5	7	6	9	11	13	8

Estime o número médio de folhas utilizando um intervalo de confiança de 95%. Faça uma interpretação.
Temos os seguintes resultados: $\bar{x} = 9,3667$; $s = 3,0904$; $n = 30$ e $t_{(0.05;29)} = 2,045$.

$$\begin{aligned} IC(\mu; 95\%) &: 9,3667 \pm 2,045\frac{3,0904}{\sqrt{30}} \\ &: 9,3667 \pm 1,1538 \\ & 8,2128 \leq \mu \leq 10,5205. \end{aligned}$$

Qual o erro máximo associado ao intervalo encontrado? Faça a interpretação.
O erro máximo é de 1,1538 folhas. Portanto, ficamos com a certeza de que a estimativa de 9,3667 folhas, afasta-se da média verdadeira de no máximo 1,1538 folhas, para um nível de confiança de 95%.

Quando o desvio padrão populacional for conhecido, o erro de estimação é dado por:

$$e = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Erro de Estimação Para Uma Proporção

Vimos que o erro de estimação ou de amostragem nada mais é do que a metade da amplitude do intervalo de confiança. No caso de uma proporção, o intervalo de confiança é calculado por:

$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Donde obtemos o erro de estimação,

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \tag{7.6}$$

Exemplo. No estudo dos peixes da espécie *Xenomelaniris brasiliensis* coletados na localidade da Praia da Barra da Lagoa, Florianópolis, SC, qual o erro máximo associado

ao intervalo encontrado? Interpretar. O erro máximo é de 0,2174 ou 21,74%. Portanto, a proporção amostral de 46%, não difere em mais do que 21,74% da proporção populacional, em ambos os lados, para um nível de confiança de 95%. Você acha que a amplitude desse intervalo é pequena, média ou grande?

7.4.5 Determinação do Tamanho da Amostra

Determinação do Tamanho da Amostra Para Estimar Uma Média Populacional

Uma das perguntas mais freqüentes em estatística é: qual é o tamanho da amostra necessário para estimar a média? A resposta a esta pergunta, só é possível de ser dada, após o pesquisador da área de interesse, fornecer algumas informações, como veremos a seguir.

Podemos determinar o tamanho da amostra (n), através da fórmula do erro de estimação associado a um intervalo de confiança,

$$e = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Para uma amostra aleatória simples, quando o desvio padrão populacional (σ) é conhecido, ou temos alguma informação sobre o mesmo, determinamos o tamanho da amostra pela expressão:

$$\boxed{n = \left(\frac{z\sigma}{e}\right)^2.} \tag{7.7}$$

Na expressão 7.7, o valor de e deve ser fornecido pelo pesquisador e indica a *precisão* desejada na pesquisa, isto é, quão próximas estão a média da amostra e a média da população. Pense bem sobre isso, pois a média verdadeira nos é desconhecida.

Definida pelo pesquisador a probabilidade de erro (α), encontramos a *confiança* desejada na pesquisa, dada por $(1 - \alpha)$. Assim, podemos ver que o pesquisador deve ter informação sobre a precisão e a confiança que ele deseja para o seu trabalho.

Além da precisão e da confiança, o pesquisador precisa ter alguma informação sobre a variabilidade da população, isto é, sobre a variância (σ^2).

Exemplo 1. Continuação do exemplo dos pesos de pacotes de sementes de milho. Que tamanho de amostra será necessário coletar para produzir um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira média, com uma precisão de 50 gramas? Veja figura 7.8. Portanto,

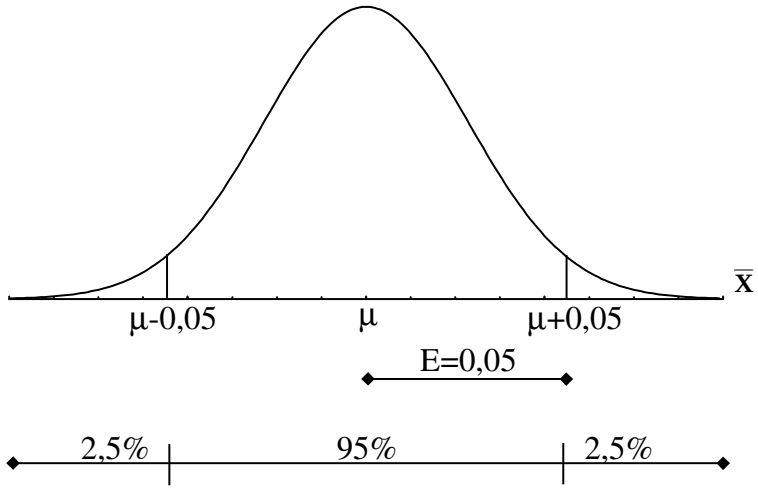


Figura 7.8: Tamanho de amostra para um erro de estimação de 0,05 kg e confiança de 95%, portanto, nível de significância de 5%

vamos encontrar um tamanho de amostra, de modo que tenhamos 95% de confiança, de que a média da amostra difere de no máximo 50 gramas, para os dois lados, da média da população. Aplicando a fórmula do tamanho da amostra, obtemos:

$$n = \left(\frac{1,96(0,20)}{0,05}\right)^2 = 61,46 \cong 62.$$

Portanto, necessita-se de 62 pacotes de milho para estimar a média populacional com a precisão e a confiança desejadas.

Na prática, geralmente o desvio padrão populacional (σ) é desconhecido, ou não temos conhecimento de um limite superior para o mesmo. Nesse caso, deveríamos usar o desvio padrão da amostra (s), e a distribuição t de Student. Acontece que a amostra ainda não foi coletada para que possamos conhecer o valor de s, desvio padrão da amostra, então, uma solução é coletar uma amostra piloto de $n^{'}$ elementos para, com base nela, obtermos uma estimativa de s, empregando-se a seguir a expressão:

$$\boxed{n = \left(\frac{t.s}{e}\right)^2.} \tag{7.8}$$

Onde t é o valor de tabela, com $n^{'} - 1$ graus de liberdade (tamanho da amostra piloto menos um), e probabilidade de erro igual a α. Se $n \leq n^{'}$ implica que a amostra piloto já é suficiente para a estimação da média, caso contrário, devemos retirar mais elementos da população para completar o tamanho mínimo da amostra.

Exemplo 2. Continuação do exemplo dos pesos ao nascer de bezerros da raça Ibagé. Que tamanho de amostra será necessário para produzir um intervalo de confiança de 95% para a verdadeira média, com uma precisão de 5% da média da amostra preliminar?
A amostra piloto de tamanho $n^{'} = 20$, nos forneceu uma $\bar{x} = 26$ kg e $s = 2$ kg. Temos ainda que a precisão desejada vale $e = 0,05(26) = 1,3$ kg e $t_{(19;0,05)} = 2,093$. Portanto, o tamanho da amostra vale:

$$n = \left(\frac{2,093(2,0)}{1,3}\right)^2 = 10,37 \cong 11.$$

Necessitamos de uma amostra de 11 bezerros para a precisão e confiança estipuladas pelo pesquisador. Como a amostra piloto tem tamanho $n^{'} = 20$, maior que o tamanho da amostra necessário $n = 11$ bezerros, implica que a amostra piloto já é suficiente para o estudo.

Podemos usar dois outros procedimentos para estimar o desvio padrão, s, quais sejam:

- sabemos que aproximadamente 96% dos valores de uma variável aleatória com distribuição normal, encontram-se no intervalo ($\bar{x} - 2s$ e $\bar{x} + 2s$), assim, o tamanho deste intervalo é $4s$. Podemos tomar os dois valores extremos dos dados disponíveis e calcular a amplitude de variação ($\triangle$) dos dados. Para obter uma estimativa de s, calculamos: $\triangle = 4s \Rightarrow s = \triangle/4$;

- uma estimativa de s pode ser obtida em artigos, livros, dissertações, teses, ou seja, através de uma referência bibliográfica.

Quando conhecemos o tamanho da população (N), e verifica-se a desigualdade $n > 0,05N$, deve-se proceder a uma correção ou ajuste para população finita, do seguinte modo:

$$\boxed{n_0 = \frac{n}{1+\frac{n}{N}}.} \tag{7.9}$$

Preliminarmente, a amostra é dimensionada para população infinita ($n \leq 0,05N$), obtendo-se o tamanho n e, numa segunda fase, corrigimos para população finita, obtendo-se o tamanho n_0, dado por 7.9.

Uma Aplicação em Ecologia - Método para Censo de Primatas na Natureza

A utilização de trilhas (transectos, preferencialmente linhas retas) abertas no local é um dos métodos mais usados para a estimativa da densidade (contagem) de várias espécies de animais. É importante que as trilhas estejam bem localizadas, pois elas devem amostrar as diferentes vegetações do local em estudo.

Aqui, o tamanho da amostra corresponde ao número de vezes que devemos percorrer cada trilha selecionada, e é calculada através da expressão:

$$n = \frac{(2ts)^2}{e^2}$$

Os termos que aparecem nesta fórmula já foram discutidos. Ressaltamos que a estimativa do desvio padrão da amostra (s), pode ser obtida através de uma amostra piloto (preliminar).

Exemplo. Desejamos determinar o tamanho da amostra (número de vezes que devemos percorrer as trilhas), para obter um intervalo de confiança com 90% e erro de 0,2 animais. De uma amostra piloto com 5 repetições em todas as trilhas obteve-se uma estimativa do desvio padrão com sendo igual a 0,3 indivíduos/km^2. Para o cálculo do tamanho da amostra temos as seguintes informações:
t(com 5-1=4 graus de liberdade e $\alpha = 0,10$*)=2,132*
s=0,3
e=0,2
O tamanho da amostra é dado por:

$$n = \frac{(2.2,132.0,3)^2}{(0,2)^2} = 40,90 \cong 41$$

De acordo com as exigências do intervalo de confiança, precisamos de 41 repetições. Como já foram feitas 5 repetições, necessitamos de mais 36 repetições. A referência bibliografica utilizada foi .....

Determinação do Tamanho da Amostra Para Estimar Uma Proporção Populacional

Para encontrarmos o tamanho necessário de uma amostra para estimarmos uma proporção da população, procedemos de forma análoga ao que foi feito para o caso de estimação de uma média da população.

De 7.6 obtemos a expressão para o tamanho da amostra, dado por:

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}[p(1-p)]}{e^2} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 p(1-p). \tag{7.10}$$

Acontece que, nós não sabemos o valor de p, pois a amostra ainda não foi retirada. Podemos, entretanto, conhecer uma limitação superior para a proporção em estudo. Por

exemplo, sabemos que a proporção de sementes que germinam, de uma determinada espécie, seguramente, não é superior a 0,90. Então, usamos esse valor para p.

A dificuldade de não se conhecer uma estimativa do valor de π, também pode ser resolvida através de uma amostra piloto de $n^{'}$ elementos, onde, com base nesta amostra, obtemos uma estimativa, p, e empregamos, a seguir, a expressão 7.10. Se $n \leq n^{'}$, a amostra piloto já é o suficiente para a estimação. Caso contrário, deveremos retirar da população, os elementos necessários à complementação do tamanho mínimo da amostra.

Uma terceira alternativa, é usar para p, o valor 0,50, pois, para este valor, o produto $p(1-p)$ é máximo e igual a 0,25=1/4. Se substituírmos esse valor na expressão 7.10, obtemos:

$$\boxed{n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4e^2}.} \tag{7.11}$$

Então, quando não temos a menor idéia sobre o valor de π, pode-se, inicialmente admitir $\pi = 0,50$ para o cálculo do tamanho da amostra. Com este procedimento, estamos superestimando o tamanho da amostra, ou seja, vamos trabalhar com uma amostra maior do que o necessário, assim, estaremos pecando por excesso.

Exemplo 1. Considere que uma amostra piloto de 35 peixes da espécie *Xenomelaniris brasiliensis* foi coletada na localidade da Praia da Barra da Lagoa, Florianópolis, SC, e apresentou 46% de peixes com comprimento total acima de 50 mm. Se quisermos estimar a proporção de peixes com comprimento acima de 50 mm, qual o tamanho da amostra necessário para que tenhamos 99% de confiança de que o erro de nossa estimativa não seja superior a 5%?

O valor de z para $\alpha = 0,01$ é 2,58. O tamanho da amostra necessário é:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2,58^2}{0.05^2} 0,46(1-0,46) \\ &= 2662,56(0,2484) \\ &= 661,38 \\ &\cong 662. \end{aligned}$$

Portanto, precisamos de uma amostra de 662 peixes para obtermos uma proporção amostral que não difira da proporção verdadeira em mais do que 5%.

Neste mesmo exemplo, suponha que não saibamos nada sobre π, qual deve ser o tamanho da amostra pesquisada?

Temos, $\gamma = 99\%$ e $e = 5\%$, portanto:

$$n = \frac{2,58^2}{4(0,05^2)} = 665,64 \cong 666.$$

Do mesmo modo que para a estimação de uma média, se conhecermos o tamanho da população N e verificarmos a desigualdade $n \geq 0,05N$, devemos proceder a correção para população finita dada em 7.9.

Quando o tamanho da população é conhecido e a amostra representa mais do que 5% da população, então, como já foi mostrado anteriormente, devemos aplicar um fator de correção para populações finitas para reduzir a estimativa do erro padrão da média e da proporção. Esse fator é dado por: $\sqrt{(N-n)/N-1}$.

Exemplo 2. Sorteou-se uma amostra aleatória simples de 100 estudantes do curso de Engenharia Agronômica e, solicitou-se aos mesmos, que anotassem suas despesas com alimentação no período de um mês. Há 500 estudantes matriculados no curso. O resultado da amostra foi uma despesa média de 40 u.m. e um desvio padrão de 10 u.m. (u.m.= unidades monetárias).

a) Construa um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira média.

b) Qual a importância de uma amostra aleatória nesse caso?

c) Qual o tamanho da amostra necessário para que tenhamos 98% de confiança de que o erro na nossa estimativa não seja superior a 2,0 u.m.?

Como conhecemos o tamanho da população ($N = 500$), vamos verificar se a população pode ser considerada finita. Como $100 > 0,05(500) = 25$, podemos considerá-la como tal. Portanto, o erro padrão da média vale:

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{10}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}} = 0,8953.$$

Como usamos o desvio padrão da amostra, vamos usar a distribuição t de Student. O intervalo de confiança fica:

$$\begin{aligned} IC(\mu; 95\%) &: 40 \pm 1,99(0,8953) \\ &: 40 \pm 1,782 \\ &\quad 38,218 \leq \mu \leq 41,782. \end{aligned}$$

Sempre devemos ter uma amostra aleatória. Isso garante, por exemplo, a independência dos resultados.

O tamanho da amostra é dado por:

$$n = \left(\frac{2,3646 \times 10}{2}\right)^2 = 139,24 \cong 140.$$

O tamanho da amostra, com a correção para população finita fica:

$$n_0 = \frac{140}{1 + \frac{140}{500}} = 107,9 \cong 108.$$

Exercícios resolvidos

1. De uma amostra de 100 peixes da espécie *Xenomelaniris brasiliensis*, coletada na Armação do Pântano do Sul, Florianópolis, SC, verificou-se que 57 deles apresentavam comprimento total maior que 50 mm. Com base nessa informação, determine o intervalo de confiança de 99% para a verdadeira proporção de peixes com comprimento total acima de 50 mm. Qual o tamanho de amostra necessário para estimar a verdadeira proporção com precisão de 5%, usando uma confiança de 95%?
Temos $n = 100$, $p = 57/100 = 0,57$ e $q = 1 - p = 0,43$.

$$\begin{aligned} IC(\pi; 99\%) &: 0,57 \pm 2,58\sqrt{\frac{0,57(0,43)}{100}} \\ &: 0,57 \pm 0,12773 \\ & 0,44227 \leq \pi \leq 0,6977. \end{aligned}$$

O cálculo do tamanho da amostra fica:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 0,57(0,43) \\ &= 376,63 \cong 377. \end{aligned}$$

2. O diâmetro médio de *Biomphalaria tenagophila*, examinada uma amostra de 35 animais, foi de 0,871 mm com um desvio padrão de 0,057 mm.
a) Dê a estimativa por intervalo do verdadeiro diâmetro médio utilizando um nível de confiança de 95%.
b) Que tamanho de amostra será necessário para produzir um intervalo de confiança de 95% para a verdadeira média, com uma precisão de 2% da média da amostra preliminar?

Temos, $n = 35$, $\bar{x} = 0,871$ mm, $s = 0,057$ mm $e = 0,02(0,871) = 0,0174$.

$$\begin{aligned} IC(\mu; 95\%) &: 0,871 \pm 2,032\frac{0,057}{\sqrt{35}} \\ &: 0,871 \pm 0,0196 \\ & 0,8514 \leq \mu \leq 0,8906. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{2,032(0,057)}{0,0174}\right)^2 \\ &= 44,21 \cong 45. \end{aligned}$$

3. Em um experimento, 320 de 400 sementes germinaram. Determine o intervalo de confiança de 98% para a verdadeira proporção de sementes que germinam. Para realizar o teste de germinação, quantas sementes serão necessárias utilizar, se se deseja um intervalo de confiança de 95%, com precisão de 4%?
Temos $p = 320/400 = 0,80$.

$$\begin{aligned} IC(\pi; 98\%) \quad ; \quad & 0,80 \pm 2,33\sqrt{\frac{0,80(0,20)}{400}} \\ : \quad & 0,80 \pm 0,0465 \\ & 0,7535 \leq \pi \leq 0,8465. \end{aligned}$$

$$n \quad = \quad \left(\frac{1,96}{0,04}\right)^2 0,80(0,20) = 384,16 \cong 385.$$

7.5 Exercícios Propostos

1) Um antropólogo mediu as alturas de uma amostra aleatória de 100 homens de determinada população, encontrando a média amostral de 173 cm. Se a variância da população for de 9 cm:
a) calcular um intervalo de 95% de confiança para a altura média de toda a população. Interpretar o I.C.
b) determinar um intervalo de 99% de confiança para a altura média de toda a população. Interpretar o I.C.
c) Qual é a probabilidade de encontrar um homen com altura superior a 177 cm.

2) Uma máquina enche pacotes de café com uma variância igual a 100 g^2. Ela estava regulada para enchê-los com 500 g, em média. Agora, ela se desregulou e queremos saber qual a nova média verdadeira (populacional). Uma amostra de 25 pacotes apresentou uma média igual a 485 g.
a) Construir intervalos de confiança de 95% e 99% de confiança para a média verdadeira. Interpretar os intervalos de confiança
b) Qual o erro máximo associado aos intervalos encontrados em a). Interpretar.
c) Que tamanho de amostra será necessário para produzir um intervalo de confiança para a verdadeira média populacional, com uma precisão de 3,5 gramas de café em qualquer dos sentidos, dado que o desvio padrão da população é conhecido e igual a 10 gramas de café. Use uma confiança de 99%.

3) De um povoamento de eucaliptos, sorteou-se 30 árvores e determinou-se o diâmetro, em cm, com a finalidade de estimar o diâmetro médio do povoamento. Diâmetros de 30 eucaliptos em cm:

10,1	15,8	18,5	22,3	23,5	17,2	17,8	18,7
16,7	29,1	28,0	30,3	26,8	28,0	17,8	18,9
28,9	27,9	22,5	32,9	29,5	28,3	34,2	38,5
38,5	35,5	34,2	31,8	32,5	41,8		

Com base nessa amostra calcule:
a) os intervalos de confiança aos níveis de 95% e 99%;
b) qual o tamanho da amostra necessário para estimar o diâmetro médio de plantas de eucalipto se o erro máximo deve ser de 5% da média para um nível de confiança de 95%?

4) De 1000 lavouras de arroz, foi levantada uma amostra de 25 lavouras e a informação a respeito da produtividade permitiu o cálculo do rendimento médio, por hectare ($1\ ha = 10.000\ m^2$), que foi de 3400 kg com um desvio padrão de 150 kg.
a) Determine o intervalo de confiança a 95% e 99%, para o verdadeiro rendimento médio.
b) Que tamanho deve ter a amostra para que seja de 95% a confiança na estimativa 3400 ± 100?

5) Do rebanho bovino de determinado município, em maio, constatou-se que 30% de 20 animais examinados estavam com febre aftosa, e em junho, examinaram-se outros 20 animais, constatou-se que 18% estavam acometidos daquela moléstia.
Deseja-se saber entre que limites esteve a verdadeira proporção de animais com febre aftosa, tanto no mês de maio como no mês de junho. Utilize um nível de confiança de 95%.
Qual o erro máximo associado aos intervalos encontrados. Interpretar.
Num trabalho futuro, qual o tamanho de amostra necessário para obter um intervalo de 95% de confiança para a proporção, com um erro tolerável de 0,08, em cada um dos mêses?.

6) Da produção de compotas de pêssego, da safra 79/80, de uma determinada indústria, foram examinadas 30 latas e 3 delas estavam fora dos padrões para a exportação. Determinar o intervalo de confiança, a 99%, para a verdadeira proporção de latas que estão fora dos padrões para exportação.

7) De uma partida de 1000 sacos de sementes de trigo tomou-se uma amostra de 50 sacos e verificou-se que 10 deles apresentavam teor de umidade acima do máximo permitido para o armazenamento. Com base nessa informação, determine o intervalo de confiança, de 99%, para a verdadeira proporção de sacos com teor de umidade acima do limite máximo permitido e o número máximo e mínimo de sacos de sementes com esse problema.

Tabela 7.1: Valores de comprimento

Lagoa de Ibiraquera		Fazenda de engorda de Laguna	
Classes	Frequências	Classes	Frequências
4,70 ⊢ 5,07	2	7,6 ⊢ 8,2	2
5,07 ⊢ 5,44	2	8,2 ⊢ 8,8	0
5,44 ⊢ 5,81	11	8,8 ⊢ 9,4	9
5,81 ⊢ 6,18	11	9,4 ⊢ 10,0	13
6,18 ⊢ 6,55	3	10,0 ⊢ 10,6	4
6,55 ⊢ 6,92	1	10,6 ⊢ 11,2	2

8) Num experimento de campo, o tratamento A, com nove repetições, tem média de 1500 kg/ha de feijão. Temos uma estimativa do desvio padrão s=180 kg/ha, com 30 graus de liberdade. Obter o intervalo de confiança para a média, ao nível de 95% de confiança.

9) De uma amostra de 26 valores de número de colônias de *Salmonella typhimurium*, em placas que contém a infusão de *Bauhinia fortificata*, encontrou-se um desvio padrão igual a 47 colônias, e média igual a 76,15 colônias.

a) Qual o intervalo de confiança de 95% para a média populacional?

b) Que tamanho deve ter uma amostra para que o intervalo $76,15 \pm 5$ tenha 95% de confiança?

10) Estime (Intervalo de Confiança), o comprimento médio (μ) de *Pnaeus schmitti* em condições normais no estuário (Lagoa de Ibiraquera) e num viveiro de cultivo (Fazenda de engorda de Laguna), sabendo-se que uma amostra de 30 indivíduos apresentou os resultados da tabela 7.1. ($Use\ \gamma = 95\%$).

11) Uma amostra aleatória de 60 progênies indica que 70% delas apresentam resistência à antracnose. Construir um intervalo de confiança para π, a proporção de progênies resistentes à antracnose, com $\gamma = 95\%$.

12) O diâmetro de altura do peito (DAP) de *Tabebuia ochracea*, o Ipê-Amarelo do Campo, família Bigoniáceas, é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal de média 0,70 cm e desvio padrão de 0,40 cm. Encontre um intervalo de confiança em torno da média que contenha 95% dos valores de DAP.

13) De um experimento anterior sabe-se que o desvio padrão da altura de plantas de um determinado híbrido de milho é $\sigma = 0,80$ m.

a) Selecionada uma amostra de 72 plantas deste híbrido, observou-se uma média de 2,10 m. Qual o intervalo de confiança de 95% para a média populacional?

b) Que tamanho deve ter uma amostra para que o intervalo $2,10 \pm 0,20$ tenha 99% de confiança?

