Clubes de Matemática da OBMEP
Disseminando o estudo da matemática

Probabilidades – O problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall

Este é um problema matemático inspirado no jogo "*Let's Make a Deal*" de um programa de televisão dos Estados Unidos exibido na década de 1970 e apresentado por Monty Hall.

Imagem extraída de https://cityobservatory.org/such-a-deal/

(https://br.depositphotos.com/)

Eis o problema:

Imagine que você está de frente para três portas numeradas – 1, 2 e 3 – e o apresentador diz:
– *Atrás de uma dessas portas tem um carro; mas atrás de cada uma das outras duas tem um bode. Escolha uma porta e leve para casa o que estiver atrás dela.*

Você vai lá e escolhe uma das três portas; mas antes que você possa abri-la, o apresentador

(que sabe exatamente onde está o carro) pede para você esperar e ele abre uma das portas não escolhidas, mostrando um dos bodes. Nesse momento ele faz a seguinte pergunta a você:
– *Você quer ficar com a porta que você escolheu ou quer trocá-la pela outra porta fechada?*

Qual é a estratégia mais lógica? Ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta?

Solução

Em um primeiro momento você pode pensar:

– "*Ah! Agora eu tenho duas portas para escolher:*
- *se eu ficar com a porta que eu escolhi, eu tenho 50% de chance de pegar o carro;*
- *se eu trocar de porta, eu continuo com 50% de chance pegar o carro.*

Então tanto faz trocar ou não trocar: é só uma questão de sorte…"

Mas essa análise está errada!
Na situação proposta no problema, a melhor coisa a fazer é **trocar de porta**; pois, com a troca, a chance de ganhar passa de $\mathbf{\frac{1}{3}}$ para $\mathbf{\frac{2}{3}}$.

Não se sinta diminuído(a) se você continuar pensando que tanto faz, mesmo vendo a resposta "seca" de que a troca é mais vantajosa…
Em 1990, em resposta a um leitor, a escritora norte-americana Marilyn vos Savant, a pessoa de QI mais elevado do mundo à época, publicou a solução do problema de Monty Hall em sua coluna "*Ask Marilyn*", na revista *Parade*. Em sua resposta, Marilyn apontou que o certo era fazer a troca, e recebeu mais de 10 mil cartas de protesto. Muitas foram escritas até por matemáticos e físicos, alguns com Doutorado, garantindo que o correto era **não trocar a porta inicialmente escolhida**. As coisas só se acalmaram por lá após Marilyn recomendar que as pessoas simulassem o jogo, repetindo várias vezes cada uma das estratégias e verificando a taxa de sucesso de cada uma!
A resposta do problema é, de fato, bem contra intuitiva; mas vejamos algumas justificativas para ela.

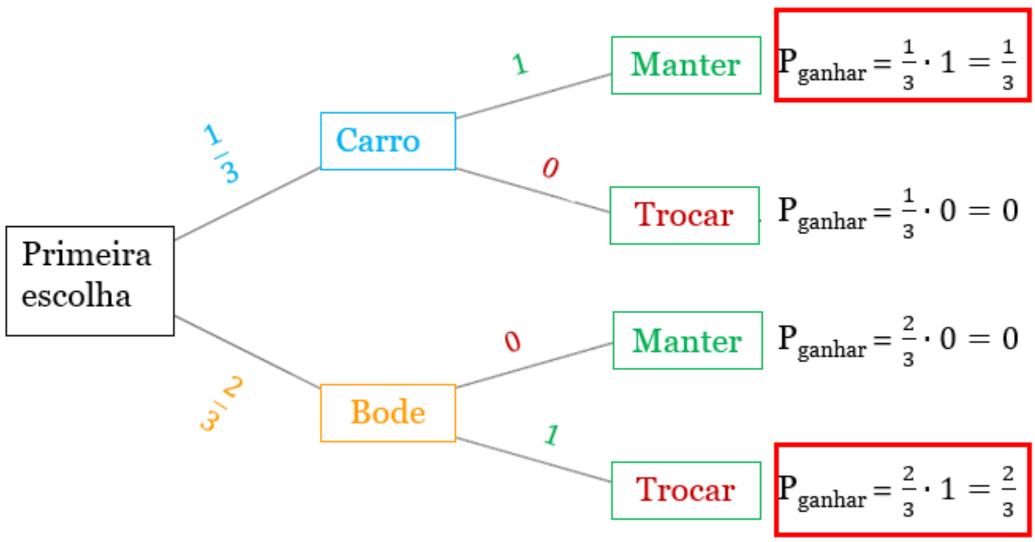
► A princípio, quando escolhemos uma das portas, a probabilidade de ganhar o carro era de $\frac{1}{3}$.
As outras duas portas não escolhidas tinham, em conjunto, uma probabilidade de $\frac{2}{3}$ de ocultarem o carro.
Não existe razão para que essa probabilidade mude após o apresentador ter aberto uma das portas não premiadas e, quando uma dessas portas é aberta (por esconder um bode), a porta não escolhida que continua fechada passa a acumular $\frac{2}{3}$ da probabilidade de ser a porta que esconde o carro.