14) Um agrônomo realizou um levantamento para estudar o desenvolvimento de duas espécies de árvores, a Bracatinga e a Canafístula. Para esta finalidade foram coletadas duas amostras de tamanhos igual a 10 árvores. Os resultados para altura, em metros, estão descritos abaixo para as duas amostras:

Bracatinga					Canafístula				
6,5	6,9	6,9	8,6	8,7	8,2	10,0	10,3	13,4	14,4
9,3	10,1	11,4	15,2	17,2	14,8	15,9	20,6	21,9	23,8

Para verificar a hipótese de que as alturas das duas espécies são diferentes, o agrônomo adotou o seguinte critério. Construir os intervalos com 95% de confiança, para cada uma das espécies. Se os intervalos se sobrepõem (se interceptam) concluir que não há diferenças significativas entre as duas alturas médias, caso contrário, concluir que há diferenças entre as mesmas. Baseado neste critério qual a conclusão do agrônomo?

15) As bromélias são plantas epífitas que vivem sobre galhos e troncos das árvores, denominados forófitos. O estádio arbóreo pioneiro é formado pela vegetação que proporciona o sombreamento efetivo do solo, originando um microclima úmido e sombreado. Uma amostra de 35 forófitos no estádio arbóreo pioneiro da Floresta Ombrófila na Ilha de Santa Catarina, apresentou 40% sem bromélias.

1. Encontre um intervalo de confiança com 99% para a verdadeira proporção de forófitos sem bromélias. Faça a interpretação do intervalo.

2. Qual o erro máximo associado ao intervalo? Faça a interpretação.

3. Para estimar a proporção de forófitos sem bromélias (π), qual o tamanho de amostra necessário para que tenhamos 99% de confiança de que o erro de nosssa estimativa não seja maior do que 5%? Faça a interpretação do n. Considere a amostra com 35 forófitos como sendo uma amostra preliminar (piloto).

4. Uma outra amostra de 35 forófitos, no estádio de floresta secundária, apresentou 2% sem bromélias. Encontre o intervalo de confiança com 99% para a verdadeira proporção (π), de forófitos sem bromélia.

5. Para concluir se existe diferença estatística entre as duas proporções, o(a) Biólogo(a), usou o seguinte critério: se os intervalos se sobrepõem (se cruzam, interceptam) conclui que não há diferença entre as duas proporções. Qual a conclusão do(a) Biólogo(a)? Faça a representação gráfica dos intervalos.

16) Os valores de DAP (Diâmetro à Altura do Peito), em cm, de forófitos possuidores de *Vriesea incurvata* (bromélia, conhecida como espada de Davi), em vegetação primária da Floresta Tropical Atlântica, em Santo Amâro da Imperatriz, SC, foram:

10,02	11,70	13,92	14,63	4,75	7,54	12,30
7,80	2,66	6,13	9,20	9,90	14,20	2,27
6,40	9,93	4,60	22,20	12,65	33,60	7,20
8,90	16,90	3,60	10,75	18,00	6,00	4,15
31,80	33,00					

1. Construa o intervalo de confiança em torno da média verdadeira que contenha 95% dos valores de DAP.

2. Que tamanho de amostra (n) será necessário coletar para produzir um intervalo de confiança com 95% para a verdadeira média, com precisão de 5% da média da amostra?

8 Testes de Hipóteses Sobre os Parâmetros

8.1 Introdução

Um problema que nós precisamos aprender a resolver é o de testar uma hipótese, isto é, feita uma determinada afirmação sobre um parâmetro populacional, por exemplo, sobre uma média populacional ou uma proporção populacional, será que os resultados de uma amostra contrariam ou não tal afirmação? Podemos estar interessados em verificar, por exemplo, se as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. a produtividade do milho em Santa Catarina, é de 2300 kg/ha;
2. os comprimentos médios dos ante-braços de duas espécies de morcêgos são iguais;
3. a proporção de fixação de fitoplâncton em dois tipos de solos é a mesma;
4. a produção média de duas cultivares de feijão é a mesma;
5. épocas de plantio estão associadas com a sobrevivência das mudas.

O objetivo de um teste estatístico de hipóteses é fornecer ferramentas que nos permitam aceitar ou rejeitar uma hipótese estatística através dos resultados de uma amostra.

Para exemplificar, vamos considerar um teste de germinação de sementes, onde foram analisadas 400 sementes de milho, obtidas por um processo de amostragem aleatória, de um grande lote de sementes, encontrando-se, nesta amostra, um poder germinativo de 92,8%. Porém, a distribuidora afirma que não haverá menos de 94% de germinação no lote. O que nós devemos responder com o auxílio de um teste de hipóteses, é se podemos considerar a afirmação da distribuidora como sendo verdadeira ou não.

Aqui, também devemos levar em consideração a variabilidade amostral, já vista no estudo de distribuições amostrais. Sabemos que retiramos somente uma amostra de 400 sementes deste lote, na verdade, poderíamos retirar k amostras de 400 sementes desse lote e, para cada uma delas, calcular a porcentagem de germinação de sementes, iríamos obter k valores de porcentagens, provavelmente, a maioria deles diferentes uns dos outros. Então, existe, o que nós conhecemos por variabilidade amostral e, como vimos na seção 6.4, podem ser representadas pelas distribuições de probabilidades. Assim, uma pergunta que podemos fazer é a seguinte: será que este valor de 92,8% de poder germinativo pode ser considerado como sendo devido a esta variação amostral, ou é um valor muito distante de 94%, sendo, portanto, uma diferença real? ou seja, é pouco provável obter uma amostra com 92,8% de

um lote com um poder germintativo de 94%?. Não podemos responder essa pergunta sem o auxílio da estatística, portanto, precisamos fazer um teste estatístico de hipóteses para chegarmos a uma conclusão.

Para todos os testes estatísticos, inicialmente devemos formular as hipóteses. Sempre vamos ter duas hipóteses estatísticas, quais sejam:

1. **hipótese nula:** é a hipótese que sugere que a afirmação que estamos fazendo sobre o parâmetro populacional é verdadeira. Essa hipótese é representada por H_0. No nosso exemplo, a hipótese nula é que a verdadeira porcentagem de germinação de sementes é de 94%, portanto, a distribuidora está certa, e a representamos por:

$$H_0 : \pi = 94\%.$$

2. **Hipótese alternativa:** é a hipótese que sugere que a afirmação que estamos fazendo sobre o parâmetro populacional é falsa e a representamos por H_1. No nosso exemplo, a hipótese alternativa é que o poder germinativo do lote é menor que 94%, pois devemos nos precaver contra o lote ter menos do que 94% de germinação e, portanto, a distribuidora não está certa, e a representamos por:

$$H_1 : \pi < 94\%.$$

Portanto, a construção da hipótese alternativa, depende do grau de conhecimento biológico ou agronômico sobre o fenômeno, ou das informações que se têm do problema em estudo. Existem três afirmações que podemos fazer em uma hipótese alternativa:

1. $H_1 : \pi \neq 94\%$ (temos um teste bilateral);
2. $H_1 : \pi > 94\%$ (temos um teste unilateral à direita);
3. $H_1 : \pi < 94\%$ (temos um teste unilateral à esquerda).

Na subseção 8.2 ilustra-se estes três casos.

Se, após realizado o teste estatístico, a decisão é a de não rejeitar a hipótese nula, então dizemos que a diferença verificada entre o valor encontrado na amostra e o valor alegado pela distribuidora é devido à *variação amostral* e, portanto, o lote tem 94% de poder germinativo. Por outro lado, se o teste estatístico indicar que nós devemos rejeitar a hipótese nula, então dizemos que a diferença verificada entre o valor encontrado na amostra e o alegado pela distribuidora é *real*, isto é, o lote não tem 94% de poder germinativo e, de acordo com a hipótese alternativa, ele apresenta menos de 94% de germinação.

Sempre que nós tomamos a decisão de não rejeitar ou rejeitar uma hipótese nula, estamos correndo o risco de uma decisão errônea. Por exemplo, podemos rejeitar uma hipótese nula quando deveríamos aceitá-la. Assim, como o que ocorre nos intervalos de confiança, quando afirmamos que o parâmetro está dentro do intervalo, existe uma probabilidade de ele não pertencer ao mesmo. O que acontece na prática, é que nós sabemos qual é o valor dessa probabilidade e, geralmente, ele é baixo. Portanto, sempre que tomamos uma decisão de rejeitar uma hipótese nula, temos uma alta probabilidade de estarmos certos.

No nosso exemplo, a estatística de interesse é a proporção de sementes que germinam (P), dada em porcentagem. Assim, devemos conhecer a distribuição amostral de uma proporção, pois, como sabemos, ela descreve a variabilidade amostral. Sabemos que a distribuição amostral das proporções (P), quando o tamanho da amostra é suficientemente grande, segue uma distribuição normal com média π e desvio padrão,

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}},$$

onde π é a proporção populacional e n é o tamanho da amostra. Nesse caso, estamos considerando a população como sendo infinita, caso contrário, é necessário fazer a correção para população finita no desvio padrão.

Assim, se a afirmação da distribuidora é verdadeira, isto é, se a nossa hipótese nula realmente está correta, então, a nossa amostra com 92,8% de poder germinativo vem de uma distribuição amostral com média $\mu_P = \pi = 94\%$ e desvio padrão

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{0,94(0,06)}{400}} = 0,01187 = 1,187\%.$$

Podemos usar a distribuição normal, para calcularmos a probabilidade de obter um valor de poder germinativo igual ou menor que 92,8%, de uma amostra de 400 sementes, extraída de um lote (população) com poder germinativo de 94%. Com o auxílio da tabela da distribuição normal padrão, dada no apêndice 3, obtemos:

$$\begin{aligned} Prob(P \leq 0,928) &= Prob\left(z \leq \frac{0,928-0,940}{0,0119}\right) \\ &= Prob(z \leq -1,01) \\ &= 0,5 - Prob(0 \leq z \leq 1,01) \\ &= 0,5 - 0,34375 \\ &= 0,1563 = 15,63\%. \end{aligned}$$

A figura 8.1 mostra a área da distribuição normal padrão correspondente ao valor de $z \leq -1,01$ ou $p \leq 0,928$. Portanto, nós temos uma probabilidade bastante alta de obter um

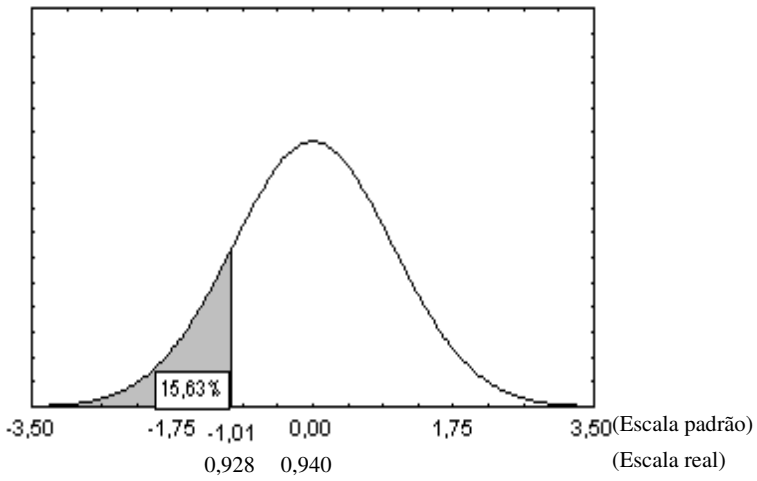


Figura 8.1: Probabilidade de encontrar um valor menor que 92,8% de um lote com 94,0% de poder germinativo

valor de poder germinativo igual ou menor que 92,8% devido à variação amostral, ou seja, temos 15,63% de probabilidade de obter uma amostra com um poder germinativo igual ou menor do que 92,8% de um lote com 94% de poder germinativo.

Se rejeitássemos $H_0 : \pi = 94\%$, o risco de erro, ou seja, rejeitar H_0 quando na verdade deveríamos aceitar, seria de 15,63%, o que é muito alto. Isto nos leva a não rejeitar H_0 e, assim, concluir que a amostra é oriunda de um lote com 94% de poder germinativo, e que a diferença entre os valores 94% e 92,8% é devido à amostragem. Este risco é chamado de *nível de significância do teste* e representa-se pela letra grega α. A mesma interpretação feita para os intervalos de confiança. O nível de significânica também é chamado de *nível descritivo* ou *valor p* do teste. No exemplo, $\alpha = 15,63\%$.

Agora, vamos supor que a porcentagem de germinação de sementes na amostra foi de 89,5%, ao invés de 92,8%. Neste caso, a probabilidade de obter um valor de poder germinativo amostral igual ou menor que 89,5% devido à variação amostral é dada por:

$$\begin{aligned} Prob(P \leq 0,895) &= Prob\left(z \leq \frac{0,895 - 0,94}{0,0119}\right) \\ &= Prob(z \leq -3,78) \\ &= 0,5 - Prob(0 \leq z \leq 3,78) \\ &= 0,5 - 0,4999 \\ &= 0,0001. \end{aligned}$$

A figura 8.2, de acordo com os cálculos, mostra que é praticamente nula a probabilidade de se obter uma amostra com valor de 89,5% de um lote com 94% de poder germinativo. Isto

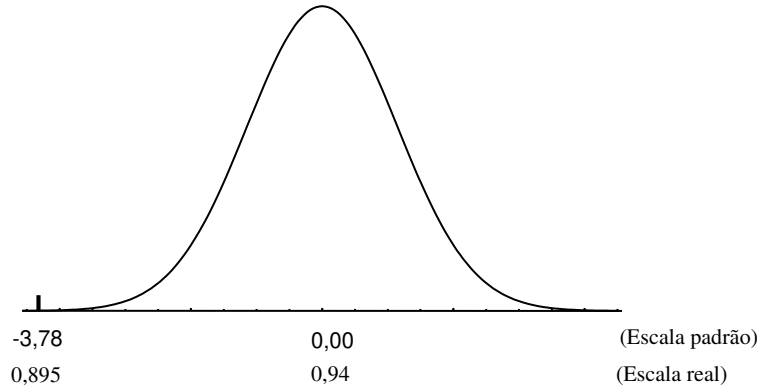


Figura 8.2: Probabilidade de encontrar um valor menor que 89,5% de um lote com 94,0% de poder germinativo

significa que nós temos fortes indícios para rejeitar a hipótese nula ($H_0 : \pi = 94\%$). Concluímos, portanto, que é improvável que esta amostra provenha de um lote de sementes com o poder germinativo alegado pela distribuidora. Neste caso, o risco de uma decisão errônea vale 0,0001, ou seja, a probabilidade de rejeitarmos H_0, quando na verdade deveríamos aceitá-la é de 0,0001 ou 0,01%. Assim, o *valor p* do teste é 0,01%.

Na prática, os níveis de signifância aceitáveis, são, geralmente, $\alpha = 0,05 = 5\%$ e $\alpha = 0,01 = 1\%$. Em alguns casos, utiliza-se $\alpha = 0,10 = 10\%$. Supondo que o pesquisador defina como sendo de 5% o erro máximo de suas conclusões. Assim, na amostra com 92,8% de poder germinativo, o menor valor de α para o qual rejeitamos H_0 vale 15,63%, portanto, maior do que o erro máximo aceitável pelo pesquisador, isso implica que devemos aceitar a hipótese nula. Na amostra com 89,5% de poder germinativo, o menor valor de α para o qual rejeitamos H_0 vale 0,01%, portanto, menor do que os 5% fixado pelo pesquisador, isso implica que rejeitamos a hipótese nula. Se o pesquisador fixar o nível de significância em $\alpha = 1\%$, as conclusões seriam as mesmas. O leitor concorda?

Portanto, em três passos:

1. formulação das hipóteses;

2. cálculo das probabilidades com a estatística correta e

3. não rejeitar ou rejeitar H_0

podemos concluir um teste de hipóteses. Até aqui, calculamos a probabilidade de encontrar um valor igual ou mais extremo do que o pesquisador encontrou no experimento (α), devido ao acaso (variações aleatórias). Se este valor for menor do que um valor fixado pelo pesquisador, por exemplo, $\alpha = 5\%$, rejeitamos a hipótese nula, caso contrário, aceitamos H_0.

Método Tradicional

Uma outra forma de se fazer um teste de hipóteses, o qual o denominaremos de *método tradicional*, seria fixar o nível de significância desejado para o trabalho, por exemplo, $\alpha = 5\%$. Para este nível de significância considerado, podemos encontrar os valores correspondentes de z e p e, a partir deles, definir as regiões de aceitação e rejeição da hipótese nula. Se os valores calculados de z ou de p, com os dados da amostra, pertencerem a região de aceitação, então, conclui-se a favor de H_0, caso contrário, rejeita-se a hipótese nula. Vamos continuar com o nosso exemplo, para mostrar como é feito o teste de hipótese nesse caso.

Vamos considerar que o *nível de significância (valor p)* fixado pelo pesquisador seja $\alpha = 5\%$. Na distribuição normal padrão, o valor de z, abaixo do qual temos 5% da observações, vale -1,65. Observe que o nosso teste é feito no lado esquerdo da curva, isto é, ele é um teste unilateral. Você pode obter este valor diretamente da tabela da distribuição normal padrão, basta encontrar o valor de z que corresponde a uma probabilidade de 0,45; ou, então, usar um programa (software) estatístico. Não esqueça que as probabilidades são dadas no corpo da tabela da distribuição normal padrão. Encontre este valor. Podemos encontrar o valor de p que corresponde ao valor de $z = -1,65$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z &= \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \\ -1,65 &= \frac{p - 0,94}{0,0119} \\ p &= 0,92 = 92\%. \end{aligned}$$

A figura 8.3 ilustra as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula para um nível de signifcância de 5%. Embora esperamos que o poder germinativo seja de 94%, nós temos 5% das porcentagens amostrais com valores abaixo de 92% de germinação. Portanto, se aceitarmos tomar $z = -1,65$ ou $p = 92\%$ como linha divisória entre o que é uma diferença casual ou real, há um risco de 5% de rejeitarmos a hipótese nula quando ela é de fato verdadeira.

O valor de z, calculado com os dados da amostra vale:

$$z = \frac{0,928 - 0,940}{0,0119} = -1,01.$$

A proporção verificada na amostra foi igual a $p = 0,928 = 92,8\%$. Como podemos ver na figura 8.3, o valor calculado de z com os dados da amostra pertence a região de aceitação da hipótese nula. Da mesma forma, o valor da proporção encontrada na amostra de 92,8%,

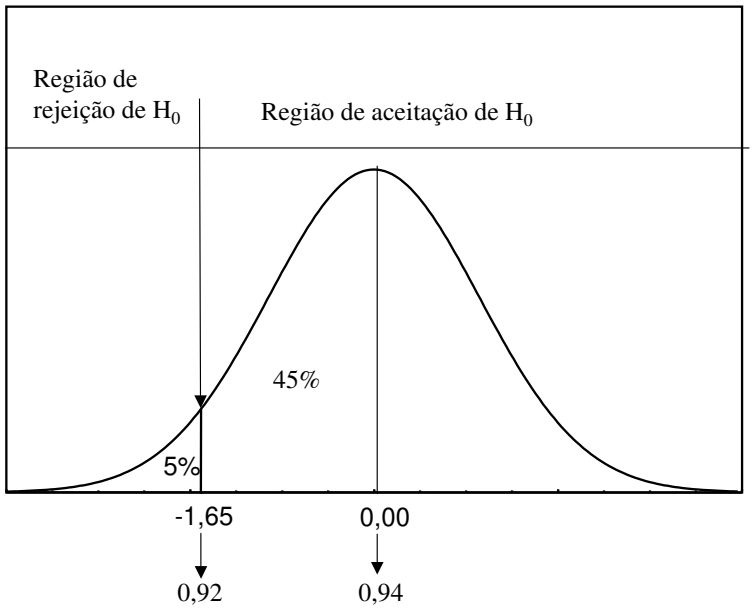


Figura 8.3: Regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula para uma probabilidade de erro de 5%

pertence a região de aceitação. Portanto, concluímos que não devemos rejeitar a hipótese nula de que $\pi = 94\%$, ao nível de significância de 5%.

Pelo que foi exposto, podemos estabelecer uma sequência lógica para a realização de um teste de hipótese pelo método tradicional. Os itens dessa sequência são:

1. todo o trabalho inicia com a formulação das hipóteses estatísticas. Como vimos, todo teste estatístico envolve duas hipóteses: hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1);

2. o pesquisador precisa decidir qual a estatística amostral ou estimador que ele vai usar ($\bar{X}, P, S^2, \bar{X}_1 - \bar{X}_2$) e, ter conhecimento dos resultaods da distribuição amostral do estimador, pois como vimos, ela descreve a variabilidade amostral;

3. o pesquisador precisa fixar um nível de signifcância (α) para o teste e, assim, delimitar as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula;

4. calcular o valor da estatística teste (no nosso curso vamos usar as estatísticas z, t e χ^2) com os dados da amostra (valor calculado) que será comparado com o valor de tabela (valor crítico);

5. consiste em verificar se o valor da estatística teste (valor calculado com os dados da

amostra), pertence ou não à região de rejeição de H_0. Se não pertence à região de rejeição, não rejeitamos H_0, caso contrário, rejeitamos H_0.

Ultimamente, com a crescente disponibilização de microcomputadores e programas (softwares) estatísticos, é mais informativo encontrarmos o *nível mínimo significativo*, *nível descritivo* ou *valor p* de um teste, que em inglês denomina-se *p-value*.

8.2 Testes de Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

Vimos que existem três possibilidades para a hipótese alternativa, quais sejam:

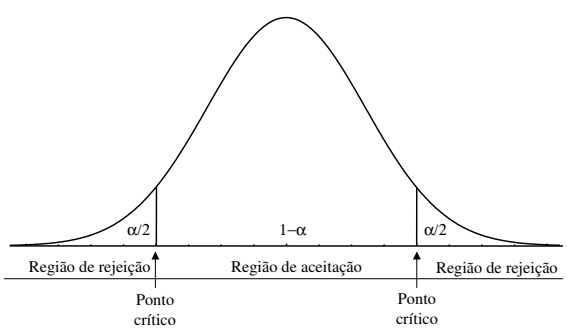
$$H_1 \ : \ \pi \neq \pi_0 \text{ (teste bilateral)}$$
$$H_1 \ : \ \pi > \pi_0 \text{ (teste unilateral à direita)}$$
$$H_1 \ : \ \pi < \pi_0 \text{ (teste unilateral à esquerda)}$$

A figura 8.4 ilustra essas três possibilidades para a hipótese alternativa. Observe as respectivas regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula em cada caso. No teste bilateral, as áreas de rejeição correspondem a $\alpha/2$, enquanto que nos testes unilaterais, a área de rejeição corresponde a α. Observe que o sinal $>$ ou $<$ aponta para o lado da curva a ser utilizado. Quando definimos o nível de significância (α) do teste, consequentemente temos o ponto crítico, ou seja, o ponto limitrófico entre as duas regiões.

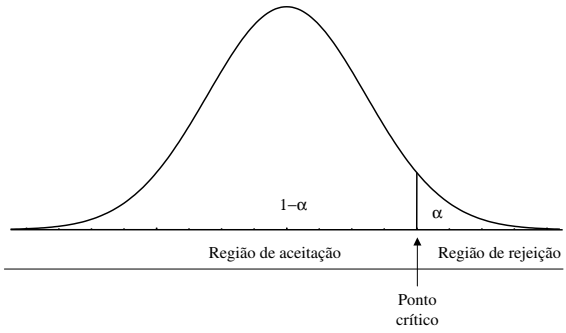
8.3 Erros Tipo I e Tipo II

De acordo com o que vimos, quando rejeitamos a hipótese nula, corremos o risco de estarmos tomando uma decisão errônea, ou seja, nós rejeitamos a hipótese nula quando na verdade deveríamos aceitá-la. Este risco é o *nível de significância ou valor p* do teste e é representado pela letra grega α. Esse nível de significância é também conhecido como erro tipo I e, a probabilidade de sua ocorrência vale α. Um segundo tipo de erro que podemos cometer, é aceitar a hipótese nula, quando ela é de fato falsa. Neste caso, temos o erro tipo II, o qual é representado pela letra grega β. Esquematicamente, temos:

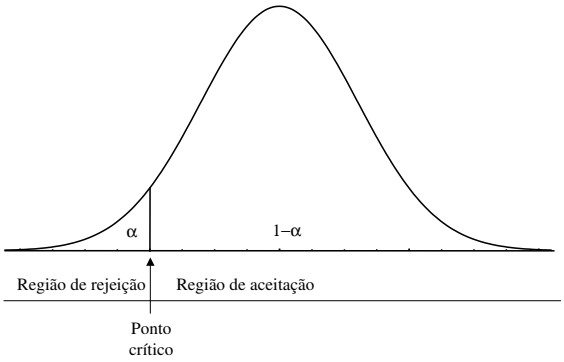
		Se H_0 é:	
		verdadeira	falsa
Ação	não rejeitar H_0	decisão correta $(1-\alpha)$	erro tipo II (β)
	rejeitar H_0	erro tipo I (α)	decisão correta $(1-\beta)$



(a) Teste bilateral



(b) Teste unilateral à direita



(c) Teste unilateral à esquerda

Figura 8.4: Testes de hipóteses unilaterais e bilaterais

Na prática, é costume escolher-se níveis tradicionais (5% e 1%) para α e ignorar o erro tipo II, ou seja, vamos nos preocupar em controlar o erro tipo I.

8.4 Testes de Médias Populacionais

O objetivo de testar-se hipóteses sobre médias verdadeiras é avaliar certas afirmações feitas sobre as mesmas. Por exemplo, podemos desejar verificar a afirmação de que as alturas médias de plantas de feijão, para sementes de alto e baixo vigor, são iguais.

Existem, basicamente, três tipos de afirmações que se podem fazer quando se estuda médias populacionais, quais sejam:

1. a afirmação diz respeito a uma média populacional, então, temos o teste de uma média populacional. Exemplo, os pesos ao nascer de bezerros da raça Nelore, no planalto Catarinense, em agôsto, é de 25,5 kg;

2. a afirmação diz que as médias de duas populações (dois tratamentos) são iguais, temos, então, o teste de comparação de duas médias. Exemplos: 1) as produções médias de batatinhas de duas variedades são iguais e 2) as áreas foliares específicas médias da espécie *Cecropia glaziovi*, cujo nome vulgar é embaúba ou embaúva, em amostras situadas na borda da mata e na mata fechada são iguais.

3. a afirmação diz que as médias de mais de duas populações (mais do que dois tratamentos) são todas iguais, temos, então, o teste de comparação de k médias, com $k > 2$. Neste caso, devemos fazer uma Análise de Variância. Existem diversos livros especializados em planejamento e análise de experimentos, que tratam desse tipo de análise, por exemplo, os livros de Vieira (1999) e Steel & Torrie (1960). Por exemplo, desejamos saber se há diferenças entre três locais (Baía Norte, Baía Sul e Pântano do Sul), quanto ao número médio de micronúcleos por 5000 células sanguíneas de peixes do gênero bagre.

As técnicas que nós vamos estudar pressupõem uma distribuição normal da distribuição amostral da estatística ou estimador $(\bar{X}, \bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. Como sabemos, essa suposição será válida se a distribuição da variável em estudo seguir uma distribuição normal e a amostragem for aleatória e, em geral, com boa aproximação se a amostra for suficientemente grande (sugestão: $n \geq 30$).

8.4.1 Teste de Uma Média Populacional Quando a Variância Populacional for Desconhecida

Como já foi dito no estudo dos intervalos de confiança, é comum na prática não conhecermos o valor da variância populacional (σ^2). Então, devemos estimá-la através dos valores obtidos na amostra, através da variância amostral (S^2).

No estudo de intervalos de confiança, já discutimos que, ao substituir σ pela sua estimativa s, devemos utilizar a distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade, onde n é o tamanho da amostra.

Do estudo de intervalos de confiança, obtemos a expressão da estatística teste a ser usada aqui, dada por:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}, \tag{8.1}$$

a qual tem distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade.

Como já foi salientado, para pequenas amostras é importante que a variável em estudo tenha distribuição normal ($X : N(\mu; \sigma^2)$, com μ e σ^2 desconhecidos).

Para o teste de uma média, a hipótese nula é dada por:

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

Com conhecimento a respeito do assunto em estudo, o pesquisador irá selecionar uma das seguintes hipóteses alternativas:

$$\begin{aligned} H_1 &: \mu \neq \mu_0 \text{ (teste bilateral)} \\ H_1 &: \mu > \mu_0 \text{ (teste unilateral à direita)} \\ H_1 &: \mu < \mu_0 \text{ (teste unilateral à esquerda)} \end{aligned}$$

Como já foi dito, na realização de um teste de hipótese, costuma-se calcular o *valor p* do teste. No caso do teste de uma média quando a variância populacional for desconhecida, o *valor p* é calculado como segue. Para testar se μ é significativamente menor do que o valor estabelecido na hipótese, $H_0 : \mu = \mu_0$, calculamos a probabilidade da variável aleatória t, assumir um valor menor ou igual ao valor de $t_{(n-1)}$ calculado com os dados da pesquisa de acordo com a equação 8.1. Quando a hipótese alternativa é $H_1 : \mu < \mu_0$, isto é, temos um teste unilateral à esquerda, esta probabilidade é $P(t \leq -t_{(n-1)})$, a qual pode ser obtida em tabelas da distribuição t de Student (Apêndice 4), ou através de programas estatísticos. A hipótese de nulidade H_0 será rejeitada se este *valor p* for bem pequeno, digamos, inferior a

5%. Da mesma forma, se a hipótese alternativa for $H_1 : \mu > \mu_0$, a hipótese nula (H_0), será rejeitada se a $P(t \geq t_{(n-1)})$ for bem pequena. Se a hipótese alternativa for bilateral, isto é, $H_1 : \mu \neq \mu_0$, então valores grandes negativos ou valores grandes positivos de $t_{(n-1)}$, são fortes indicativos para a rejeição da hipótese nula. Neste caso, a hipótese nula será rejeitada se $P(t \leq -t_{(n-1)}) + P(t \geq t_{(n-1)})$, a qual é igual a $2P(t \geq |t_{(n-1)}|)$, for pequena.

Vejamos, agora, a aplicação do teste de hipótese de que uma média populacional, μ, é igual a um valor fixo, μ_0, supondo-se que a variância populacional, σ^2, seja desconhecida.

Exemplo 1. Supõe-se que a produtividade média de feijão da safra no Estado de Santa Catarina é de 800 kg/ha. Para investigar a veracidade dessa afirmação, consultou-se uma publicação do Instituto CEPA-SC, onde obteve-se os seguintes valores de produtividade média de feijão:

Safra	80/81	81/82	82/83	83/84	84/85	85/86	86/87	87/88	88/89
Produtividade	1017	980	507	841	899	264	700	800	653

a) Qual a conclusão ao nível de significância de 5%?
b) Dê a estimativa da verdadeira produtividade média, com confiança de 95%.

A nossa variável em estudo é a produtividade média anual. Como são valores médios, podemos assumir que a distribuição da variável é normal.

Como não temos informações adicionais se a produtividade média é maior ou menor do que 800 kg, vamos construir as hipóteses do seguinte modo:

$$H_0 : \mu = 800\ kg/ha \quad versus \quad H_1 : \mu \neq 800\ kg/ha.$$

A amostra nos fornece, $\bar{x} = 740,11$ kg/ha e $s = 240,68$ kg/ha. Como vamos fazer um teste sobre uma média populacional, com variância estimada com os dados de uma amostra, usamos a estatística 8.1, a qual segue uma distribuição t de Student com $9 - 1 = 8$ graus de liberdade. Para um nível de significância de 5% e, com o uso da tabela da distribuição t (apêndice 4) ou de um programa estatístico, obtemos:

$$t_{(n-1;\alpha)} = t_{(9-1;0,05)} = t_{(8;0,05)} = 2,306.$$

A região de rejeição é dada pelos valores $|t_8| > 2,306$; a região de aceitação compreende os valores (inclusive) entre -2,306 e 2,306, isto é, $|t_8| \leq 2,306$. A figura 8.5 mostra as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese. Observe nesta figura, como o teste é bilateral, que o nível de significância está dividido em duas partes $(0,05/2)$, ou seja, 0,025 na cauda do lado esquerdo e 0,025 na cauda do lado direito. Com os valores da amostra vamos calcular

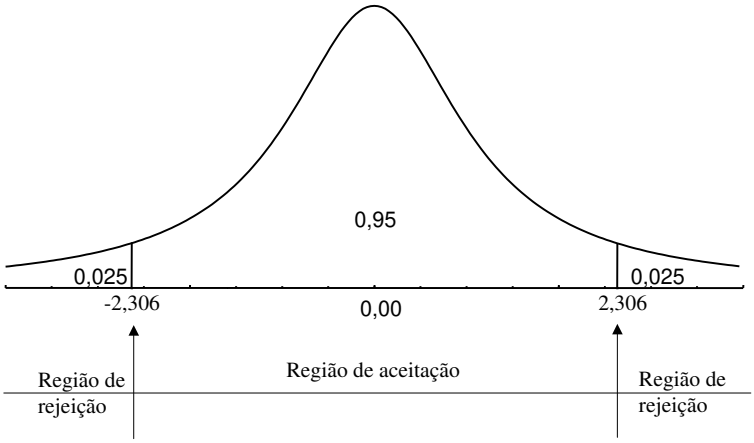


Figura 8.5: Regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula com $\alpha = 5\%$, para o teste de uma média populacional

a estatística teste,

$$t_8 = \frac{740,11 - 800}{\frac{240,68}{\sqrt{9}}} = \frac{-59,89}{80,226} = -0,746.$$

Como o valor calculado (-0,746) cai na região de aceitação de H_0, concluimos a favor de H_0. Os dados da amostra indicam, ao nível de significância de 5%, que a produtividade média pode ser considerada igual a 800 Kg/ha. Acabamos de fazer o teste pelo método tradicional.

Podemos chegar a mesma conclusão calculando diretamente o menor nível para o qual rejeitamos a hipótese nula, devido ao acaso, isto é, encontrando o *nível mínimo significativo* ou *valor p* do teste. Devemos calcular a

$$P(t < -0,746) + P(t > 0,746)$$

devido ao acaso. Se esse valor for igual ou maior do que 5% devemos aceitar a hipótese nula, caso contrário, rejeitamos. Com o uso de um programa estatístico, na distribuição de Student, com 8 graus de liberdade, obtemos,

$$P(t < -0,746) = 0,238507.$$

Como a distribuição é simétrica a $P(t > 0,746)$ também vale 0,238507, assim, o nível mínimo significativo do teste vale $(2 \times 0,238507) = 0,477017$. Portanto, não rejeitamos a hipótese nula, pois se a rejeitarmos, a probabilidade do erro tipo I é de 47,81%.

O intervalo de confiança, para a média verdadeira, fica:

$$IC(\mu; 95\%) \quad : \quad 740,11 \pm 2,306\frac{240,68}{\sqrt{9}}$$

$$: \quad 740,11 \pm 185,00$$
$$555,1 \leq \mu \leq 925,11.$$

Observação: Podemos chegar a mesma conclusão de um teste de hipótese bilateral através do estudo do intervalo de confiança. Sempre que o intervalo incluir o valor de H_0, devemos aceitar a hipótese nula. No exemplo, 800 kg/ha, está contido no intervalo, portanto, aceitamos $H_0 : \mu = 800\ kg/ha$.

Exemplo 2. Foi retirada uma amostra de tamanho 10, da população de pesos aos 210 dias de bezerros da raça Nelore. Os valores, em kg, foram os seguintes:

178	199	182	186	188	191	189	185	174	158

Teste as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 186 \quad vs \quad H_1 : \mu < 186,$$

ao nível de significância de 5%.

A variável em estudo é do tipo contínua e vamos assumir que a mesma tenha, pelo menos aproximadamente, distribuição normal. Como desejamos fazer um teste para uma média e temos uma estimativa da variância, vamos usar a estatística 8.1. Na amostra obtemos $\bar{x} = 183$ e $s = 11,18$. Para $\alpha = 5\%$, da tabela da distribuição t de Student, para um teste unilateral (de acordo com a hipótese alternativa), obtemos, $t_{(9;0,05)} = -1,83$. Para encontrar este valor na tabela da distribuição t de Student (apêndice 4), devemos entrar na coluna de $P = 0,10$, pois a tabela é bilateral e o teste é unilateral. A tabela só fornece valores positivos de t, como ela é simétrica, basta mudar o sinal. A região de rejeição corresponde aos valores menores do que -1,83; a região de aceitação é formada pelos valores maiores ou igual a -1,83. A figura 8.6 mostra as duas regiões. Com os dados da amostra temos:

$$t_9 = \frac{183 - 186}{\frac{11,18}{\sqrt{10}}} = -0,847.$$

O valor -0,847 está na região de aceitação, portanto, aceita-se a hipótese nula. Os dados da amostra suportam a hipótese de que a média dos pesos aos 210 dias de bezerros da raça Nelore é igual a 186 kg, com probabilidade de erro de 5%.

Podemos fazer o teste através da interpretação do *valor p*. Com o auxílio de um programa estatístico vamos encontrar o *valor p* do teste. O menor valor de α para o qual rejeitamos a hipótese nula é:

$$P(t < -0,847) = 0,2095 = 20,95\%.$$

Como 20,95% é maior do que os 5% definido pelo pesquisador, devemos aceitar a hipótese nula. É assim, o pesquisador admite uma probabilidade de erro de no máximo 5%, neste

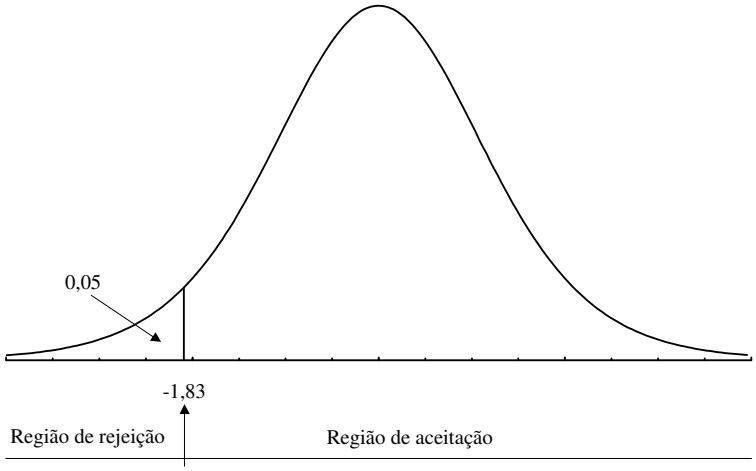


Figura 8.6: Regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula com $\alpha = 5\%$, para o teste de uma média populacional

exemplo, se ele rejeitar a hipótese, a probabilidade de erro é de 20,95%, portanto, ele deve aceitar a hipótese nula.

Exemplo 3. Continuação do exemplo dos resíduos industriais jogados nos rios da seção 7.4.2. Leia aquele enunciado. Teste as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 5 \quad versus \quad H_1 : \mu \neq 5$$

O valor da estatística teste é:

$$t_5 = \frac{4,933 - 5,000}{0,1366/\sqrt{6}} = -1,2014$$

O valor teórico de t é: $t_{(5;0,05)} = 2,571$. Portanto, a região de aceitação está entre -2,571 e 2,571. Como o valor -1,2014 está dentro desta região, não rejeitamos a hipótese nula.

Uma Aplicação em Distribuição Espacial

Sabemos que, na distribuição de Poisson, os indivíduos se distribuem aleatoriamente num habitat. Na distribuição de Poisson, a média μ é igual a variância σ^2, ou seja, σ^2/μ=1, como visto na seção 4.7. Quando a razão, σ^2/μ, for menor do que 1 dizemos que a distribuição é uniforme; se a razão σ^2/μ for maior do que 1 concluímos que a distribuição é agregada.

Neste caso estamos interessados em testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \sigma^2/\mu = 1 \quad versus \quad H_a : \sigma^2/\mu \neq 1$$

ou seja, sob H_0, a distribuição da espécie é aleatória. Para verificar as hipóteses assim formuladas, a estatística do teste é dada por:

$$t = \frac{\mid S^2/\bar{X} - 1 \mid}{\sqrt{2/(n-1)}}.$$

Tabela 8.1: Distribuição de *Primula simenses*

X plantas por quadrado	Número de quadrados com X plantas
0	26
1	21
2	23
3	14
4	11
5	4
6	5
7	4
8	1
> 8	0
Total	109

a qual tem distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade.

Exemplo: Uma certa região florestal foi dividida em 109 quadrados para estudar a distribuição de *Primula simenses* selvagem. A priori, supomos que este tipo distribui-se aleatoriamente na região. A tabela 8.1 indica o número de quadrados com X *Primula Simenses*; o número médio de plantas por quadrado foi de 2,2, e a variância foi igual a 3,9549, portanto, o desvio padrão vale 1,9887. (Encontre esses valores).

O valor da estatística t é:

$$t = \frac{\frac{3,9903}{2,1929} - 1}{\sqrt{\frac{2}{109-1}}} = \frac{0,8196}{0,1361} = 6,02$$

O valor de t da tabela vale $t_{(108;0,05)} = 1,98$. Como 6,02 > 1,98, rejeitamos a hipótese nula e concluimos que a distribuição é por agregado. A referência bibliográfica utilizada foi Brower & Zar, ano??

8.4.2 Teste de Duas Médias Populacionais com Variâncias Populacionais Desconhecidas

Vamos, nesta seção, estender o procedimento anterior para o caso de comparação de duas médias populacionais, quando as variâncias populacionais são desconhecidas. A fundamentação básica continua sendo a mesma, só se farão algumas alterações quanto à estatística teste a ser utilizada.

Inicialmente, vamos supor que temos duas amostras selecionadas de populações normais (variável em estudo apresente, pelo menos aproximadamente, uma distribuição normal). A questão da normalidade é especialmente importante quando o tamanho da amostra é pequeno. Para cada amostra, vamos calcular a média e a variância dos dados.

O objetivo do teste, neste caso, é decidir se as médias de duas populações são iguais. De modo geral, vamos testar hipóteses referentes ao valor real da diferença entre duas médias populacionais, ou seja,

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \triangle.$$

Na prática, temos especial interesse quando $\triangle = 0$, neste caso, testamos a hipótese de igualdade das duas médias, ou seja,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2.$$

Como no caso do teste de uma média populacional, temos três possibilidades para a hipótese alternativa, quais sejam,

$$\begin{aligned} H_1 &: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{(teste bilateral)} \\ H_1 &: \mu_1 > \mu_2 \quad \text{(teste unilateral à direita)} \\ H_1 &: \mu_1 < \mu_2 \quad \text{(teste unilateral à esquerda).} \end{aligned}$$

Num teste de comparação de duas médias, temos dois casos a considerar, quais sejam:

1. **dados pareados ou amostras dependentes.** Os dados de duas amostras constituem dados pareados quando estão relacionados dois a dois, segundo algum critério que introduz um influência marcante entre os diversos pares de valores. Também é importante observar que deve haver independência entre observações dentro de cada uma das amostras.

   Exemplo: desejamos fazer um teste estatístico para verificar se existe diferença significativa entre as médias das notas obtidas na primeira avaliação e na segunda avaliação da disciplina de estatística. Então, para cada aluno, tomamos a sua nota na primeira avaliação e na segunda avaliação. Como existem diferenças entre os alunos (alguns estudam mais, outros tem mais facilidade com a disciplina, etc.), os pares de notas (cada aluno um par de notas) não são independentes. Existe o fator aluno introduzindo uma influência forte entre os pares de dados. Observe que para cada amostra, como os alunos são diferentes, as observações são independentes dentro delas.

   Outro exemplo: vamos submeter seis animais de determinada espécie a uma nova dieta. Afim de determinar o efeito da dieta foram tomados os pesos *antes* e *depois*

da dieta. Nesse caso, as observações foram feitas nos mesmos animais, medindo uma característica antes e depois deles serem submetidos a uma dieta.

2. **dados não pareados ou amostras independentes.** Neste caso, os dados das duas amostras não estão relacionados por nenhum fator que possa confundir (misturar) o efeito do fator em estudo. Além disso deve haver independência entre observações dentro das amostras.

   Exemplo: vamos fazer um estudo com o objetivo de verificar se o comprimento do antebraço de morcêgos de duas espécies são iguais. Para isso, tomamos uma amostra de morcêgos da espécie A e uma outra amostra de morcêgos da espécie B. Podemos perceber que os dados das duas amostras não estão relacionados, ou seja, as duas amostras são independentes, pois os resultados de uma amostra não interfere nos resultados da outra amostra. Também verificamos que as observações dentro das amostras são independentes, pois são morcêgos distintos.

Para o caso de *amostras independentes*, podemos, ainda, distinguir duas situações, quais sejam:

1. quando as variâncias são desconhecidas mas podem ser consideradas iguais, ou seja, a ordem de grandeza não difere muito;

2. quando as variâncias são desconhecidas e consideradas desiguais, ou seja, a ordem de grandeza difere bastante.

Vamos fazer dois testes de significância para comparação de duas médias de amostras independentes, um para variâncias homogêneas (consideradas iguais) e outro para variâncias heterogêneas (consideradas desiguais). Portanto, percebemos que também há a necessidade de se fazer um teste de hipóteses para as variâncias populacionais, para podermos decidir se as mesmas podem ser consideradas iguais ou não.

Teste para Dados Pareados

Inicialmente, vamos apresentar um exemplo que esta muito relacionado com o planejamento de um experimento. Na verdade, vamos exemplificar a construção do delineamento, talvez o mais utilizado na experimentação, denominado de *blocos ao acaso*.

Vamos supor que desejamos colocar em teste duas cultivares de feijão. Decidiu-se que serão feitas sete repetições de cada cultivar, portanto, os tamanhos das amostras vão ser iguais e igual a 7, $n_1 = n_2 = 7$. Também, decidiu-se que as unidades experimentais vão ser

formadas por áreas de terra (canteiros) de 20 m^2 e serão utilizadas 250 gramas de sementes por unidade experimental. Como temos duas cultivares, cada uma com 7 repetições, vamos precisar de 14 unidades experimentais. Vamos imaginar, que a área que o pesquisador tem a disposição para implantar o experimento, apresenta uma considerável inclinação, fazendo com que exista heterogeneidade entre as unidades experimentais, quanto à fertilidade do solo. Na parte alta do terreno a fertilidade é menor do que na parte baixa do mesmo. É fundamental que o pesquisador encontre uma forma de dispor as unidades experimentais, de tal forma que a diferença de fertilidade seja eliminada da comparação entre as duas cultivares. Portanto, já de início, devemos descartar a possibilidade de se fazer uma sorteio aleatório das duas cultivares nas 14 unidades experimentais. Imagine, que no sorteio, a maioria das unidades experimentais que estão localizadas na faixa mais fértil da área receba a cultivar 1. Dessa forma, não saberemos distinguir o que é variação devido a cultivar ou devido à fertilidade do solo (os efeitos estão confundidos). A forma correta do desenho experimental é dado na figura 8.7. Foram construídos sete blocos, dentro de cada bloco as unidades são homogêneas quanto à fertilidade, pois estão na mesma faixa do terreno. Entre os blocos pode e deve existir diferenças de fertilidade. O sorteio das cultivares às unidades experimentais é feito independentemente para cada bloco. Portanto, a formação de blocos constitue um pareamento.

O critério para a formação dos pares pode ser, por exemplo, as formulações de um comprimido, ou seja, o que denominamos em experimentação de *fator*. Deseja-se comparar dois métodos de determinação da quantidade de princípio ativo presente nos comprimidos, quais sejam: 1) HPLC e 2) Titulação. Para cada formulação aplica-se os dois métodos. Se temos, por exemplo, sete formulações, teremos sete pares.