► A argumentação anterior é mais facilmente entendida se aumentarmos o número de portas.
Suponhamos $1\,000$ portas: em uma porta tem um carro e nas outras 999 têm bodes.
Escolhemos uma dessas $1\,000$ portas e o apresentador abre 998 portas com bodes; ficam fechadas só a porta escolhida e mais uma, sendo que uma tem um bode e uma tem um carro.
Inicialmente, a probabilidade de termos escolhido o carro em $1\,000$ portas era uma em mil, isto é, $\frac{1}{1000} = 0,1\%$. Então, a chance de ter um carro em outra porta era $99,9\%$. Dessa forma, depois de abertas as 998 portas com bodes, a sua escolha é: $0,1\%$ ou $99,9\%$ de probabilidade de ganhar o carro!

Sim, trocar é a melhor opção!

► Vamos fazer um diagrama de árvore para analisarmos as possibilidades.
Observe que existem duas escolhas a serem feitas: uma escolha inicial, aleatória, e uma segunda, após o apresentador abrir uma das portas e perguntar se gostaríamos de mudar a porta inicialmente escolhida.
Então a nossa árvore terá duas etapas de construção e com ela calcularemos a probabilidade de ganharmos o carro.

As primeiras probabilidades são relativas à escolha da porta:
• a probabilidade de escolhermos inicialmente o carro é de $\frac{1}{3}$,
• a probabilidade de escolhermos um bode é de $\frac{2}{3}$, consequentemente.
Para a segunda fase do desafio, temos que analisar os casos em que mudamos ou não de opinião.
• Para o caso de termos escolhido inicialmente a porta do carro, se mantivermos a escolha, é certo que ganharemos o carro; assim, a probabilidade condicional $P(\text{Manter}|Carro)$ será $1 = 100\%$. Por outro lado, se mudarmos de porta, acabamos por invariavelmente perder o carro, ou seja, a probabilidade condicional $P(\text{Trocar}|Carro)$ é nula.
• Ao escolhermos inicialmente um bode, se mantivermos a escolha, não ganharemos o carro; assim, a probabilidade condicional $P(\text{Manter}|Bode)$ será zero. Por outro lado, se mudarmos de porta, vamos ganhar o carro; assim, a probabilidade condicional $P(\text{Trocar}|Bode)$ será $1 = 100\%$.



Concluímos, então, que a probabilidade de ganharmos o carro mantendo a porta inicialmente escolhida é $\frac{1}{3}$, enquanto que a probabilidade de ganharmos trocando a porta inicialmente escolhida é $\frac{2}{3}$.

► Podemos utilizar algo mais matematicamente concreto para a nossa análise: utilizaremos o Teorema de Bayes.
Vamos supor, sem perda de generalidade, que escolhemos a porta 1. (O "sem perda de generalidade" significa que o raciocínio que desenvolveremos seria o mesmo se a porta escolhida fosse a 2 ou a 3.)
Nesse caso, consideremos os seguintes eventos, dois a dois disjuntos:

$C1$: o carro está atrás da porta 1;
$C2$: o carro está atrás da porta 2;
$C3$: o carro está atrás da porta 3.

Escolhida a porta, o apresentador abre uma das outras portas que não tenha o carro, Suponhamos, sem perda de generalidade, que o apresentador tenha aberto a porta 3. (O "sem perda de generalidade" significa aqui que o raciocínio que desenvolveremos seria o mesmo se a porta aberta pelo apresentador fosse a 2.)

Vamos denotar por A o evento "o apresentador abriu a porta 3".

Perceba que, inicialmente, o carro poderia estar atrás de qualquer porta; assim:

- $P(C1) = P(C2) = P(C3) = \dfrac{1}{3}$.

As probabilidades de o apresentador abrir a porta 3 em cada cenário são as seguintes:

- $P(A|C1) = \dfrac{1}{2}$ (Neste caso, o apresentador pode abrir a porta 2 ou a 3, ao acaso.);
- $P(A|C2) = 1$ (Neste caso, o apresentador não pode abrir a porta 2, logo ele tem que abrir a porta 3.);
- $P(A|C3) = 0$ (Neste caso, o apresentador não pode abrir a porta 3, pois o carro está lá!).

Como escolhemos a porta 1 e foi aberta a porta 3, a probabilidade de ganharmos o carro com a troca é medida pela probabilidade condicional $P(C2|A)$.