Vamos apresentar o teste de duas médias para dados pareados através de um exemplo. Como fizemos para o caso do teste de hipótese de uma média, aqui, também vamos fazer o teste pelo enfoque tradicional, ou seja, fixamos o valor do nível de significância (α), encontramos as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese e verificamos em qual destas regiões o valor da estatística teste se encontra, e pelo método atual, ou seja, encontrando-se qual o menor valor de α para o qual rejeitamos a hipótese nula, ou seja, o (*valor p*). Como poderá ser verificado, o teste para comparação de duas médias de amostras pareadas, é um teste para comparação de uma média de valores de diferenças dos pares.

Exemplo. Foi conduzido um experimento para estudar o conteúdo de hemoglobina no sangue de suínos com deficiência de niacina. Aplicou-se 20 mg de niacina em 8 suínos. Podemos afirmar que o conteúdo de hemoglobina no sangue diminuiu, com a aplicação de niacina, ao nível de significância de 5%? Encontre o intervalo de confiança com 95% para a

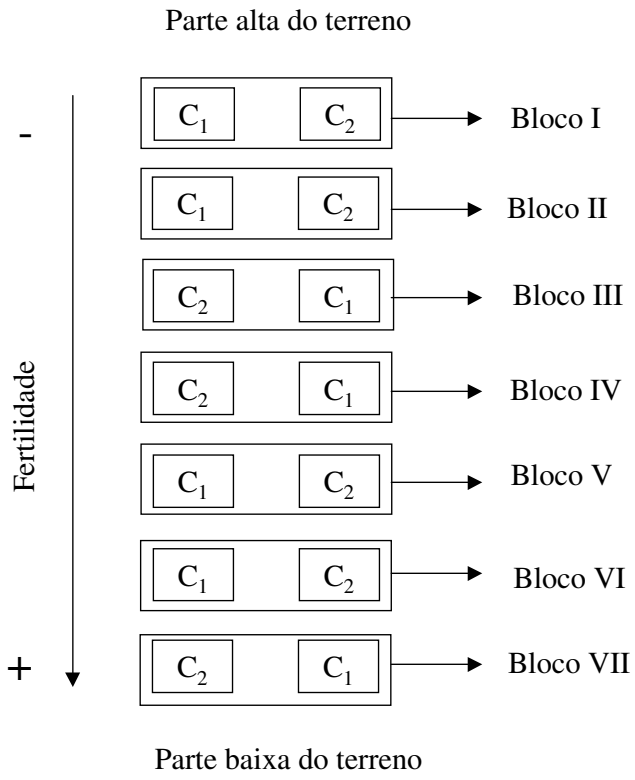


Figura 8.7: Delineamento blocos ao acaso

verdadeira diferença entre as duas médias. Foram mensurados os níveis de hemoglobina no sangue antes e depois da aplicação da niacina, os resultados obtidos no experimento foram:

Suínos	Antes (A)	Depois (B)	Diferenças (A-B)
1	13,6	11,4	2,2
2	13,6	12,5	1,1
3	14,7	14,6	0,1
4	12,1	13,0	-0,9
5	12,3	11,7	0,6
6	13,2	10,3	2,9
7	11,0	9,8	1,2
8	12,4	10,4	2,0

Vamos considerar que temos um suporte teórico para esperar que o conteúdo de hemoglobina no sangue diminua com a aplicação de niacina, portanto, as hipóteses ficam:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad versus \quad H_1 : \mu_A > \mu_B.$$

As mesmas hipóteses, dadas em forma de diferenças entre as duas médias, $\mu_D = \mu_A - \mu_B$, podem ser escritas como,

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad versus \quad H_1 : \mu_D > 0.$$

Trabalhando-se com as diferenças, na verdade estamos eliminando as diferenças entre os indivíduos (no exemplo, suínos). Vamos admitir que, sob H_0, as diferenças de conteúdo de hemoglobina, seguem, pelo menos aproximadamente, uma distribuição normal com média 0 (zero) e variância σ_D^2, e a representamos por: $D \sim N(0, \sigma_D^2)$. Tomando-se os valores das diferenças entre A e B, caímos no caso do teste de uma média com variância desconhecida, cuja estatística teste é dada por:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}, \tag{8.2}$$

a qual segue uma distribuição t de Student com $n-1$ graus de liberdade. Aqui, $\bar{D}$ é a média das diferenças entre os valores de A e B; S_D é o desvio padrão das diferenças e μ_D é o valor dado na hipótese nula, geralmente este valor é nulo. Com os dados da amostra obtemos: $\bar{d} = 1,15$, $s_{\bar{d}} = 1,225$.

Para um nível de significância fixado em 5%, e teste unilateral, obtemos na tabela da distribuição t de Student o valor $t_7 = 1,895$. A estatística teste 8.2 calculada com os valores da amostra vale,

$$t_7 = \frac{1,15 - 0}{1,225/\sqrt{8}} = 2,655.$$

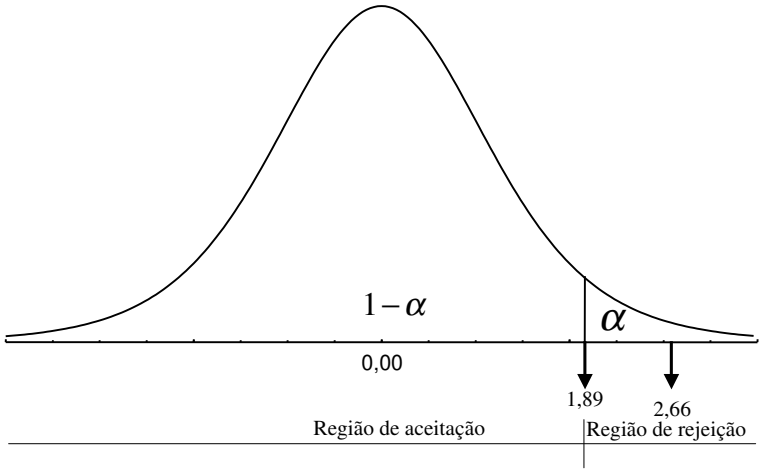


Figura 8.8: Teste de hipótese para comparar duas médias de dados pareados

As regiões do teste de hipótese e o valor da estatística teste estão indicadas na figura 8.8, para o nível de significância desejado. Como o valor de t calculado na amostra cai na região de rejeição de H_0, concluímos, ao nível de significância de 5%, que o conteúdo de hemoglobina diminui com a aplicação de 20 mg de niacina.

Podemos, facilmente, obter o nível mínimo significativo do teste, determinando a probabilidade de se encontrar um valor igual ou mais extremo do que 2,655 devido ao acaso. Com o auxílio de um programa estatístico, este valor é dado por,

$$P(t > 2,655) = 0,016352.$$

Portanto, a probabilidade de que esse resultado tenha ocorrido devido ao acaso, é de apenas 1,64%. Como este valor é menor do que os 5% fixado pelo pesquisador, rejeitamos a hipótese nula.

Importante: devemos tomar muito cuidado quando estamos usando um programa estatístico para fazer um teste de hipótese, no sentido de verificar se o programa está fazendo um teste bilateral ou unilateral. Por exemplo, o programa Statistica, para o exemplo em estudo, fornece um *valor p* de 0,032665, ou seja, está considerando um teste bilateral. Neste caso, devemos dividir 0,032665 por 2 para obtermos o *valor p* correto.

O intervalo de confiança para μ_D é dado por:

$$\begin{aligned} IC(\mu_D; 95\%) &: 1,15 \pm 2,365\frac{1,225}{\sqrt{8}} \\ &: 1,15 \pm 1,0243 \\ & 0,1257 \leq \mu_D \leq 2,1743. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Observe que o valor de t vale 2,365, obtido diretamente na tabela para $\alpha = 5\%$, pois o intervalo de confiança é bilateral, assim como a tabela por nós utilizada.

Teste para Comparação de Duas Médias, de Amostras Independentes e Variâncias Desconhecidas e Supostas Iguais

Como vimos, o procedimento de teste de hipóteses sempre segue uma mesma sequência, o que muda é a estatística amostral de interesse do pesquisador e a estatística de teste a ser utilizada.

Vamos supor que as amostras sejam independentes, oriundas de duas populações com distribuição normal e que as variâncias das duas populações são desconhecidas e, portanto, precisam ser estimadas, e que não difiram muito em ordem de grandeza.

Para sabermos se duas variâncias podem ser consideradas iguais, ou seja, se existe *homogeneidade de variâncias*, é necessário que se proceda a um teste de hipóteses sobre as variâncias populacionais. Portanto, inicialmente, vamos testar a hipótese de homogeneidade de variâncias e, em seguida, dado que aceitamos que as variâncias são iguais, vamos testar a hipótese de igualdade entre as médias das duas populações. O teste de comparação de duas médias, quando as variâncias são desiguais ou heterogêneas, será apresentada na próxima seção. A comparação entre variâncias é feita com o uso do *teste F*, o qual passamos a estudar.

Teste F para Comparação de Variâncias Populacionais

Como qualquer outro teste, devemos sempre iniciar pela formulação das hipóteses, que nesse caso são dadas por,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad versus \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

Onde σ_1 e σ_2 são as variâncias da população 1 e população 2, respectivamente. A hipótese nula admite que as duas populações tem a mesma variância. Observe que na hipótese sempre temos os parâmetros. A hipótese alternativa admite que a variância da população 1 é maior do que a variância da população 2, ou seja, as variâncias são heterogêneas. Portanto, vamos aqui, sempre fazer um teste unilateral.

Quando desejamos comparar variâncias, devemos utilizar a estatística F, dada pelo quociente entre as duas estimativas de variâncias, s_1^2 e s_2^2, de σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente, distintas e supostas independentes. Temos,

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \tag{8.4}$$

As variâncias s_1^2 e s_2^2 são calculadas com os n_1 e n_2 dados das amostras, respectivamente. Assim, dizemos que a s_1^2 estão associados $n_1 - 1$ graus de liberdade (numerador) e, da mesma forma, para s_2^2 estão associados $n_2 - 1$ graus de liberdade (denominador). Vamos admitir sempre que s_1^2 é maior do que s_2^2, ou seja, no numerador vamos usar a variância maior, de tal modo que tenhamos $F \geq 1$.

A conclusão do teste pode ser feita através do nível mínimo significativo (*valor p*). Se este valor for bastante baixo, digamos, menor do que 5%, rejeitamos a hipótese nula, caso contrário, não rejeitamos. Outra forma é fazer a comparação do valor de F, calculado com os dados das amostras ($F_{calculado}$), e o valor de F crítico, obtido na tabela da distribuição F, dada no apêndice 6, com $n_1 - 1$ graus de liberdade no numerador e $n_2 - 1$ graus de liberdade no denominador, e com um nível α de probablidade fixado pelo pesquisador. Então, por este procedimento, rejeitamos H_0 se $F_{calculado} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$. A tabela fornecida no apêndice 6 apresenta o nível de significância (α) fixado em 5%. Existem tabelas para outros valores de α. Porém, os programas estatísticos já nos fornecem as probabilidades, através da distribuição de F, ou o *valor p* do teste.

Exemplo 1. As produções de duas variedades de milho, em toneladas por hectare, foram as seguintes:

Variedade A	1,3	1,4	1,1	1,4	1,5
Variedade B	1,8	1,6	1,9	1,9	1,8

Dos dados das amostras obtemos, $\bar{x}_A = 1,34$, $\bar{x}_B = 1,80$, $s_A^2 = 0,0231$ e $s_B^2 = 0,0150$. Inicialmente, vamos testar a hipótese de homogeneidade de variâncias. Assim, o valor da estatística F é,

$$F = \frac{0,0231}{0,0150} = 1,54,$$

a qual tem $5 - 1 = 4$ graus de liberdade no numerador e $5 - 1 = 4$ graus de liberdade no denominador. Com o auxílio de um programa estatístico, encontramos que o nível mínimo significativo vale exatamente: $P(F > 1,54) = 0,343$. Como este valor é maior do que 0,05 ou 5%, concluímos que as duas variâncias podem ser consideradas iguais.

Podemos fazer o teste de homogeneidade de variâncias pelo método tradicional, ou seja, fixando o nível de significância e construindo as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese de nulidade. Com o auxílio da tabela da distribuição F (apêndice 6), com um nível de significância de 5%, com 4 e 4 graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente, obtemos o valor de F crítico como sendo igual a 6,39. Como o valor de $F_{calculado}$ é menor do que o F crítico (1,54 ¡ 6,39), aceitamos a hipótese nula, portanto, as variâncias são homogêneas. A região de rejeição é formada pelos valores de F maiores que 1,54 e, a região de aceitação é formada pelos valores de F menores ou igual a 1,54.

Voltemos, agora, ao objetivo do pesquisador, que é verificar se duas médias populacionais podem ser consideradas iguais ou não. No exemplo, as hipóteses são dadas por:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad versus \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B.$$

Para estudar se duas médias populacionais são iguais ou não, a estatística teste a ser utilizada é dada por:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right]}} \tag{8.5}$$

a qual tem distribuição t de Student com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade. Vamos aplicar o teste no exemplo das duas variedades de milho. A estatística de teste 8.5 vale,

$$t_8 = \frac{(1,34 - 1,80) - 0}{\sqrt{\frac{(5-1)0,0231+(5-1)0,0150}{5+5-2}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right]}} = \frac{-0,46}{\sqrt{0,0191(0,40)}} = -5,263.$$

Com o auxílio da tabela (bilateral) da distribuição de Student, para um teste bilateral, com 8 graus de liberdade, o nível mínimo significativo vale,

$$P(t < -5,269) + P(t > 5,269) < 0,001.$$

Para obter este valor de probabilidade, entramos na tabela com 8 graus de liberdades (1$\underline{a}$ coluna). Seguimos pela linha dos 8 graus de liberdade até encontrar um valor igual ou mais próximo de 5,263. O valor mais próximo encontrado é 5,041, cuja probabilidade vale 0,001. Como o valor encontrado da estatística teste (5,263) é menor do que 5,041, implica que o valor da probabilidade é menor do que 0,001.

Usando um software estatístico, para 8 graus de liberdade, teste bilateral, obtemos exatamente a $P(|t| < -5,269) =, 000756$ ou 0,0756%, portanto, devemos rejeitar a hipótese nula, e concluímos que as produções das duas variedades diferem entre si, sendo que a cultivar B é mais produtiva, ao nível de significância de 0,0756%.

Podemos, também, realizar o teste de hipótese pela maneira tradicional. Neste caso, devemos fixar o nível de significância desejado, encontrar as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula e verificar em qual das regiões está o valor da estatística de teste. Por exemplo, para $\alpha = 5\%$, da tabela da distribuição t (teste bilateral), obtemos, $t_{8;5\%} = 2,306$. As regiões estão mostradas na figura 8.9. Como o valor da estatística teste, $t = -5,269$, está na região de rejeição da hipótese nula, concluímos que as médias diferem entre si, com probabilidade de erro de 5%.

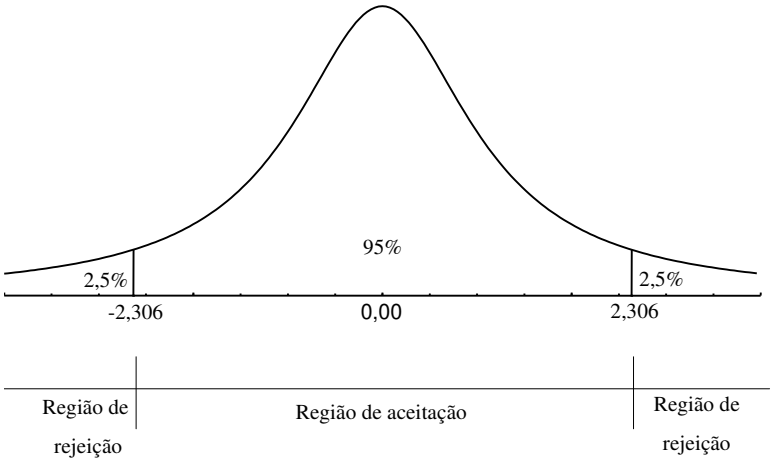


Figura 8.9: Teste de hipótese para comparar duas médias dos dados de produção de duas variedades de milho

Podemos calcular o intervalo de confiança para a diferença entre as médias, $\mu_A - \mu_B$. O intervalo de confiança é dado pela expressão,

$$IC(\mu_A - \mu_B; 95\%) : (\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm t_{n_A+n_B-2;5\%} s_{\bar{x}_A - \bar{x}_B},$$

onde $s_{\bar{x}_A - \bar{x}_B}$ é o desvio padrão da diferença entre as duas médias, e é dado por:

$$\sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}\left[\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right]}.$$

Para o exemplo, o intervalo de confiança é dado por,

$$\begin{aligned} IC(\mu_A - \mu_B; 95\%) &: -0,46 \pm 2,306(0,0873) \\ &: -0,46 \pm 0,20131 \\ & -0,6613 \leq \mu_A - \mu_B \leq -0,2587. \end{aligned}$$

Portanto, podemos afirmar com 95% de confiança, que a verdadeira diferença entre as duas médias encontra-se no intervalo de -0,6613 e -0,2587.

O intervalo de confiança também nos indica se existe ou não diferença significativa entre as duas médias, ou seja, ele nos fornece o resultado de um teste de hipótese. Nós devemos aceitar a hipótese nula, $H_0 : \mu_A = \mu_B$, se o valor desta hipótese, encontra-se dentro do intervalo de confiança, caso contrário, devemos rejeitar a hipótese nula. Se $H_0 : \mu_A = \mu_B$, então $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$, portanto, o valor da hipótese é 0 (zero). Como vemos, o valor da hipótese, não está incluído no intervalo, isso implica que devemos rejeitar a hipótese nula.

Como o teste de hipótese é oriundo do intervalo de confiança, estamos seguros para utilizar esse critério.

Exemplo 2. Os tempos gastos na manobra dos arados Fuçador e Erechim, foram os seguintes:

Fuçador	0,20	0,22	0,18	0,23	0,12	0,20	0,13	0,12	0,13	0,22	0,17
Erechim	0,36	0,48	0,33	0,43	0,40	0,43	0,33	0,36	0,35	0,40	0,35

Espera-se que o arado Fuçador produza melhores resultados (gaste menos tempo na manobra). Testar a hipótese de que as médias de tempos gasto não diferem significativamente ao nível de 5%. Encontre o intervalo de confiança para a diferença das médias $\mu_F - \mu_E$.

Com os dados amostrais obtemos: $\bar{x}_F = 0,1745$, $\bar{x}_E = 0,3836$, $s_F^2 = 0,0018$ e $s_E^2 = 0,0023$.

O primeiro passo é verificarmos se existe homogeneidade de variâncias, ou seja, vamos testar as hipóteses, $H_0 : \sigma_F^2 = \sigma_E^2$ vs $H_1 : \sigma_E^2 > \sigma_F^2$. A estatística F vale, $F = s_E^2/s_F^2 = 0,0023/0,0018 = 1,2778$, com 10 graus de liberdade no numerador e 10 graus de liberdade no denominador. Com o auxílio de um programa estatístico, na distribuição F, obtemos o nível mínimo significativo do teste (*valor p*), o qual vale,

$$P(F > 1,2778) > 0,352869.$$

De acordo com esse resultado, devemos aceitar a hipótese de variâncias semelhantes.

Fazendo o teste de outra forma; podemos fixar α em 5% e encontrar o valor de F, com 10 (numerador) e 10 (denominador) graus de liberdade. Da tabela de F, encontramos $F_{10;10;5\%} = 2,98$. Como o valor de F calculado com os dados da amostra é menor do que o valor de F da tabela, aceitamos a hipótese nula.

Partimos, agora, para o teste sobre as médias populaionais. As hipóteses sobre as médias verdadeiras, de interesse do pesquisador, são formuladas como:

$$H_0 : \mu_F = \mu_E \qquad H_1 : \mu_F < \mu_E.$$

O valor da estatística 8.5, vale:

$$t_{20} = \frac{(0,1745 - 0,3836) - 0}{\sqrt{\left[\frac{(11-1)0,0018+(11-1)0,0023}{11+11-2}\right]\left[\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\right]}} = -10,831.$$

A probabilidade de encontrar um valor mais extremo do que -10,831, devido ao acaso, é praticamente nulo, ou seja,

$$P(t < -10,831) \cong 0.$$

Concluímos que o tempo gasto na manobra com o arado Fuçador é realmente inferior ao arado Erechim.

Pelo método tradicional de testar uma hipótese, temos: $t_{20;5\%} = -1,725$. Como o valor de t calculado é menor do que o valor de t de tabela, rejeitamos a hipótese nula.

O intervalo de confiança de 95%, para a diferença entre as duas médias, é dado por:

$$\begin{aligned} IC(\mu_F - \mu_E; 95\%) \quad &: \quad -0,2091 \pm 2,086(0,01931) \\ & \quad -0,2494 \leq \mu_F - \mu_E \leq -0,1688. \end{aligned}$$

Concluímos, com confiança de 95%, que a verdadeira diferença entre as duas médias $\mu_F - \mu_E$, está entre 0,17 e 0,25.

Teste para Comparação de Duas Médias, de Amostras Independentes e Variâncias Desconhecidas e Supostas Desiguais

Suponhamos que as amostras sejam oriundas de duas populações com distribuição normal, independentes e variâncias heterogêneas e desconhecidas, portanto, precisam ser estimadas com os valores da amostra. Neste caso, a estatística de teste da diferença entre duas médias, é dada por:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{8.6}$$

Prova-se que esta variável tem uma distribuição *aproximada* de Student, com graus de liberdade corrigido, dados por:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

Exemplo 1. Em um centro agrícola, deseja-se testar o efeito de determinado fertilizante sobre a produção de trigo. Para isso, escolheram-se 24 áreas de terra, cada uma com $5 \times 2 = 10m^2$, de uma grande área homogênea. Metade dessas unidades são tratadas com um fertilizante, enquanto a outra metade não recebe o fertilizante, este é denominado de tratamento controle. A produção média de trigo sem fertilizante foi de 1260 kg/ha com desvio padrão de 730 kg/ha, enquanto que a produção média com fertilizante foi de 1710 kg/ha com desvio padrão de 280 kg/ha. Podemos afirmar que houve aumento significativo na produção de trigo devido a utilização do fertilizante?

Antes de fazermos o teste sobre as médias populacionais, devemos verificar se as variâncias são homogêneas ou não, para decidirmos qual estatística t devemos usar, 8.5 ou 8.6?. Para

isso, vamos utilizar a estatística F, dada em 8.4, que no exemplo, vale, $F = 532900/78400 = 6,7972$, com 11 (numerador) e 11(denominador) graus de liberdade. A probabilidade de encontrar um valor maior do que 6,7972, devido ao acaso é, $P(F > 6,7972) =, 001790$, menor do que 5%, portanto, concluímos que as variâncias são consideradas diferentes.

As hipóteses, sobre a médias populacionais, são formuladas do seguinte modo:

$$H_0 : \mu_F = \mu_C \qquad H_1 : \mu_F > \mu_C.$$

De acôrdo com a hipótese alternativa, o nosso teste é unilateral. O valor da estatística t, é:

$$t = \frac{(1710 - 1260) - (0)}{\sqrt{\frac{532900}{12} + \frac{78400}{12}}} = 1,99,$$

com graus de liberdade,

$$v = \frac{\left(\frac{532900}{12} + \frac{78400}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{532900}{12}\right)^2}{11} + \frac{\left(\frac{78400}{12}\right)^2}{11}} = 14,17 \cong 15.$$

Da distribuição t, com 15 graus de liberdade, o valor da probabilidade de encontrar um valor mais extremo do que 1,99 vale,

$$P(t > 1,99) = 0,032570.$$

Concluímos que o uso de fertilizante provocou um aumento real na produção de trigo, ao nível de significância de 3,26%.

Fazendo o teste pelo método tradicional. Fixando-se o nível de significância (α) em 5%, obtemos da distribuição t de Student, $t_{15;5\%} = 0,01753$. Como o valor calculado com os dados da amostra ($t = 1,99$) é maior do que o da distribuição t de Student, rejeitamos H_0, consequentemente, podemos afirmar, ao nível de significância de 5%, que o uso de fertilizante causa um acréscimo significativo na produção.

Exemplo 2. As seguintes medidas de *Cytochrome oxidase* foram determinadas em machos de peixes Periplaneta em mm^3 por 10 minutos por miligrama,

Tratamentos	tamanho amostra	média	desvio padrão	variância
24 horas após injeção de methoxyclor	5	24,8	0,9	0,81
Controle	3	19,7	2,8	7,84

Verifique se existe efeito significativo da aplicação de methoxyclor quanto as médias de *Cytochrome oxidase*.

Como primeiro passo, vamos aplicar o teste F, para verificar as hipóteses: $H_0 : \sigma_T^2 = \sigma_C^2$, versus $H_1 : \sigma_T^2 < \sigma_C^2$. A estatística F vale, $F = 7,84/0,81 = 9,68$, com 2 e 4 graus de liberdade. A $P(F > 9,68) = 0,0293$, consequentemente, concluímos que as variâncias são heterogêneas. Para a comparação entre as duas médias vamos usar a estatística 8.6.

As hipóteses, sobre as médias verdadeiras, são dadas por:

$$H_0 : \mu_T = \mu_C \qquad H_1 : \mu_T \neq \mu_C.$$

O valor da estatística dada em 8.6 é:

$$t = \frac{(24,8 - 19,7) - 0}{\sqrt{\frac{0,81}{5}\frac{7,84}{3}}} = 3,06,$$

com, graus de liberdade,

$$v = \frac{\left(\frac{0,81}{5} + \frac{7,84}{3}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0,81}{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{7,84}{3}\right)^2}{2}} = 2,25 \cong 3.$$

A probabilidade de encontrarmos um valor de t mais extremo do que 3,06 é,

$$P(|t| > 3,06) = P(t < -3,06) + P(t > 3,06) = 0,054993 = 5,5993\%.$$

Portanto, ao nível de significância de 5%, devemos aceitar a hipótese nula. Pelo método tradicional, temos $t_{3;5\%} = 3,182$, portanto, o valor 3,06 cai na região de aceitação de H_0.

O intervalo de confiança para a verdadeira diferença entre as duas médias fica,

$$\begin{aligned} IC(\mu_T - \mu_C; 95\%) &: (24,8 - 19,7) \pm 3,182(1,6659) \\ &: 5,10 \pm 5,3010 \\ &\quad -0,2010 \leq \mu_T - \mu_C \leq 10,4010. \end{aligned}$$

Concluímos, com confiança de 95%, que a verdadeira diferença entre as duas médias está entre -0,20 e 10,40. Como o intervalo inclui o valor da hipótese nula, devemos aceitá-la.

8.5 Teste Para Proporções

Aqui, desejamos avaliar certas afirmações feitas sobre proporções ou porcentagens populacionais. Vamos considerar o estudo de teste de hipóteses sobre proporções em duas situações, quais sejam: 1) teste para uma proporção populacional e 2) teste para duas ou mais proporções.

8.5.1 Teste Para Uma Proporção Populacional

Feita uma afirmação sobre uma proporção, desejamos saber se os dados de uma amostra suportam ou não tal afirmação. Por exemplo, verificar se a afirmativa de que 20% dos indivíduos de uma comunidade apresentam certa característica genética.

A construção de um teste de hipótese para uma proporção, segue o mesmo procedimento mostrado para o teste sobre uma média. A hipótese nula afirma que a proporção verdadeira, π, é igual a um certo valor π_0. Então,

$$H_0 : \pi = \pi_0.$$

Para a hipótese alternativa, devemos escolher adequadamente uma, dentre as três possibilidades:

$$\begin{aligned} H_1 &: \pi \neq \pi_0 \quad \text{(teste bilateral)} \\ H_1 &: \pi > \pi_0 \quad \text{(teste unilateral à direita)} \\ H_1 &: \pi < \pi_0 \quad \text{(teste unilateral à esquerda).} \end{aligned}$$

Como vimos no estudo de distribuição amostral de uma proporção ou de contagens, a estatística P (a proporção da amostra), segue aproximadamente uma distribuição normal para n suficientemente grande, isto é,

$$P : N\left(\pi; \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right).$$

Portanto, para se testar uma proporção, vamos usar a estatística Z, dada por:

$$z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}. \tag{8.7}$$

Para testar se p é significativamente menor do que o valor estabelecido na hipótese, π_0, calculamos a probabilidade da variável aleatória normal padrão Z, assumir um valor menor ou igual ao valor de z obtido com os dados da pesquisa. Quando a hipótese alternativa é $H_1 : \pi < \pi_0$, esta probabilidade é $P(Z \leq z)$, a qual pode ser obtida em tabelas da distribuição normal (Apêndice 3), ou através de programas estatísticos. A hipótese de nulidade H_0 será rejeitada se este valor p for bem pequeno, digamos inferior a 5%. Da mesma forma, se a hipótese alternativa for $H_1 : \pi > \pi_0$, a hipótese nula (H_0), será rejeitada se a $P(Z \geq z)$ for bem pequena. Se a hipótese alternativa for bilateral, isto é, $H_1 : \pi \neq \pi_0$, então valores grandes negativos ou valores grandes positivos de z, são fortes indicativos para a rejeição da

hipótese nula. Neste caso a hipótese nula será rejeitada se $P(Z \leq -z) + P(Z \geq z)$, a qual é igual a $2P(Z \geq |z|)$ for pequena.

Exemplo 1. O rótulo de uma caixa de sementes informa que a porcentagem de germinação é de 90%. Entretanto, como a data limite de validade já foi ultrapassada, acredita-se que a porcentagem de germinação seja inferior a 90%. Faz-se um experimento e, de 400 sementes testadas, 350 germinaram. Ao nível de significância de 10%, rejeita-se a hipótese de que a porcentagem de germinação é de 90%? Determine o intervalo de confiança para o verdadeiro poder germinativo.

As hipóteses ficam:

$$H_0 : \pi = 90\% \qquad H_1 : \pi < 90\%.$$

Como o tamanho da amostra é suficientemente grande, assumimos que:

$$P : N\left(0,90; \frac{0,90(0,10)}{400}\right).$$

Temos, na amostra, $p = 350/400 = 0,875$ e $\sigma_P = \sqrt{\frac{0,90(0,10)}{400}} = 0,015$. A estatística Z vale,

$$z = \frac{p - \pi_0}{\sigma_P} = \frac{0,875 - 0,90}{0,015} = -1,67.$$

A probabilidade de se encontrar um valor de z menor do que -1,67, devido ao acaso, é (valor encontrado com o uso de um software estatístico e teste unilateral. Aprendemos a fazer este cálculo de probabilidade, usando a tabela da distribuição normal padrão, na subseção 5.3.2):

$$P(z < -1,67) = 0,04746.$$

Como este valor é menor do que 0,10, rejeitamos a hípótese de que o poder germinativo de uma caixa de sementes é de 90% em favor da hipótese de que o poder germinativo é menor do que 90%, ao nível de significância de 10%.

Pelo método tradicional de se fazer teste de hipótese, para $\alpha = 10\%$, com o auxílio da tabela da distribuição normal padrão, dada no apêndice 3, temos $z = -1,28$. A figura 8.10 indica as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese de nulidade. Como o valor -1,67 encontra-se na região de rejeição, concluímos que o poder germinativo é menor do que 90%, ao nível de significância de 10%.

O intervalo de confiança para a verdadeira proporção de germinação, dado em 7.5, é:

$$0,875 \pm 1,65\sqrt{\frac{0,875(1-0,875)}{400}}$$

$$0,875 \pm 0,0273$$

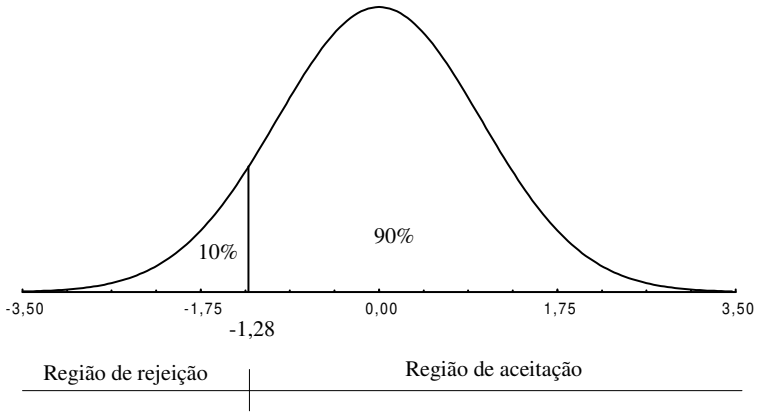


Figura 8.10: Teste de hipótese de uma proporção pelo método tradicional

$$0,8477 \leq \pi \leq 0,9023.$$

Exemplo 2. Um(a) Biólogo(a), com base em conhecimentos teóricos e práticos, afirma que a proporção (π) de forófitos no estádio arbóreo pioneiro da Floresta Ombrófila na Ilha de Santa Catarina, apresenta 47% sem bromélias. Numa amostra de 35 forófitos, $p = 40\%$ não apresentaram bromélias. Teste a afirmativa do(a) Biólogo(a). (Formular as hipóteses do teste, calcular o *valor p* e concluir).

Hipóteses:

$$H_0 : \pi = 47\% \qquad H_1 : \pi \neq 47\%$$

Cálculo do *valor p*:

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi}{1-\pi}}} = \frac{0,40 - 0,47}{\sqrt{\frac{0,47(1-0,47)}{35}}} = -0,8297$$

$$p(z \geq 0,8297) = 0,5 - 0,2967 = 0,2033 \Rightarrow \text{valor p} = 2 \times \ 0,2033 = 0,4066$$

Portanto, não rejeitamos a hipótese nula.

8.5.2 Teste de Duas ou Mais Proporções (Teste de Qui-Quadrado)

Nos trabalhos de pesquisa, é muito freqüente os dados representarem freqüências (contagens) de ocorrências de determinada característica, que podem classificar-se em categorias de variáveis qualitativas. Os dados de freqüências, classificados por categorias de variáveis qualitativas, podem ser representados por uma tabela de contingência, como a tabela 8.2. Embora os totais de linhas tenham sido previamente fixados, ou seja, trabalhou-se com 240

Tabela 8.2: Distribuição conjunta das freqüências das variáveis época de plantio/forma de corte e sobrevivência de raízes de ameixeiras

Época-Forma	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora Primavera - Longo	156	84	240
Fora Primavera - Curto	107	133	240
Na Primavera - Longo	84	156	240
Na Primavera - Curto	31	209	240
Total	378	582	960

enxertos para cada grupo, isto não acarreta nenhuma modificação na análise dos dados. Desejamos, aqui, testar a hipótese de independência entre as duas classificações, ou seja, entre a combinação época/forma e a sobrevivência.

Na seção 2.1.3.6, apresentamos em detalhes como calcular a estatística qui-quadrado (χ^2). O leitor deve voltar àquela seção, caso não esteja lembrado do cálculo da estatística. O χ^2 é uma medida de afastamento da hipótese de independência, isso implica que, quanto maior for o valor da estatística, maior é a *associação* ou *grau de dependência* entre as variáveis. O valor de χ^2 para a tabela 8.2 é,

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{i=1}^{rs} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \\
&= \frac{(61,5)^2}{94,5} + \frac{(-61,5)^2}{145,5} + \frac{(12,5)^2}{94,5} + ... + \frac{(63,5)^2}{145,5} \\
&= 141,05.
\end{aligned}$$

O valor de qui-quadrado está entre 0 (zero) e $+\infty$ (mais infinito). O valor 0 indica que a sobrevivência não depende da combinação época de plantio e forma de corte. Quanto maior é o valor do qui-quadrado, mais as freqüências observadas se afastam das freqüências esperadas. Isto indica, que a sobrevivência dos enxertos depende da combinação época de plantio e forma de corte. A questão que devemos responder agora é a seguinte: será que o valor encontrado de $\chi^2 = 141,05$ é grande o suficiente para podermos afirmar que a dependência é significativa, ou não? Para obter a resposta devemos fazer um teste de hipóteses envolvendo a estatística χ^2. Esse teste foi desenvolvido pelo estatístico britânico Karl Pearson em 1960. Inicialmente, vamos formular as hipóteses do teste:

- H_0:a combinação época de plantio e forma de corte *não está* associada com a sobrevivência de raízes.

- H_1: a combinação época de plantio e forma de corte *está* associada com a sobrevivência de raízes.

A estatística que vamos utilizar para fazer o teste de hipótese é dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{rs} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}, \tag{8.8}$$

a qual, segue uma distribuição de qui-quadrado, com $(r-1)(s-1)$ graus de liberdade, onde r é o número de linhas e s é o número de colunas da tabela. Esta distribuição é dada no apêndice 5. Existem diversos pacotes estatísticos que calculam as probabilidades para a distribuição de χ^2 e, nós, faremos o uso desses recursos. Alguns softwares disponíveis são: Statistica, Minitab, Statgraphics, SAS, Excel.

Vamos calcular a probabilidade de encontrar um valor de χ^2, com 3 graus de liberdade, mais extremo do que o encontrado na pesquisa, devido ao acaso. Temos,

$$P(\chi^2 > 141,05) = 0,00001.$$

Portanto, rejeitamos a hipótese nula, e concluímos que a sobrevivência de raízes de ameixeiras depende da combinação entre época de plantio e forma de corte. A probabilidade de estarmos tomando uma decisão errônea é praticamente nula.

Para usar a tabela da distribuição de qui-quadrado, assim como na distribuição de Student, necessitamos fixar o nível de significância (α) do teste e calcular os graus de liberdade da estatística. Para fazer o teste pelo método tradicional, precisamos fixar o nível de significância e, assim, delimitar as regiões de aceitação e de rejeição. Por exemplo, para $\alpha = 5\%$, e três graus de liberdade, da tabela da distribuição de qui-quadrado, obtemos,

$$\chi^2_{3;5\%} = 7,815.$$

A figura 8.11 apresenta as regiões de aceitação e de rejeição da hipótese. Observe que a distribuição de qui-quadrado é assimétrica, diferentemente das distribuições normal e t. Como o valor de $\chi^2 = 141,05$, calculado com os dados observados, é maior do que o valor $\chi^2_{3;5\%} = 7,815$, ou seja, pertence a região de rejeição, chegamos a mesma conclusão ao nível de significância de 5%.

Restrições do Teste de Qui-Quadrado

Dado que a distribuição da estatística de qui-quadrado (8.8), neste caso, é uma distribuição aproximada de χ^2, precisamos tomar certos cuidados na sua aplicação. Um dos cuidados é garantir que não mais de 20% dos valores esperados das caselas sejam inferiores

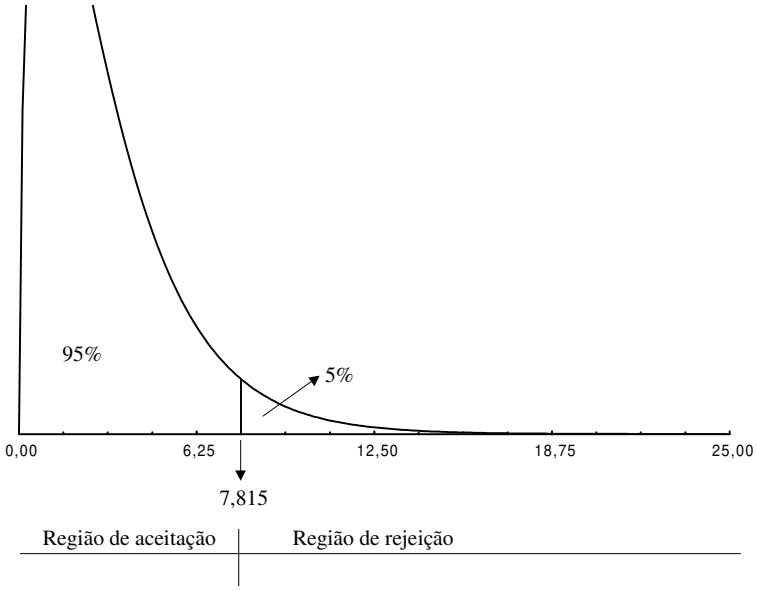


Figura 8.11: Teste de hipótese para comparar proporções de sobrevivência de raízes de ameixeiras

a 5. Se tal condição não se verificar, devemos agrupar uma ou mais linhas (ou colunas), a fim de obter a freqüência esperada mínima. Isto pode prejudicar os objetivos do trabalho. Aumentar o tamanho da amostra é uma alternativa, pois quanto maior for o tamanho da amostra mais a estatística 8.8 se aproxima da distribuição teórica de Qui-Quadrado..

Quando as freqüências esperadas são pequenas (menores do que 5) e a tabela é 2×2, podemos usar o Teste Exato de Fisher. Numa tabela 2×2, nenhuma freqüência esperada deve ser menor que 5.

Para tabelas 2×2, deve-se aplicar uma correção, chamada *correção de continuidade ou correção de Yates*, que consiste em subtrair 0,5, das diferenças entre as freqüências observadas e esperadas, tomadas em módulo. Isto porque em tabelas 2×2, o teste de χ^2 tende a indicar mais significância do que deveria. Com esta correção, diminui-se o valor de χ^2 calculado, melhorando a aproximação com a distribuição teórica de χ^2. A estatística de χ^2 com a correção de continuidade é dada por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{rs} \frac{(|o_i - e_i| - 0,5)^2}{e_i}. \tag{8.9}$$

Exemplo: continuação do exemplo das raízes de ameixeiras. Podemos querer saber se existe diferenças estatísticas entre as duas épocas de plantio, ou seja, verificar se existe diferença entre plantar *na* primavera e *fora* da primavera. Neste caso, vamos construir uma nova tabela de contingência, a partir da tabela 8.2. O resultado (freqüências observadas)

Tabela 8.3: Distribuição conjunta das freqüências das variáveis época de plantio e sobrevivência de raízes de ameixeiras

Época	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora Primavera	263	217	480
Na Primavera	115	365	480
Total	378	582	960

é a tabela 8.3. Os valores das freqüências esperadas, sob a hipótese de independência, são:

Época	Raízes		Total
	Sobreviventes	Mortas	
Fora Primavera	189	291	480
Na Primavera	189	291	480
Total	378	582	960

O valor da estatística 8.9 é:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{rs} \frac{(|o_i - e_i| - 0,5)^2}{e_i} = 28,58 + 28,58 + 18,56 + 18,56 = 94,29.$$

Para um nível de significância de 5% e graus de liberdade igual a (2-1)(2-1)=1, o valor crítico de qui-quadrado vale: 3,841. Portanto, como o valor calculado é maior que o valor crítico, devemos rejeitar a hipótese nula e, assim, podemos afirmar que existe diferença entre as duas épocas de plantio, ao nível de significância de 5%. Temos que 54,8% dos enxertos plantados fora da primavera sobrevivem, enquanto que, na primavera, 24,0% dos enxertos sobrevivem.

O menor valor de α, para o qual rejeitamos a hipótese nula (valor p) é: $P(\chi^2 > 94,29) = 0,00001$. Portanto, a probabilidade de rejeitarmos a hipótese nula, quando deveríamos aceitá-la, é praticamente nula.

Exercício: teste se existe efeito de forma de corte, ao nível de significância de 5%. Encontre o *valor p* do teste.

8.5.3 Teste de Aderência: aplicação à teoria Mendeliana

Uma aplicação importante do teste de χ^2 é verificar se as freqüências observadas seguem (estão de acordo) as proporções previstas por teorias ou hipóteses. Um exemplo clássico, é o caso da segregação mendeliana em ervilhas.

Tabela 8.4: Segregação mendeliana em ervilhas

Tipos de ervilhas	Freqüências observadas	Freqüências esperadas
Amarelas lisas	315	312,75
Verdes lisas	108	104,25
Amarelas rugosas	101	104,25
Verdes rugosas	32	34,75
Total	556	556,00

Na descendência obtida de cruzamentos entre plantas com sementes amarelas lisas e outras de sementes verdes rugosas, obtemos na primeira geração (F1) ervilhas amarelas lisas. Estas, cruzadas entre si, produzem em F2, ervilhas de quatro tipos indicadas na tabela 8.4.

Pela teoria mendeliana, as proporções esperadas para esses tipos de ervilhas são: 9/16, 3/16, 3/16 e 1/16, respectivamente. Com base nessa teoria, calculamos as freqüências esperadas dadas na tabela 8.4. Desejamos testar as seguintes hipóteses através do teste de qui-quadrado:

- H_0 : os dados *concordam* com a teoria mendeliana
- H_1 : os dados *não concordam* com a teoria mendeliana.

A estatística de χ^2 vale,

$$\chi^2 = \frac{(315 - 312,75)^2}{312,75} + \frac{(108 - 104,25)^2}{104,25} + \frac{(101 - 104,25)^2}{104,25} + \frac{(32 - 34,75)^2}{34,75} = 0,47.$$

O valor de χ^2 é bastante baixo, sugerindo que não devemos rejeitar a hipótese nula. Entretanto, devemos encontrar o nível mínimo significativo do teste, o qual vale,

$$P(\chi^2 > 0,47) = 0,925431 = 92,54\%.$$

Este valor é muito superior a 5%, portanto, podemos afirmar que os dados concordam com a teoria mendeliana, ao nível de significância de 92,34%.

Pelo método tradicional, ao nível de significância de 5% e com 3 graus de liberdade, temos:

$$\chi^2_{0,05;3} = 7,81.$$

Como o valor calculado de χ^2 é menor do que o valor da distribuição de χ^2, não rejeitamos H_0. Portanto, as freqüências observadas seguem as proporções estabelecidas por Mendel.

8.6 Exercícios Propostos

1. Sabe-se que a proporção de sementes de soja, com danos mecânicos, provocados pelo beneficiamento, é $\pi = 0,18$. Foram feitas 40 observações durante um dia de trabalho e se constatou que p=0,20. Verificar se a máquina precisa ser regulada, ao nível de significância de 5%.

2. Foram as seguintes as produções médias de duas variedades de soja, em t/ha: variedade A: média=3,8 t/ha com variância = 0,36 $(t/ha)^2$; variedade B: média=4,6 t/ha com variância = 0,04 $(t/ha)^2$. As informações obtidas, para as variedades A e B, foram baseadas em amostras de tamanhos 30 e 35 respectivamente. Teste a hipótese de que não há diferença significativa entre as produções médias, ao nível de 1% de probabilidade.

3.(Lindstrom,1918; Snedecor & Cochran,1972). Em um experimento envolvendo o cruzamento de dois tipos de milho, Lindstrom encontrou quatro tipos distintos: verde(T1), dourado(T2), listras verdes (T3) e lisas verdes e douradas (T4). De acordo com a hereditariedade mendeliana, as probabilidades de obter esses quatro tipos são: 9/16, 3/16, 3/16 e 1/16, respectivamente. Em 1301 indivíduos da segunda geração, Lindstrom encontrou as seguintes frequências:

T1	773
T2	231
T3	238
T4	59
total	1301

Teste a hipótese de que a distribuição segue as leis da hereditariedade Mendeliana, contra a hipótese alternativa de que a distribuição não segue as leis da hereditariedade.

4. Que suposições são feitas acerca das populações de onde se extraem amostras aleatórias independentes, quando se utiliza a distribuição t de Student exata para realizar inferências a respeito da diferença entre médias populacionais?

5. A área foliar média da espécie *Laguncularia rancemosa* do Manguezal do Bairro Santa Mônica (não poluído) é de 50,76 cm^2. Espera-se que a área foliar do Manguezal do Bairro Itacorubi seja maior devido a poluição do ambiente. Para verificar se essa afirmação é verdadeira coletou-se uma amostra de tamanho $n = 20$, do Manguezal do Itacorubi, cujos resultados foram:

39,4	39,6	39,9	45,6	45,6	46,1	46,1	50,2	50,2	51,0
51,2	54,6	54,8	54,6	55,1	55,1	55,5	56,2	66,3	66,5

Tabela 8.5: Poder germinativo de duas cultivares de cebola

Cultivares	Germinação		Total
	Germinaram	Não germinaram	
Bola precoce	392	8	400
Norte 14	381	19	400
Total	773	27	800

a)Esses resultados trazem evidências estatísticas de que houve aumento da área foliar? Use nível de significância de 5%.
b) Construir o intervalo de confiança com 90%, para a verdadeira média da área foliar do Manguezal do Itacorubi. Interpretar o resultado.

6. Faz-se um estudo com o objetivo de conhecer melhor a biologia e a distribuição de fêmeas de *Macrobrachium potiuna* na ilha de Santa Catarina, comparando-se dois locais em condições ambientais diferentes. Para isso coletou-se duas amostras, uma no Córrego do Chico em Ratones (A) e a outra no Poção do Córrego Grande (B). os resultados de comprimento total, em mm, de fêmeas ovígenas, foram:

Local	Amostra	Média	Desvio padrão
Córrego do Chico	30	32,25	3,26
Poção do Córrego	30	20,32	4,02

a) Determinar o intervalo de confiança de 99% para a verdadeira média de comprimento total para cada um dos locais. Interpretar.
b) Qual deve ser o tamanho da amostra para que a amplitude total de um intervalo de 99% de confiança para a média populacional do Poção do Córrego Grande seja no máximo igual a 4 mm?
c) Você diria que a diferença de comprimentos nos dois locais é estatísticamente significante? use $\alpha = 5\%$.

7. Foi conduzido um experimento com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas cultivares de cebola: a) Bola Precoce-Empasc 352 e b) Norte 14. foram utilizadas para o teste de germinação, 4 repetições de 100 sementes, totalizando 400 sementes para cada cultivar. A variável de estudo é o número de sementes que germinaram. os resultados estão apresentados na tabela 8.5. Teste a hipótese de que não há dependência entre cultivares e número de sementes que germinam, ao nível de significância de 5%. De outro modo, poderia perguntar: existe diferença entre as duas cultivares quanto à germinação?

8. Um agricultor que planta frutíferas deseja testar um novo tipo de inseticida, cujo

fabricante garante reduzir os prejuízos causados por certo tipo de inseto. Para verificar essa afirmação do fabricante do inseticida, o agricultor pulveriza 200 árvores com o produto novo e 200 árvores com o produto que normalmente usa, obtendo os resultados:

	Inseticida novo	Inseticida padrão
Produção média (kg/planta)	240	227
Variância	980	820

Estes dados indicam evidência suficiente de que o inseticida novo é melhor do que o padrão (normalmente usado)?

9. Deseja-se testar a hipótese da possibilidade da quantidade de proteínas totais no plasma, depois de determinada operação em portadores de esquistossomose mansônica, ser diferente da quantidade antes da operação. Foi utilizada uma amostra de 17 pacientes, cujos resultados foram:

Paciente	Antes	Depois
1	6,9	6,9
2	7,8	8,6
3	6,6	8,7
4	5,9	7,3
5	7,8	7,8
6	6,4	8,2
7	8,8	9,3
8	7,3	7,3
9	8,0	7,6
10	8,6	7,8
11	7,7	7,6
12	7,9	7,8
13	8,7	8,1
14	5,8	6,8
15	9,2	8,3
16	9,3	10,2
17	8,9	9,1

Faça o teste de hipótese e conclua.

10. Um biólogo está interessado em determinar o diâmetro médio da roseta foliar da bromélia de sol (ambiente de sol). o diâmetro foi medido numa amostra de tamanho $n = 20$,

obtendo-se os seguintes resultados:

7,3	8,2	9,1	3,4	10,5	3,6	9,5	4,8	9,1	6,8
5,2	8,4	5,4	6,6	6,4	5,8	6,6	7,0	4,8	9,1

a) Estime o diâmetro médio da roseta foliar utilizando um intervalo de confiança de 95%.
b) Sabe-se que o diâmetro médio da roseta foliar das bromeliaceas em área sombreada é de 16 cm. Os dados amostrais obtidos evidenciam que as bromélias de sol desenvolvem-se menos do que as de sombra? Faça o teste de hipótese com nível de significância de 5%.
c) Num trabalho futuro com bromélias de sol, determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de, no máximo, 0,70, com probabilidade de 95%.

11. Para comparar o peso vivo e peso jejum do gado Crioulo Lageano, um pesquisador selecionou aleatoriamente uma amostra de 15 animais e anotou o seus pesos. Os dados resultantes estão descritos abaixo. Esses dados têm evidência suficiente para garantir que exite diferença entre peso vivo e peso jejum? Indique o nível mínimo significativo do teste (α).

Animal	Peso vivo	Peso jejum	Animal	Peso vivo	Peso jejum
1	498	453	9	398	353
2	510	466	10	410	380
3	540	491	11	450	412
4	580	480	12	495	453
5	440	405	13	508	462
6	350	315	14	515	477
7	595	557	15	560	505
8	513	477			

12. Realizou-se uma pesquisa para comparar dois locais, Itajaí e Araranguá, quanto à produção de arroz irrigado, em t/ha, na safra 88/89. Dez progênies foram utilizadas nos dois locais e os seus resultados anotados.

Itajaí		Araranguá	
5,3	9,3	6,0	8,4
5,7	9,2	6,3	8,3
7,0	6,9	7,2	7,2
6,2	7,0	6,8	7,3
8,0	6,5	7,8	7,0

Teste a hipótese de igualdade entre as produções médias.

13. Um agrônomo realizou um levantamento para estudar o desenvolvimento de duas espécies de árvores, a bracatinga (*Mimosa scabrella*) e Canafístula (*Peltophorum dubium*). Para esta finalidade foram coletadas duas amostras de tamanhos igual a 30 árvores. Os resultados para altura (dados fictícios), em metros, foram:

Bracatinga						Canafístula					
6,4	7,0	9,0	10,2	16,1	20,1	8,2	10,1	14,1	20,2	25,7	40,1
6,8	8,3	9,1	11,4	16,3	20,3	9,7	10,3	14,2	20,3	30,9	40,2
6,9	8,6	9,3	13,7	17,2	21,4	9,8	11,2	14,4	20,6	35,5	40,5
6,9	8,7	9,9	14,8	18,4	22,8	10,0	13,2	14,8	29,9	38,2	41,8
6,9	8,7	10,1	15,2	20,0	22,8	10,0	13,4	15,9	23,8	40,0	42,3

A hipótese levantada pelo pesquisador é que a Canafístula deve apresentar uma altura média maior do que a Bracatinga. Esses dados indicam evidência suficiente para suportar a hipótese do pesquisador?

14. Um biólogo deseja fazer um estudo para verificar a especificidade do fungo *Gigaspora gigantea* com as plantas *Spartina sp* e *Tibouchina sp*. Foram coletadas 20 amostras de solos em volta da *Spartina sp* e 20 amostras de *Tibouchina sp* e verificada a quantidade de fungo presente. os resultados foram:

Spartina sp				*Tibouchina sp*			
303	78	59	15	305	74	60	18
116	93	43	10	110	95	40	11
117	63	41	5	110	62	40	4
115	63	35	6	112	60	32	9
84	55	25	3	85	53	22	4

Esses dados tem evidência suficiente para indicar uma diferença entre as quantidades médias de *Gigaspora gigantea* encontrada em plantas de *Spartina sp* e *Tibouchina sp*?

15. Para determinar qual de duas cultivares de trigo é mais produtiva, um Centro de Pesquisas em Agricultura selecionou quatro áreas de terra, cada área em uma região recomendada para a produção de trigo no Estado de Santa Catarina. Cada área é totalmente homogênea e foi dividida em duas partes. Foram semeadas as duas cultivares, uma em cada parte da área, através de um sorteio. Entre as regiões deverá haver diferenças de produção.

As produções, em kg/ha, foram:

Município	Cultivares	
	CEP 15-Batouí	CEP 18-Cavera
Abelardo Luz	2912	3854
Chapecó	2528	3295
Campos Novos	3309	3916
Mafra	2324	2548

Qual é a cultivar de trigo mais produtiva? Use nível de significância de 5%. Interpretar.

16. Foi conduzido um experimento, no qual avaliou-se a utilização de uma, duas e três armadilhas (raíz de tayuyá) por 400 m^2, com e sem inseticida para capturar a vaquinha (*Diabrotica speciosa*) na cultura do feijão. Os dados obtidos, relativos ao número de vaquinhas capturadas, foram:

Armadilhas	Inseticida		Total
	Com	Sem	
Uma armadilha	114	197	301
Duas armadilhas	1067	362	1429
Três armadilhas	715	273	988
Total	1896	822	2718

Podemos afirmar que existem diferenças significativas entre o número de armadilhas utilizadas com relação ao uso de inseticida, ao nível de significância de 5%?

17. Um agricultor que planta frutas deseja testar um novo tipo de inseticida, cujo fabricante garante reduzir o prejuízo por danos causados por certo tipo de inseto, consequentemente aumenta a produção. Para verificar essa afirmação do fabricante do inseticida, o agricultor pulveriza 200 árvores com o novo inseticida e 200 árvores com o inseticida normalmente utilizado. O agricultor anotou a produção média por árvore para os dois inseticidas.
a)Formule as hipóteses do teste (H_0 *e* H_1), em termos de médias populacionais.
b) Dê a definição de α para esse experimento.

18. Foi realizado um experimento para avaliar o comportamento "in vitro" da espécie *Mandevilla velutina* (Apocinácea), provenientes de duas regiões diferentes: Cerrado e Restinga. Após isolar os explantes, com um nó com duas gemas axilares, obtidos das plantas matrizes, foi instalado o experimento com delineamento inteiramente casualizado com 20 repetições (20 explantes para o Cerrado e 20 para a Restinga), portanto, temos um total de 40 unidades experimentais. Esse experimento produziu um desvio padrão $s = 1,5611$ com 38 graus de liberdade. A variável utilizada foi a altura em cm dos explantes de *Mandevilla* cultivadas

"in vitro" durante 45 dias, cujos resultados foram:

Cerrado				Restinga			
5,3	3,1	3,0	4,7	3,6	4,3	2,7	5,1
2,5	4,1	4,7	6,4	2,3	3,9	3,9	4,7
5,1	3,7	2,6	2,9	6,0	2,1	5,6	2,1
2,6	5,0	4,2	3,2	2,1	2,4	4,7	6,1
1,2	1,6	4,0	2,1	5,2	2,0	1,9	8,1

a) Teste a hipótese de que não há diferença entre as duas regiões, ao nível de significância de 5%, para altura de explantes de Mandevilla.
b) Construa o intervalo de confiança de 95%, para a diferença das médias populacionais.

19. Foi desenvolvido um estudo para verificar a qualidade dos vinhos em um Estado. Uma propriedade física avaliada nesse estudo foi a estabilidade dos vinhos, dada em 4 categorias: péssima, problemática, regular e aceitável. Numa amostra de 188 garrafas de vinho, foram encontrados os seguintes resultados:

Vinho	Estabilidade				Total
	Péssima	Problemática	Regular	Aceitável	
Branco	8	29	28	7	72
Rosado	10	22	10	3	45
Tinto	29	21	13	8	71
Total	47	72	51	18	188

a) Teste a hipótese de que não há relação (dependência) entre tipos de vinhos e estabilidade.
b) Teste a hipótese de que os vinhos tinto e branco são independentes da estabilidade. Qual dos dois vinhos é pior quanto à estabilidade?

20. Nitrogênio é o elemento mais comum aplicado no solo. Em regiões tropicais, apenas uma parte do nitrogênio aplicado é aproveitado pelas culturas. Informação sobre μ, a porcentagem média de nitrogênio perdido, é importante para pesquisas sobre as condições ótimas de crescimento das plantas. Os dados a seguir descritos, representam a quantidade de nitrogênio perdido (dado em porcentagem do total de nitrogênio aplicado):

10,8	13,5	11,8	9,0	14,7
10,5	8,0	10,0	9,8	10,3
14,0	9,5	8,7	13,8	12,8

a) Faça o teste de hipótese, ao nível de significância de 5%, para verificar se os dados da amostra suportam a hipótese de que a porcentagem média de nitrogênio perdido (μ) é menor

do que 13%.

b) Calcule o *valor p* do teste e interprete.

21. Para verificar a efetividade de um novo tratamento contra infestação de pulgões que atacam as folhas das plantas, em 100 plantas atacadas e tratadas com o novo inseticida, foram encontradas 9 plantas com pulgões depois de uma semana do tratamento. Desejamos saber se os resultados observados justificam a afirmação de que menos de 15% da população de plantas tratadas terão infestação de pulgões. Utilize um nível de significância de 5%. Calcule o *valor p* e interprete.

22. Sabe-se que o mar na Baía Norte, em Florianópolis, é poluído. Os mexilhões do gênero *Perna perna* são animais filtradores, ou seja, alimentam-se de matéria orgânica dissolvida na água. Para mexilhões cultivados em ambiente sem poluição, neste estudo é o local de Sambaqui, admite-se que o peso médio de mexilhões é igual a 30 g. Os valores medidos em 20 mexilhões na Baía Norte foram:

26	26,5	27	28	28,5	29	29,4	31	32	32,5
33,5	34	35	36,4	37,6	38,5	38,7	41	40,6	41,6

Verifique, através de um teste de hipótese, se realmente o peso dos mexilhões na Baía Norte é maior do que em Sambaqui. (Use $\alpha = 0,05$).

Estime, através da construção do intervalo de confiança com 95%, o peso médio populacional de mexilhões na Baía Norte.

23. Queremos comparar dois métodos de poda em plantas de erva-mate, denominados de A e B . Vamos considerar que dispomos de 40 árvores de erveiras numa mata nativa. Considere duas maneiras no planejamento deste experimento:

1. sorteamos 20 árvores aleatoriamente para receber o método A, e as restantes receberam o método B. Após medimos a produção de massa verde de todas as árvores.

2. medimos, inicialmente, os diâmetros dos caules das 40 árvores. Em seguida, numeramos as árvores, em ordem crescente de seus diâmetros, de 1 até 40. Consideremos os 20 pares formados: (1;2), (3;4), (5;6),...,(39;40), e de cada par sorteamos uma árvore para receber o método A, a outra árvore do par recebe o método B. Obtemos, assim, duas amostras de 20 árvores cada. Após medimos a produção de massa verde de todas as árvores.

- Qual o teste estatístico de hipóteses em cada caso?

- Qual dos dois procedimentos você prefereria? Por quê?

24. Foi realizado um estudo para verificar a influência da incidência solar sobre a produção de espiguetas nas gramíneas da espécie *Paspalum notatum* Flügge, conhecida como grama batatais. Levantou-se a hipótese de que a reprodução sexuada da espécie é prejudicada em áreas com menor luminosidade. Com esta finalidade efetuou-se a contagem das espiguetas produzidas pelas plantas em dois locais, quais sejam: adjacentes ao sol e a sombra leve. Os resultados de 20 amostras (plantas) por local foram:

Ambiente iluminado					Ambiente sombra				
44	54	60	60	70	44	47	52	55	57
75	79	80	81	83	59	60	61	62	63
86	88	88	89	90	64	66	67	67	68
91	95	101	107	108	68	69	71	73	76

Teste a hipótese levantada de que a média de espiguetas em local sombreado é menor do que a média em local adjacente ao sol. Use nível de significância de 5%.

25. Se a proporção de nascimentos de filhotes machos da tartaruga *Caretta caretta* for maior do que 0,50 pode indicar algum desequilíbrio ambiental, como, por exemplo, sombreamento da praia. Teste a hipótese de que a proporção de nascimentos de filhotes machos é maior do que 50%, ao nível de significância de 5%, dado que em 200 nascimentos observou-se 120 filhotes machos.

Bibliografia

ALBERTS,B., BRAY,D., JOHNSON,A., LEWIS,J., RAFF,M., ROBERTS,K., WALTER,P. *Fundamentos da biologia celular. Uma introdução à biologia molecular da célula.* Editora Artes Médicas Sul. Porto Alegre, 1999.

BARBETTA,P.A. *Estatística aplicada às ciências sociais.* 4. ed. Florianópolis: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

BATSCHELET,E. *Introdução à matemática para biocientistas.* São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1978.

BOX,G.E.P., HUNTER,W.G., HUNTER,J.S. *Statistics for experimenters.* Canadá: John Wiley, 1978.

BROWN,D., ROTHERY,P. *Models in Biology: mathematics, statistics and computing.* New York: John Wiley & Sons, 1994.

BROWER,J.E., ZAR,J.H. *Fields & Laboratory Methods for General Ecology.* 2. ed. Dubuque, Iowa: WCB, ano???.

BUSSAB,W.O., MORETTIN,P.A. *Estatística básica.* 4. ed. Coleção Métodos Quantitativos. São Paulo: Editora Atual, 1987.

CENTENO,A.J. *Curso de estatística aplicada à biologia.* Goiânia: Editora da Universidade Federal de Goiás, 1982.

FINNEY,D.J. *An introduction to statistical science in agriculture.*

HEATH,O.V.S. *A estatística na pesquisa científica.* v. 1. São Paulo: Editora da USP, 1981.

JUNIOR,P.S., MACHADO,A.A., ZONTA,E.P. da SILVA,J.B. Curso de estatística. v. 1 e 2. Pelotas: Editora Universitária, 1992.

MENDENHALL,N. *Probabilidade e estatística.* v. 1 e 2. Rio de Janeiro: Editora Campos, 1985.

MONTGOMERY,D.D. *Design and analysis of experiments.* 5. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2001.

MORETTIN,L.G. *Estatística básica: probabilidade.* 7. ed. São Paulo: Makron Books,1999.

PERES,C.A., SALDIVA,C.D. *Planejamento de experimentos*. São Paulo - SP. 5º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.

SNEDECOR,G.W., COCHRAN,W.S. *Statistical methods*. 6. ed. Ames: Iowa State Univ., 1972.

SOARES,J.F., FARIAS,A.A., CESAR,C.C. *Introdução à estatística*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Koogan S.A., 1991.

SOARES,J.F., SIQUEIRA,A.L. *Introdução à estatística médica*. 1. ed. Belo Horizonte: Editora da Universidade Federal de Minas Gerais, 1999.

STEEL,R.G.D., TORRIE,J.H. *Principles and procedures of statistics*. New York: Willey, 1960.

TUKEY,J.W. *Exploratory data analysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1971.

VIEIRA,S. *Estatística experimental*. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 1999.

WONNACOTT,T.H., WONNACOTT,R.J. *Estatística aplicada à economia e à admininstração*. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1981.

Apêndice 1
Tabela da distribuição binomial

Tabela 1: Distribuição binomial: probabilidade de cada valor k em função de n e π

n	k	π									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

n	k	π									
		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97
1	0	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500	0,0300
	1	0,5500	0,6000	0,6500	0,7000	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500	0,9700
2	0	0,2025	0,1600	0,1225	0,0900	0,0625	0,0400	0,0225	0,0100	0,0025	0,0009
	1	0,4950	0,4800	0,4550	0,4200	0,3750	0,3200	0,2550	0,1800	0,0950	0,0582
	2	0,3025	0,3600	0,4225	0,4900	0,5625	0,6400	0,7225	0,8100	0,9025	0,9409
3	0	0,0911	0,0640	0,0429	0,0270	0,0156	0,0080	0,0034	0,0010	0,0001	0,0000
	1	0,3341	0,2880	0,2389	0,1890	0,1406	0,0960	0,0574	0,0270	0,0071	0,0026
	2	0,4084	0,4320	0,4436	0,4410	0,4219	0,3840	0,3251	0,2430	0,1354	0,0847
	3	0,1664	0,2160	0,2746	0,3430	0,4219	0,5120	0,6141	0,7290	0,8574	0,9127
4	0	0,0410	0,0256	0,0150	0,0081	0,0039	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,2005	0,1536	0,1115	0,0756	0,0469	0,0256	0,0115	0,0036	0,0005	0,0001
	2	0,3675	0,3456	0,3105	0,2646	0,2109	0,1536	0,0975	0,0486	0,0135	0,0051
	3	0,2995	0,3456	0,3845	0,4116	0,4219	0,4096	0,3685	0,2916	0,1715	0,1095
	4	0,0915	0,1296	0,1785	0,2401	0,3164	0,4096	0,5220	0,6561	0,8145	0,8853
5	0	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1128	0,0768	0,0488	0,0284	0,0146	0,0064	0,0022	0,0005	0,0000	0,0000
	2	0,2757	0,2304	0,1811	0,1323	0,0879	0,0512	0,0244	0,0081	0,0011	0,0003
	3	0,3369	0,3456	0,3364	0,3087	0,2637	0,2048	0,1382	0,0729	0,0214	0,0082
	4	0,2059	0,2592	0,3124	0,3602	0,3955	0,4096	0,3915	0,3281	0,2036	0,1328
	5	0,0503	0,0778	0,1160	0,1681	0,2373	0,3277	0,4437	0,5905	0,7738	0,8587
6	0	0,0083	0,0041	0,0018	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0609	0,0369	0,0205	0,0102	0,0044	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,1861	0,1382	0,0951	0,0595	0,0330	0,0154	0,0055	0,0012	0,0001	0,0000

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97
	3	0,3032	0,2765	0,2355	0,1852	0,1318	0,0819	0,0415	0,0146	0,0021	0,0005
	4	0,2780	0,3110	0,3280	0,3241	0,2966	0,2458	0,1762	0,0984	0,0305	0,0120
	5	0,1359	0,1866	0,2437	0,3025	0,3560	0,3932	0,3993	0,3543	0,2321	0,1546
	6	0,0277	0,0467	0,0754	0,1176	0,1780	0,2621	0,3771	0,5314	0,7351	0,8330
7	0	0,0037	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0320	0,0172	0,0084	0,0036	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,1172	0,0774	0,0466	0,0250	0,0115	0,0043	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,2388	0,1935	0,1442	0,0972	0,0577	0,0287	0,0109	0,0026	0,0002	0,0000
	4	0,2918	0,2903	0,2679	0,2269	0,1730	0,1147	0,0617	0,0230	0,0036	0,0008
	5	0,2140	0,2613	0,2985	0,3177	0,3115	0,2753	0,2097	0,1240	0,0406	0,0162
	6	0,0872	0,1306	0,1848	0,2471	0,3115	0,3670	0,3960	0,3720	0,2573	0,1749
	7	0,0152	0,0280	0,0490	0,0824	0,1335	0,2097	0,3206	0,4783	0,6983	0,8080
8	0	0,0017	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0164	0,0079	0,0033	0,0012	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0703	0,0413	0,0217	0,0100	0,0038	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,1719	0,1239	0,0808	0,0467	0,0231	0,0092	0,0026	0,0004	0,0000	0,0000
	4	0,2627	0,2322	0,1875	0,1361	0,0865	0,0459	0,0185	0,0046	0,0004	0,0001
	5	0,2568	0,2787	0,2786	0,2541	0,2076	0,1468	0,0839	0,0331	0,0054	0,0013
	6	0,1569	0,2090	0,2587	0,2965	0,3115	0,2936	0,2376	0,1488	0,0515	0,0210
	7	0,0548	0,0896	0,1373	0,1977	0,2670	0,3355	0,3847	0,3826	0,2793	0,1939
	8	0,0084	0,0168	0,0319	0,0576	0,1001	0,1678	0,2725	0,4305	0,6634	0,7837
9	0	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0083	0,0035	0,0013	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0407	0,0212	0,0098	0,0039	0,0012	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,1160	0,0743	0,0424	0,0210	0,0087	0,0028	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,2128	0,1672	0,1181	0,0735	0,0389	0,0165	0,0050	0,0008	0,0000	0,0000
	5	0,2600	0,2508	0,2194	0,1715	0,1168	0,0661	0,0283	0,0074	0,0006	0,0001
	6	0,2119	0,2508	0,2716	0,2668	0,2336	0,1762	0,1069	0,0446	0,0077	0,0019

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97
	7	0,1110	0,1612	0,2162	0,2668	0,3003	0,3020	0,2597	0,1722	0,0629	0,0262
	8	0,0339	0,0605	0,1004	0,1556	0,2253	0,3020	0,3679	0,3874	0,2985	0,2116
	9	0,0046	0,0101	0,0207	0,0404	0,0751	0,1342	0,2316	0,3874	0,6302	0,7602
10	0	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0042	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0229	0,0106	0,0043	0,0014	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0746	0,0425	0,0212	0,0090	0,0031	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,1596	0,1115	0,0689	0,0368	0,0162	0,0055	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000
	5	0,2340	0,2007	0,1536	0,1029	0,0584	0,0264	0,0085	0,0015	0,0001	0,0000
	6	0,2384	0,2508	0,2377	0,2001	0,1460	0,0881	0,0401	0,0112	0,0010	0,0001
	7	0,1665	0,2150	0,2522	0,2668	0,2503	0,2013	0,1298	0,0574	0,0105	0,0026
	8	0,0763	0,1209	0,1757	0,2335	0,2816	0,3020	0,2759	0,1937	0,0746	0,0317
	9	0,0207	0,0403	0,0725	0,1211	0,1877	0,2684	0,3474	0,3874	0,3151	0,2281
	10	0,0025	0,0060	0,0135	0,0282	0,0563	0,1074	0,1969	0,3487	0,5987	0,7374
11	0	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0021	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0126	0,0052	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0462	0,0234	0,0102	0,0037	0,0011	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,1128	0,0701	0,0379	0,0173	0,0064	0,0017	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1931	0,1471	0,0985	0,0566	0,0268	0,0097	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000
	6	0,2360	0,2207	0,1830	0,1321	0,0803	0,0388	0,0132	0,0025	0,0001	0,0000
	7	0,2060	0,2365	0,2428	0,2201	0,1721	0,1107	0,0536	0,0158	0,0014	0,0002
	8	0,1259	0,1774	0,2254	0,2568	0,2581	0,2215	0,1517	0,0710	0,0137	0,0035
	9	0,0513	0,0887	0,1395	0,1998	0,2581	0,2953	0,2866	0,2131	0,0867	0,0376
	10	0,0125	0,0266	0,0518	0,0932	0,1549	0,2362	0,3248	0,3835	0,3293	0,2433
	11	0,0014	0,0036	0,0088	0,0198	0,0422	0,0859	0,1673	0,3138	0,5688	0,7153
12	0	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97
	2	0,0068	0,0025	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0277	0,0125	0,0048	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0762	0,0420	0,0199	0,0078	0,0024	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1489	0,1009	0,0591	0,0291	0,0115	0,0033	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,2124	0,1766	0,1281	0,0792	0,0401	0,0155	0,0040	0,0005	0,0000	0,0000
	7	0,2225	0,2270	0,2039	0,1585	0,1032	0,0532	0,0193	0,0038	0,0002	0,0000
	8	0,1700	0,2128	0,2367	0,2311	0,1936	0,1329	0,0683	0,0213	0,0021	0,0003
	9	0,0923	0,1419	0,1954	0,2397	0,2581	0,2362	0,1720	0,0852	0,0173	0,0045
	10	0,0339	0,0639	0,1088	0,1678	0,2323	0,2835	0,2924	0,2301	0,0988	0,0438
	11	0,0075	0,0174	0,0368	0,0712	0,1267	0,2062	0,3012	0,3766	0,3413	0,2575
	12	0,0008	0,0022	0,0057	0,0138	0,0317	0,0687	0,1422	0,2824	0,5404	0,6938
13	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0036	0,0012	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0162	0,0065	0,0022	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0495	0,0243	0,0101	0,0034	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1089	0,0656	0,0336	0,0142	0,0047	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1775	0,1312	0,0833	0,0442	0,0186	0,0058	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000
	7	0,2169	0,1968	0,1546	0,1030	0,0559	0,0230	0,0063	0,0008	0,0000	0,0000
	8	0,1989	0,2214	0,2154	0,1803	0,1258	0,0691	0,0266	0,0055	0,0003	0,0000
	9	0,1350	0,1845	0,2222	0,2337	0,2097	0,1535	0,0838	0,0277	0,0028	0,0004
	10	0,0660	0,1107	0,1651	0,2181	0,2517	0,2457	0,1900	0,0997	0,0214	0,0057
	11	0,0220	0,0453	0,0836	0,1388	0,2059	0,2680	0,2937	0,2448	0,1109	0,0502
	12	0,0045	0,0113	0,0259	0,0540	0,1029	0,1787	0,2774	0,3672	0,3512	0,2706
	13	0,0004	0,0013	0,0037	0,0097	0,0238	0,0550	0,1209	0,2542	0,5133	0,6730
14	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0093	0,0033	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

continua na próxima página

(Probabilidades binomiais) continuação da página anterior

		π									
n	k	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,97
	4	0,0312	0,0136	0,0049	0,0014	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0762	0,0408	0,0183	0,0066	0,0018	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1398	0,0918	0,0510	0,0232	0,0082	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,1952	0,1574	0,1082	0,0618	0,0280	0,0092	0,0019	0,0002	0,0000	0,0000
	8	0,2088	0,2066	0,1759	0,1262	0,0734	0,0322	0,0093	0,0013	0,0000	0,0000
	9	0,1701	0,2066	0,2178	0,1963	0,1468	0,0860	0,0352	0,0078	0,0004	0,0000
	10	0,1040	0,1549	0,2022	0,2290	0,2202	0,1720	0,0998	0,0349	0,0037	0,0006
	11	0,0462	0,0845	0,1366	0,1943	0,2402	0,2501	0,2056	0,1142	0,0259	0,0070
	12	0,0141	0,0317	0,0634	0,1134	0,1802	0,2501	0,2912	0,2570	0,1229	0,0568
	13	0,0027	0,0073	0,0181	0,0407	0,0832	0,1539	0,2539	0,3559	0,3593	0,2827
	14	0,0002	0,0008	0,0024	0,0068	0,0178	0,0440	0,1028	0,2288	0,4877	0,6528
15	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0052	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0191	0,0074	0,0024	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,0515	0,0245	0,0096	0,0030	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,1048	0,0612	0,0298	0,0116	0,0034	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,1647	0,1181	0,0710	0,0348	0,0131	0,0035	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,2013	0,1771	0,1319	0,0811	0,0393	0,0138	0,0030	0,0003	0,0000	0,0000
	9	0,1914	0,2066	0,1906	0,1472	0,0917	0,0430	0,0132	0,0019	0,0000	0,0000
	10	0,1404	0,1859	0,2123	0,2061	0,1651	0,1032	0,0449	0,0105	0,0006	0,0001
	11	0,0780	0,1268	0,1792	0,2186	0,2252	0,1876	0,1156	0,0428	0,0049	0,0008
	12	0,0318	0,0634	0,1110	0,1700	0,2252	0,2501	0,2184	0,1285	0,0307	0,0085
	13	0,0090	0,0219	0,0476	0,0916	0,1559	0,2309	0,2856	0,2669	0,1348	0,0636
	14	0,0016	0,0047	0,0126	0,0305	0,0668	0,1319	0,2312	0,3432	0,3658	0,2938
	15	0,0001	0,0005	0,0016	0,0047	0,0134	0,0352	0,0874	0,2059	0,4633	0,6333

Apêndice 2
Tabela da distribuição de Poisson

Tabela 3: Distribuição de Poisson: probabilidade de cada valor k em função de λ

k	λ												
	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,055	0,06	0,07
0	0,9950	0,9900	0,9851	0,9802	0,9753	0,9704	0,9656	0,9608	0,9560	0,9512	0,9465	0,9418	0,9324
1	0,0050	0,0099	0,0148	0,0196	0,0244	0,0291	0,0338	0,0384	0,0430	0,0476	0,0521	0,0565	0,0653
2	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0008	0,0010	0,0012	0,0014	0,0017	0,0023
3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
k	λ												
	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4
0	0,9139	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,3012	0,2466
1	0,0823	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,3614	0,3452
2	0,0037	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2169	0,2417
3	0,0001	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,0867	0,1128
4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0260	0,0395
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0062	0,0111
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0012	0,0026
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
k	λ												
	1,8	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
0	0,1653	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,2975	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2678	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1607	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0723	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0260	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0078	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0020	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0005	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0001	0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002

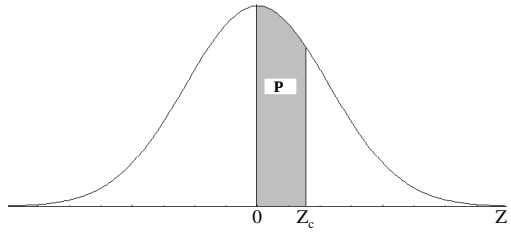
continua na próxima página

(Probabilidades de Poisson) continuação da página anterior

k	λ												
	1,8	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Apêndice 3
Tabela da distribuição normal padrão

Tabela 4: Distribuição normal padrão. P é a probabilidade da variável aleatória Z estar entre 0 e Z_c , ou seja, $Prob(0 \leq Z \leq Z_c) = P$



z	Segunda decimal dos valores de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545

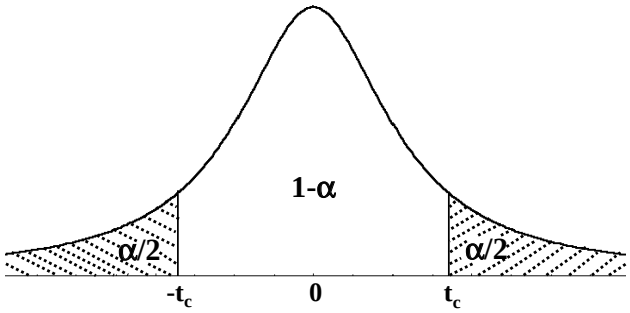
continua na próxima página

(Probabilidades da normal padrão) continuação da página anterior

z	Segunda decimal dos valores de z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Apêndice 4
Tabela da distribuição t de Student

Tabela 5: Distribuição t de Student. Valores críticos de t tais que a probabilidade da variável aleatória t estar entre $-t_c$ e t_c vale *1-*α, ou seja, $P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1 - \alpha$



Graus de	Valores de α								
liberdade	0,30	0,20	0,10	0,05	0,04	0,02	0,01	0,002	0,001
1	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821	63,656	318,289	636,578
2	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925	22,328	31,600
3	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841	10,214	12,924
4	1,190	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,156	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032	5,894	6,869
6	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015

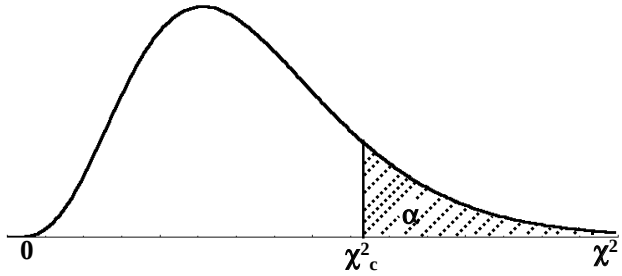
continua na próxima página

(Probabilidades da distribuição t de Student) continuação da página anterior

Graus de	Valores de α								
liberdade	0,30	0,20	0,10	0,05	0,04	0,02	0,01	0,002	0,001
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,058	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,689
28	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,660
30	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646
31	1,054	1,309	1,696	2,040	2,144	2,453	2,744	3,375	3,633
32	1,054	1,309	1,694	2,037	2,141	2,449	2,738	3,365	3,622
33	1,053	1,308	1,692	2,035	2,138	2,445	2,733	3,356	3,611
34	1,052	1,307	1,691	2,032	2,136	2,441	2,728	3,348	3,601
35	1,052	1,306	1,690	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591
40	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551
45	1,049	1,301	1,679	2,014	2,115	2,412	2,690	3,281	3,520
50	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496
55	1,046	1,297	1,673	2,004	2,104	2,396	2,668	3,245	3,476
60	1,045	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460
100	1,042	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626	3,174	3,390

Apêndice 5
Tabela da distribuição de Qui-Quadrado (χ^2)

Tabela 6: Distribuição de Qui-Quadrado. Valores críticos de qui-quadrado tais que a probabilidade da variável aleatória χ^2 ser maior do que χ^2_c vale α, ou seja, $P(\chi^2 \geq \chi^2_c) = \alpha$



Graus de	Valores de α								
liberdade	0,30	0,20	0,10	0,05	0,04	0,02	0,01	0,002	0,001
1	1,074	1,642	2,706	3,841	4,218	5,412	6,635	9,549	10,827
2	2,408	3,219	4,605	5,991	6,438	7,824	9,210	12,429	13,815
3	3,665	4,642	6,251	7,815	8,311	9,837	11,345	14,796	16,266
4	4,878	5,989	7,779	9,488	10,026	11,668	13,277	16,923	18,466
5	6,064	7,289	9,236	11,070	11,644	13,388	15,086	18,908	20,515
6	7,231	8,558	10,645	12,592	13,198	15,033	16,812	20,791	22,457
7	8,383	9,803	12,017	14,067	14,703	16,622	18,475	22,601	24,321
8	9,524	11,030	13,362	15,507	16,171	18,168	20,090	24,352	26,124
9	10,656	12,242	14,684	16,919	17,608	19,679	21,666	26,056	27,877
10	11,781	13,442	15,987	18,307	19,021	21,161	23,209	27,721	29,588
11	12,899	14,631	17,275	19,675	20,412	22,618	24,725	29,354	31,264
12	14,011	15,812	18,549	21,026	21,785	24,054	26,217	30,957	32,909
13	15,119	16,985	19,812	22,362	23,142	25,471	27,688	32,536	34,527
14	16,222	18,151	21,064	23,685	24,485	26,873	29,141	34,091	36,124
15	17,322	19,311	22,307	24,996	25,816	28,259	30,578	35,627	37,698
16	18,418	20,465	23,542	26,296	27,136	29,633	32,000	37,146	39,252

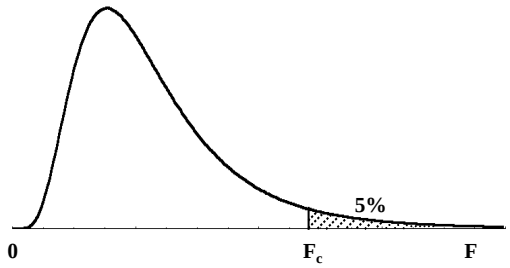
continua na próxima página

(Probabilidades da distribuição de Qui-Quadrado) continuação da página anterior

Graus de	Valores de α								
liberdade	0,30	0,20	0,10	0,05	0,04	0,02	0,01	0,002	0,001
17	19,511	21,615	24,769	27,587	28,445	30,995	33,409	38,648	40,791
18	20,601	22,760	25,989	28,869	29,745	32,346	34,805	40,136	42,312
19	21,689	23,900	27,204	30,144	31,037	33,687	36,191	41,610	43,819
20	22,775	25,038	28,412	31,410	32,321	35,020	37,566	43,072	45,314
21	23,858	26,171	29,615	32,671	33,597	36,343	38,932	44,522	46,796
22	24,939	27,301	30,813	33,924	34,867	37,659	40,289	45,961	48,268
23	26,018	28,429	32,007	35,172	36,131	38,968	41,638	47,392	49,728
24	27,096	29,553	33,196	36,415	37,389	40,270	42,980	48,811	51,179
25	28,172	30,675	34,382	37,652	38,642	41,566	44,314	50,223	52,619
26	29,246	31,795	35,563	38,885	39,889	42,856	45,642	51,627	54,051
27	30,319	32,912	36,741	40,113	41,132	44,140	46,963	53,022	55,475
28	31,391	34,027	37,916	41,337	42,370	45,419	48,278	54,411	56,892
29	32,461	35,139	39,087	42,557	43,604	46,693	49,588	55,792	58,301
30	33,530	36,250	40,256	43,773	44,834	47,962	50,892	57,167	59,702
31	34,598	37,359	41,422	44,985	46,059	49,226	52,191	58,536	61,098
32	35,665	38,466	42,585	46,194	47,282	50,487	53,486	59,899	62,487
33	36,731	39,572	43,745	47,400	48,501	51,743	54,775	61,256	63,869
34	37,795	40,676	44,903	48,602	49,716	52,995	56,061	62,607	65,247
35	38,859	41,778	46,059	49,802	50,928	54,244	57,342	63,955	66,619
40	44,165	47,269	51,805	55,758	56,946	60,436	63,691	70,617	73,403
45	49,452	52,729	57,505	61,656	62,901	66,555	69,957	77,179	80,078
50	54,723	58,164	63,167	67,505	68,804	72,613	76,154	83,656	86,660
55	59,980	63,577	68,796	73,311	74,662	78,619	82,292	90,061	93,167
60	65,226	68,972	74,397	79,082	80,482	84,580	88,379	96,403	99,608

Apêndice 6
Tabela da distribuição F

Tabela 7: Distribuição F: valores críticos de F. A área achurada corresponde a 5% da área total e, representa, a probabilidade de se obter um valor de F maior do que um valor $F_{0,05;n_1-1;n_2-1}$, onde $n_1 - 1$ e $n_2 - 1$ são os graus de liberdade do numerador e denominador, respectivamente.



Graus de liberdade	*Graus de liberdade do numerador*								
do denominador	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59

continua na próxima página

(Probabilidades da distribuicao F) continuação da página anterior

Graus de liberdade do denominador	*Graus de liberdade do numerador*								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21

continua na próxima página

(Probabilidades da distribuicao F) continuação da página anterior

Graus de liberdade do denominador	*Graus de liberdade do numerador*								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	241,88	242,98	243,90	244,69	245,36	245,95	246,47	246,92	247,32
2	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44	19,44
3	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67
4	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82
5	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58
6	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90
7	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47
8	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17
9	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96
10	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80
11	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,69	2,67
12	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57
13	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48
14	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41
15	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35
16	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30
17	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26
18	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22
19	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,20	2,18
20	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15
21	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12
22	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10
23	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08
24	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05
25	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04
26	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02
27	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00
28	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99
29	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97
30	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96

Apêndice 7
Tabela de números aleatórios

Tabela 8: Tabela de números aleatórios

27	07	94	02	42	62	53	83	62	79	15	75	04	91	21	38	34	35	59	13	70	84	98	56	25
42	96	93	24	13	96	82	62	25	57	42	29	23	92	63	53	27	27	10	84	00	34	36	09	04
70	95	03	73	48	56	76	22	91	51	46	53	44	31	76	50	65	69	80	34	30	94	67	20	24
27	81	35	60	34	19	50	21	75	27	98	05	90	10	96	97	12	42	06	62	80	29	07	39	73
09	32	50	76	89	91	84	59	49	09	00	65	86	01	09	12	48	02	87	11	04	06	51	75	77
70	12	86	80	61	01	11	82	78	81	56	16	65	62	70	99	72	39	70	14	09	53	19	86	68
15	64	65	71	71	76	24	05	67	27	54	41	17	35	31	05	91	43	96	57	73	54	44	58	35
81	30	32	73	24	83	96	99	50	62	14	08	47	13	27	15	29	46	97	56	11	01	00	66	80
78	75	03	19	52	60	47	72	34	71	36	56	71	37	91	98	32	02	14	07	43	20	97	09	82
60	33	68	60	92	90	66	36	47	78	80	25	95	29	39	30	26	27	97	68	83	19	99	07	10
63	99	46	22	81	49	07	57	58	29	76	61	33	19	60	42	83	53	25	21	75	80	90	35	80
15	02	13	93	86	97	49	62	84	83	08	30	28	23	25	81	71	21	17	83	02	14	47	24	24
51	35	40	08	38	95	61	33	12	21	38	97	55	44	39	73	08	29	24	13	06	45	47	87	03
25	39	96	35	84	10	74	08	78	15	60	12	46	44	34	94	41	67	29	02	45	80	50	66	78
29	84	49	10	84	68	45	53	43	43	85	11	06	45	99	45	93	60	63	83	65	01	85	73	79
82	26	39	87	76	89	15	92	85	99	74	52	78	68	91	48	91	45	91	85	56	66	97	92	92
90	59	29	64	18	21	85	92	60	82	70	29	85	29	15	86	74	63	68	28	23	96	44	78	00
25	59	50	94	53	24	35	86	25	16	19	85	33	55	39	88	18	79	97	41	77	36	96	50	06
92	53	95	44	88	58	29	83	26	53	32	09	97	77	25	22	07	78	72	09	86	87	82	84	37
98	35	54	71	83	74	60	46	51	22	38	12	26	83	34	82	05	51	59	76	10	48	75	74	10
91	99	67	88	34	54	59	76	44	97	29	73	26	72	67	12	29	17	96	73	17	09	66	75	80
62	09	09	30	45	21	10	55	19	83	74	16	08	08	72	85	80	49	82	65	49	89	49	52	60
94	18	43	36	42	66	04	24	03	92	65	21	05	84	23	14	87	38	17	92	73	49	71	35	83
43	75	50	76	77	21	43	07	94	54	84	08	01	83	00	11	53	52	23	16	85	26	42	81	82

continua na próxima página

continuação da página anterior

14 44 78 26 46 51 23 22 42 70 53 79 42 32 12 20 53 05 32 17 23 96 26 99 29

24 22 31 90 73 75 81 82 42 25 18 42 48 65 79 51 02 68 54 55 90 32 69 29 11
97 34 87 79 10 61 34 44 80 36 37 53 30 67 26 40 88 80 00 00 67 24 09 72 14
35 81 40 66 59 27 41 10 16 68 34 78 88 04 56 81 07 96 70 86 07 27 75 50 65
42 04 38 95 55 86 32 49 52 44 95 77 87 00 45 99 26 07 14 72 89 05 82 05 09
30 00 99 20 59 96 36 98 21 04 44 53 16 90 08 66 85 49 63 76 95 79 00 72 85

18 82 08 05 46 55 11 13 63 06 62 28 43 26 23 54 26 52 53 42 48 44 41 42 99
48 57 16 92 57 82 91 96 04 63 43 40 76 23 83 58 65 23 77 76 24 57 88 00 29
35 36 82 27 32 11 00 32 11 62 36 60 46 76 75 48 78 01 07 57 81 49 29 44 40
37 22 32 84 16 83 22 82 28 52 97 62 55 02 54 83 53 61 83 04 10 91 04 68 36
84 38 83 76 85 94 02 05 20 53 92 96 17 73 10 60 08 68 81 18 35 25 77 92 12

56 23 64 29 17 92 70 93 19 94 19 66 42 72 89 26 85 37 92 00 25 09 71 48 40
09 33 99 94 34 11 34 17 90 53 43 14 10 96 82 49 40 65 45 58 02 36 21 47 42
31 63 35 04 15 76 95 80 81 30 22 95 72 62 79 83 76 25 32 08 80 41 97 16 76
40 08 27 39 70 80 04 10 58 96 70 51 29 36 51 89 33 30 07 60 90 74 51 96 92
21 25 84 89 97 44 70 33 04 19 12 66 72 52 42 49 15 56 21 50 21 99 71 97 10

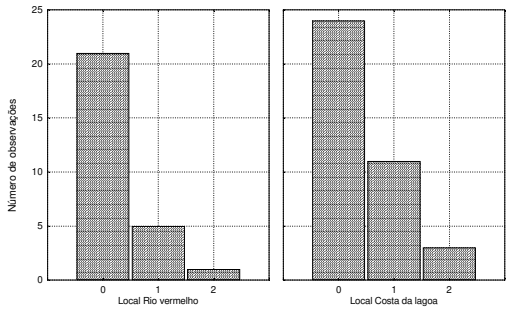


Figura 1: Gráfico da distribuição conjunta de local e aborto

Respostas de Alguns dos Exercícios

Respostas dos exercícios sobre análise exploratória de dados

Respostas dos exercícios da seção 2.1.3.3

1. a)

	Número de abortos			
Local	0	1	2	Total
1	21	5	1	27
2	24	11	3	38
Total	45	16	4	65

b) Resposta figura 1.

2. Veja figura 2.

4. Veja figura 3.

Respostas dos exercícios da seção 2.1.3.5

2. Sim. Para os gripados, 52,17% não foram vacinados, ou seja, mais da metade. Para os não gripados, 59,22% aplicaram duas doses da vacina, ou seja, a maioria dos não gripados foram vacinados.

3. b)30,29% c)56,50%.

4. Não.

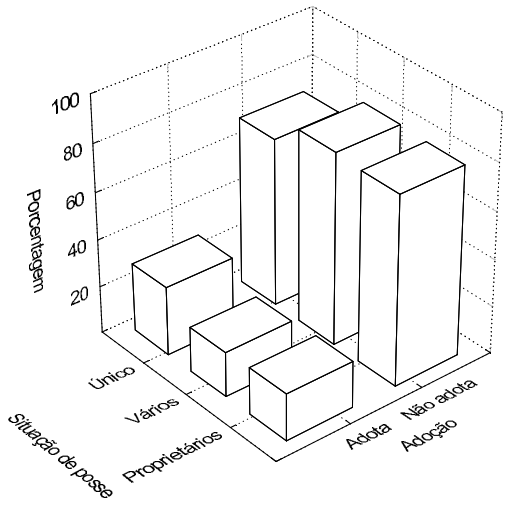


Figura 2: Gráfico da distribuição conjunta da situação de posse e adoção

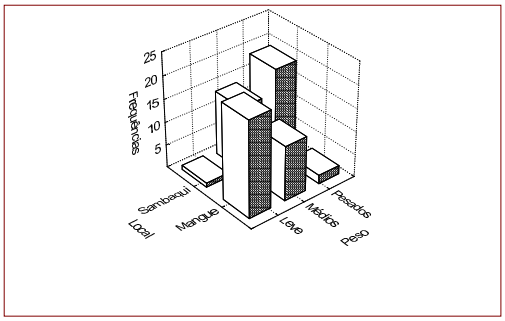


Figura 3: Gráfico da distribuição conjunta do local e peso de mexilhões

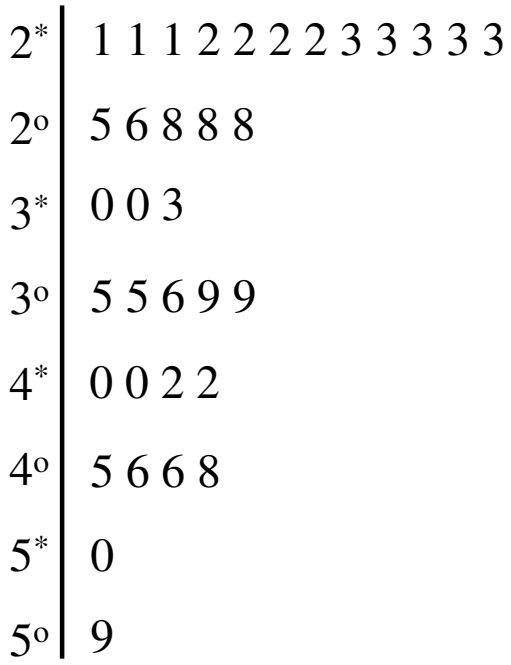


Figura 4: Ramo-e-folhas da duração do primeiro estádio ninfal

6. Sim, pois fixando-se os totais de locais em 100%, verificamos no manguezal que 60% dos mexilhões são leves e somente 5,71% são pesados. Por outro lado, no Sambaqui, verificamos somente 2,94% de leves e 55,88% de pesados. Portanto, no Sambaqui temos animais mais pesados.

Respostas dos exercícios da seção 2.1.3.7

1. C=0,1567 C^*=0,2216. O que demonstra que local e aborto estão fracamente associados.
2. $C = 0,6008$; C^*=0,8496. O que demonstra que porte e hábito estão associados.
4. $C = 0,5634$; $C^* = 0,7967$; $\chi^2 = 32,0898$; $V = 0,6819$.

Respostas dos exercícios da seção 2.1.3.11

2. Ramo-e-folhas na figura 4. a) 30 dias; b) Assimétrica à direita; c) Visualmente não apresenta .

Respostas dos exercícios da seção 2.2.5.1

1. b) *r=0,9840*, portanto existe uma forte dependência entre as duas variáveis.

Respostas dos exercícios da seção 2.2.6.1

1. a) $\hat{y} = 4,777 + 3,780x$; b) $\hat{y}$ =19,33 13,32 12,56 15,70 41,10 47,87.
3. $\hat{y} = 0,005 + 0,005x$; $V_{max} = 200$mmol/min e $K_M = 1,0$mM. Os resultados das taxas de transportes são: 67 mmol/min e 198 mmol/min.

Respostas dos exercícios propostos sobre modelos de probabilidades para experimentos simples, seção 3.9

1) a)$\frac{55}{72}$ b)$\frac{10}{72}$
2) 0,16%. Independência entre os resultados dos blocos.
3) $\frac{2}{625} = 0,32\%$. Idem ao exercício 2.
4) a) 0,77 b) 0,54 c) Os eventos são mutuamente exclusivos.
5) a) 0,0385 b) 0,0925 c) os pares de cromossomos são independentes.
6) i)P(A)=1/2 ii)P(A)=1/3.
7) a)37,5% b)$\frac{0,10}{0,25}$=0,40=40% c)50%.
8) a)$\frac{5}{8}$ b)$\frac{7}{8}$ c)$\frac{3}{4}$.
9) a)$\frac{3}{8}$ b)$\frac{7}{8}$ c)$\frac{5}{8}$ d)$\frac{1}{2}$ e)$\frac{1}{8}$
10) a)$\frac{33}{95}$ b)$\frac{14}{95}$ c)$\frac{48}{95}$
11) $\frac{4}{9}$
12) a)0,00 b)0,65 c)0,70 d)0,0
13) 0,59
14) 0,5952
15) a) 12,5% b) 0,391% c) 0,0198 d) 85,94%
16) 36,23%
17) a)0,6836 b) E(X)=2
18) fazer a tabela
19) a) 0,85 b) 0,45 c) 0,10 d) 0,15
20) a) Não são independentes. $P(F \mid A) \neq P(F)$, altera as probabilidades. b) 85,71% e c)78,57%.

Respostas dos exercícios propostos sobre modelos de probabilidade para variáveis aleatórias discretas, seção 4.9

1) 1,08%
2) $E(X) = np = 156 \times 0,0081 = 1,26$ covas.
3) a) 2,236 bactérias/cm^3 b) 0,95957.
4) E(X)=18 DP(X)=2,7.
5) a) 0,11% b) 0,119%
6) a) 0,94 b)60 c) 2,28 u.m. d)E(X)=0,4 VAR(X)=0,392.
7) a) 4 animais VAR(X)=3,2 animais2 DP(X)=1,8 animais b) 0,4236 c) 0,931.
8) a) E(X)=np=2,4 então, espera-se em média 2,4 machos por ninhada. A proporção média é:2,4/5=0,48. b) Para X=0 76, X=1 351 e X=2 648, X=3 598, X=4 276, X=5 51.
9) a) 0,6454 b) 12 - 27 - 29. c) Concluo que a D. de Poisson está razoavelmente bem adequada a esta situação.
10) $DP(X) = \sqrt{8} = 2,828$. Desvios de 1, 2 ou 3, ocorrem frequentemnte. Desvios maiores que três são raros.
11) a)0,2681 b) 0 rato:13 quadrantes 1 rato:5,36 quad. 2 ratos:1,07 quad.
12) a)55,54% b) 100-55,54%=44,46%
13) a)=24% b)=94,24%.
14) a) Número médio de plantas doentes colhidas = 0,965, logo, proporção média = 0,965/27 = 0,0357 = 3,57% b)Para X=0 11,24; X=1 11,24; X=2 5,41; X=3 1,67 e X=4 0,36 c)Não é muito boa a aproximação. Acreditamos modelo de Poisson seja melhor.
15) $E(X) = n\pi = 8.(1/2) = 4$. P(X=4)=0,27.
16)9,56%
17) Para 15 minutos o parâmetro (Valor médio) vale 5. P(X=5)=0,17546
18) a) 0,1680 b) 0,800852

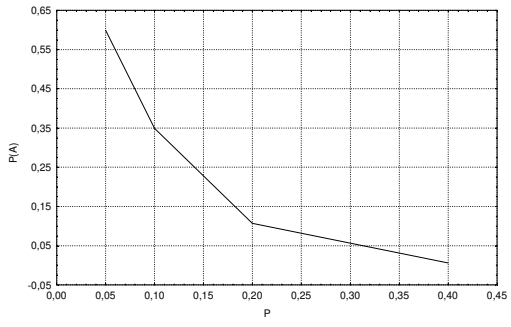


Figura 5: Curva característica de operação (CCO)

19) a)

	Y				
X	0	1	2	3	Total
0	1	0	0	0	1
1	0	2	2	0	4
2	0	2	2	2	6
3	0	2	2	0	4
4	1	0	0	0	1
Total	2	6	6	2	16

b) Não são independentes, pois P(X e Y) não é igual a P(X).P(Y) c) E(X)= 32/16; E(Y)= 24/16; fazendo Z=X.Y temos que E(Z)=48/16, assim COV(X,Y)= 48/16 - (32/16 . 24/16)=-45.

20) P(X=0)=0,0824 $P(X \geq 4) = 0,126$

21) a) 0,107 b) 0,599; 0,349; 0,107 e 0,006. O gráfico é dado na figura 5.

22) 10,72 u.m., que o preço médio por saco da proposta, logo o produtor deve manter seu preço de 20,00 u.m. por saco.

23)0,091603.

24) a) P(X=k)=$\binom{10}{k}0,70^k0,30^{n-k}$. Veja figura 6. b) $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0,00015 = 0,99985$ c) E(X)=7 VAR(X)=2,1.

25) a)0,0337 b)0,9933 c) $P(X = k) = (e^{-5}.5^k)/k!$. Veja figura 7.

26)15,1%.

27) a) 0,086138 b) 0,736098.

28) a) 0,676676 b) 0,323324.

29) a) 73,57% b)26,42%.

30) a) 4.000,00 u.m. para o lote b) 3.952,434 u.m. para o lote. Assim, é melhor a opção A.

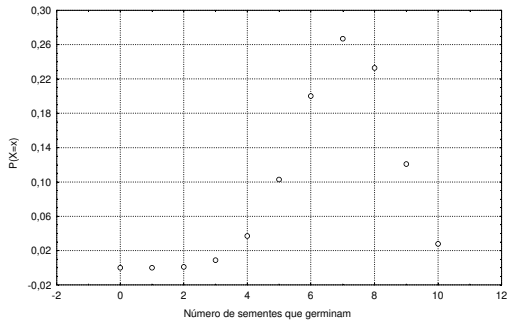


Figura 6: Gráfico da distribuição de probabilidades do número de sementes que germinam

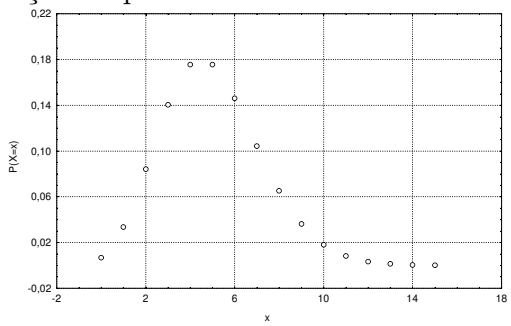


Figura 7: Gráfico da distribuição de probabilidades do número de crianças imunizadas

31) 18,48%
32) a) 11,11% b) 1,333
33) a)

1) Existe n=8 repetições do experimento.
2) Há independência entre os nascimentos.
3) Só há dois tipos de resultados possíveis.
4) π constante, em cada nascimento a probabilidade de sucesso é de 50%.

b) E(X)=4 DP(X)=1,4142 c) 63,6% d)
34) a) 18,47% b) 1,73.
35) a) 11,53% b) 0,00929% c) 73,45%.
36) a) 23,94%
b)

- 1) Cada dia é independente
- 2) Existe n=30 repetições igualmente prováveis

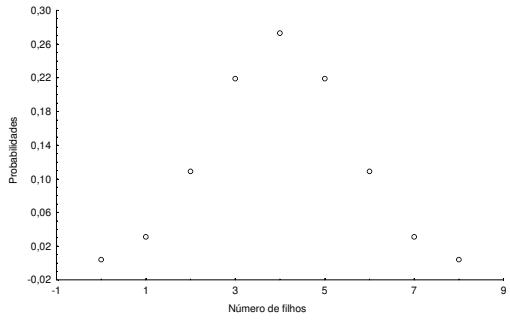


Figura 8: Distribuição de probabilidade para número de filhos homens

- 3) π constante
- 4) Só há 2 resultados possíveis: chove ou não chove.

37) a) Sim; b) 39 c) 2,929 d) 0%
38) a) 17,54% b) 95,95724%.
39) a) 0,5% b) 2,98%.
40) 0,61.
41) a) 96,059% (Binomial) e 0,96078% (Poisson) b) 99,94%.

Respostas dos exercícios propostos para modelos de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas, seção 5.3.5

1) a) 0,3848 b) 0,2517 c)0,3092 d)0,7648 e)0,2743 f)0,8907 g)0,9453 h)0,68 i)0,95 j)0,99.
2)0,0038 ou 0,38%
3) $P(X > 185kg) = 0,9332$. Logo, têm-se 120x0,9332=112 animais.
4) a)0,1974 b)0,6826 c)0,3085
5) a)0,0918; 0,9962; 0,7463; 0; b)8,745cm3/min c)9,5325 a 14,4675
6) a)0,9336 b)93,36 progênicos.
7) 0,047
8) 4,33; 5,54; 6,02
9) z=1,645 logo D=21,79 cm
10) a)0,0228 b) 0,053%
11) 22,06%
12) média=425,7 g.

13) a) 0,01222 b) 0,18673
14) 0,02275 = 2,275%
15) a)b=80,3 b)b=92,53
16) a)0,2358 b)15,7% c)$2,507cm$
17) 15,625
18)75
19) a)15,87% b)95,45% c) A porcentagem permanece a mesma. Sempre existirá das observações entre -2σ e $+2\sigma$ da média, se a distribuição é normal padrão.
20) a)0,9336 b) 0,0664 c) 93
21)a)2486 b)w=16,52 c)0,34
22) a)13,56% b)D=17,20
23) a)0,0968 b)0,9879 c)0,5
24) x1=0,484 x2=0,516
25) a) 512,85mm b)0,51%.
26)a)95,45% b) A porcentagem continua sendo a mesma, pois, se a distribuição é normal, então, entre a média ± 2 desvios padrões, tem-se 95,45% do dados. c)0,621%
27) a)18,904 b)68,3%
28) μ=21,303
29) 12,30% b) A=18,52m
30) a)0,8413 b)0,218230 c)20,569
31) 0,10427 ou 10,43%
32) 0,01321=1,32%.
33) 0,1736=17,36%.
34) a)0,04977 b) Conclui-se que a cultivar A é mais produtiva que a B.
35) 34,15%.

Respostas dos exercícios propostos sobre distribuições amostrais, seção 6.5

1. a) 68,3% b)0,15866 = 16%.
2. 33,87%.
3. $Prob(P \leq 0,40) + Prob(P \geq 0,53) = 0,2388 + 0,20327 = 0,4421 = 44,21\%$.
4. 0,06% [prob.germinar=0,95; prob.de não-germinar=0,05; n=200]. Utilizar distribuição normal padrão.

5. $P(\bar{X} \geq 2,0) = 1,7\%$.
6. A média da distribuição amostral é igual a 7069 kg/ha e o desvio padrão igual a 98,8583 kg/ha. a) 99,53% b) 0,52% c) 0,06%.
7. Média populacional=18000; desvio padrão populacional=5125; n=30. Resp.0,1423=14,23%.
8. $P(\bar{X} \leq 140) = 0,035\%$.
9. a)68% b)100%.
10) a)z1=-0,57 z2=0,85, assim, 0,2157+0,3023=0,5180 ou 51,8%. b) 0,0021 ou 0,21%

Respostas dos exercícios propostos sobre avaliação de parâmetros (estimação), seção 7.5

1) a) li=172,410 ls=173,589 b) li=172,226 ls=173,774 c) 9,18%.
2) a) li=481 ls=489 li=479,84 ls=490,16 b) 54,34=55 pacotes.
3) a) li=23,5963 ls=29,5037 li=22,5694 ls=30,5306 b) n=148,52=149.
4) a) li=3338,00 ls=3461,92 li=3316,09 ls=3483,91 b) n=9,585=10.
5) Para o mês de maio: Li=0,0991 Ls=0,5009 erro=0,20 e n=127. Para o mês de junho: Li=0,0116 Ls=0,3489 erro=0,1683 e n=89.
6) li=zero ls=0,2413.
7) li=0,054 ls=0,3459 mínimo=54 máximo=346.
8) li=1377,6 ls=1622,4 kg/ha.
9) $57,16 \leq \mu \leq 95,14$ b) n=375
10) Lagoa: $5,73 \leq \mu \leq 6,51$ Fazenda: $9,31 \leq \mu \leq 9,81$.
11)$0,584 \leq \pi \leq 0,816$.
12)$-0,084 \leq \mu \leq 1,484$.
13) a) $1,9152 \leq \mu \leq 2,2848$ b) n=106,5$\sim$ 107.
14) $7,5076 \leq \mu_{Bra} \leq 12,6524$ $11,5418 \leq \mu_{Can} \leq 19,1182$. Concluir que não há diferenças significativas entre as duas espécies.
15) a) $0,1864 \leq \pi \leq 0,6136$. Baixa precisão, aumentar o tamanho da amostra n. b) $e = 0,2136$, temos 99% de confiança que a proporção obtida na amostra não difere mais do que 0,2136 de π. c) $n = 640$ d) $0,041 \leq \pi \leq 0,081$. e) veja figura 9.
16) a) $8,7168 \leq \mu \leq 15,0632$ b) $n \cong 855$

Respostas dos exercícios propostos sobre testes de hipóteses, seção 8.6

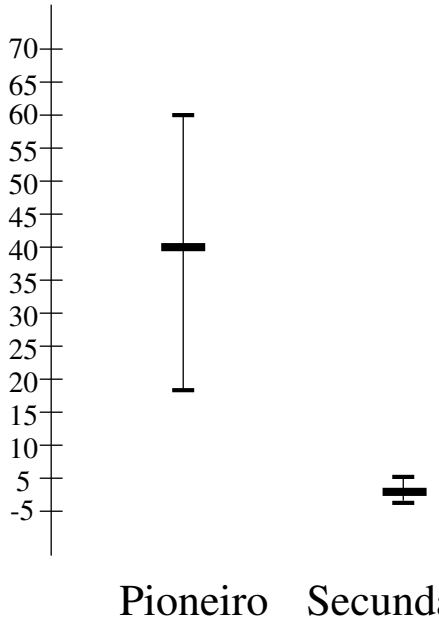


Figura 9: Representação gráfica dos intervalos de confiança

1)Zc=0,329 Zt=1,645 - conclui-se que a máquina não precisa ser regulada

2. $g.l. = 34,52 \approx 35$, Tt=2,724 —Tc—=6,98 Rejeita-se H_0. A variedade B é superior.

3. $\chi^2 = 9,27$, $\chi^2_{0,05;3} = 7,815$, portanto, a distribuição não segue as leis da hereditariedade.

4. 1º), $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ e $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$; 2º), $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ e 3º) as amostras são independentes.

5. $t = 0,2479$. Aceita-se a hipótese nula. $48,25 \leq \mu \leq 54,11$

6. $30,6097 \leq \mu \leq 33,8904$; $18,2972 \leq \mu \leq 22,3427$ b) $n = 31$ c) t=12,623, rejeita-se a hipótese nula.

7. $\chi^2 = 3,8347$. Aceita-se a hipótese nula. As duas variedades são semelhantes quanto à germinação de sementes.

8. $t = 4,333$. Rejeita-se a hipótese nula, o inseticida novo é melhor do que o padrão.

9. $t = -1,598$, aceita-se a hipótese nula, a quantidade de proteínas no plasma é a mesma.

10. a) $5,9373 \leq \mu \leq 7,8227$. b) $t = -20,2482$, portanto, rejeitamos a hipótese nula. c) $n = 36,27 \cong 37$.

11. $t = 10,588$, $P(t > 10,588) < 0,1\%$. Rejeita-se a hipótese nula.

12. $P(F > 3,02) = 0,057602$, portanto, aceita-se H_0. $t = 0,24$, $P(|t > 0,24|) =, 811620$, portanto, aceita-se a hipótese nula.

13. F=4,974, $P(F > 4,974) = 0,000022$, assim, as variâncias são heterogêneas. $t = 3,8977$, $P(t > 3,8977) = 0,000181$, existe diferença significativa entre as alturas das duas espécies.

14. $F = 1,006$, $P(F > 1,006) = 0,494867$, variâncias homogêneas. $t = 0,05417$, $P(|t > 0,05417|) = 0,957084 = 95,71\%$, aceita-se H_0.
15. $t = -4,149$, $P(|t < -4,149|) = 0,025441 = 2,54\%$. A cultivar CEP 18-Cavera é mais produtiva.
16. $\chi^2 = 164,62$, com 2 graus de liberdade, $P(\chi^2 > 164,62) = 0,000000$. Existe diferença significativa entre o número de armadilhas utilizadas na captura da vaquinha com relação ao uso de inseticida.
17. a) $H_0 : \mu_N = \mu_U$ e $H_0 : \mu_N > \mu_U$. b) É a probabilidade do agricultor aceitar como melhor o inseticida novo, sendo que, na verdade, não existe diferença entre os dois inseticidas, quanto à produção.
18. a) $t = -0,688$, com 38 graus de liberdade, $P(|t < -0,688|) = 0,495631 = 49,56\%$, aceita-se a hipótese nula. b)-0,34-2,021(0,49366) $\leq \mu_C - \mu_R \leq -0,34 + 2,021(0,49366)$.
19. $\chi^2 = 22,352$, com 6 graus de liberdade, $P(\chi^2 > 22,352) = 0,001047 = 0,1047\%$, existe diferenças entre os três tipos de vinhos quanto à estabilidade. b) $\chi^2 = 18,755$, com 3 graus de liberdade, $P(\chi^2 > 18,755) = 0,000308 = 0,0308\%$, existe diferenças entre os dois tipos de vinhos quanto à estabilidade. O vinho tinto é pior que o branco.
20. a) $t(calculado) = -3,35$, $t(tabelado)$=-1,761, rejeita-se a hipótese de nulidade. b)*valor* $p = 0,002382$, tomando-se como referência o valor 0,05, rejeita-se a hipótese nula.
21. a)*z=-1,68*, Rejeita-se H_0. b) *valor p*=,046479, rejeita-se H_0.
22. $t_{19} = 2,91$ $P(t \geq 2,91)$ está entre 0,1% e 0,5%, portanto, rejeita-se a hipótese de nulidade e conclui-se que a média na Baía Norte é realmente maior do que em Sambaqui. O intervalo fica: $31,0 \leq \mu \leq 35,8$
23. a) no caso 1 devemos usar o teste t para comparação de duas médias independentes com variâncias desconhecidas e, no caso 2, devemos usar o teste t para comparação de duas médias para dados pareados. b) Prefereria o planejamento 2 pois devemos comparar as duas médias sob igualdade de condições.
24. $\overline{x}_I = 81,45$ e $\overline{x}_S = 62,45$. $H_0 : \mu_I = \mu_S$ $H_a : \mu_I > \mu_S$ F=4,16 valor p=0,003 (variâncias heterogêneas) t=4,48 gl=27,63 e valor p=0,00006, portanto, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, realmente a reprodução sexuada é prejudicada em área sombreada.
25. $H_0 : \pi = 0,50$ $H_a : \pi > 0,50$ z=2,83 $P(z \geq 2,83) = 0,50 - 0,4977 = 0,0023$ portanto, rejeita-se a hipótese nula.