Pelo Teorema de Bayes:

$$P(C2|A) = \frac{P(C2)\cdot P(A|C2)}{P(C1)\cdot P(A|C1) + P(C2)\cdot P(A|C2) + P(C3)\cdot P(A|C3)}$$

$$P(C2|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0}$$

$$P(C2|A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0}$$

$$P(C2|A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{9}$$

$$\boxed{P(C2|A) = \frac{2}{3}}.$$

Para reforçar, podemos até calcular a probabilidade de perdermos o carro, se não fizermos a troca, utilizando o Teorema de Bayes. Essa probabilidade é a probabilidade condicional $P(C1|A)$:

$$P(C1|A) = \frac{P(C1)\cdot P(A|C1)}{P(C1)\cdot P(A|C1) + P(C2)\cdot P(A|C2) + P(C3)\cdot P(A|C3)}$$

$$P(C1|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(C1|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$\boxed{P(C1|A) = \frac{1}{3}}.$$

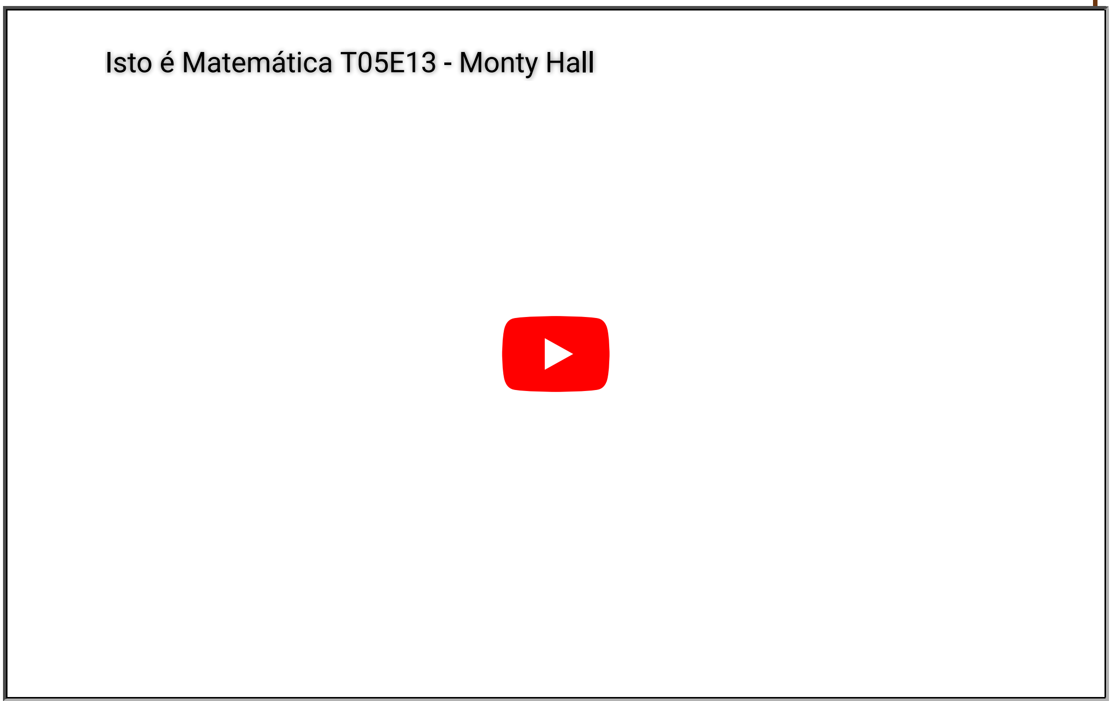
Mais uma vez: a melhor opção é trocar a porta!

Importante: A probabilidade de ganhar só aumenta com a troca; mas isso não significa que vamos ganhar o carro fazendo a troca!

Um vídeo para ajudar...

Precisa de mais explicação?
Assista a este vídeo da série **Isto é MATEMÁTICA**.

É só clicar na telinha!



Monty Hall

Faça você mesmo!

Se, com todas essas explicações, você ainda acha que tanto faz manter ou trocar a porta inicialmente escolhida, é só fazer um teste prático a partir de, por exemplo, três copos descartáveis vazios e não transparentes.

De posse dos três copos, chame uma pessoa para fazer o papel do apresentador e siga os seguintes passos:

1) Peça para o "apresentador" esconder um objeto debaixo ou dentro de um dos copos, sem que você veja.

2) Escolha um dos copos e peça para o "apresentador" revelar um dos copos sem o objeto.

3) Troque a sua escolha inicial e peça para o "apresentador" revelar o copo com o objeto.

4) Anote o resultado.

5) Repita os passos anteriores umas 50 vezes.

6) Faça as contas usando a razão:

$$\boxed{\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}}.$$

Simulações

Não encontrou alguém para ajudar com a atividade "**Faça você mesmo**"?

Então faça simulações utilizando o aplicativo abaixo.

1) Faça uma tabelinha para anotar os resultados:

- Troca – carro ou bode;
- Não troca – carro ou bode.

2) Aguarde o aplicativo carregar.

3) Escolha uma porta e clique no quadradinho amarelo correspondente.

4) Clique no retângulo que irá aparecer, para que o apresentador abra uma porta.

5) Faça uma segunda escolha, mantendo ou trocando a porta inicialmente escolhida, e clique no quadradinho verde correspondente.

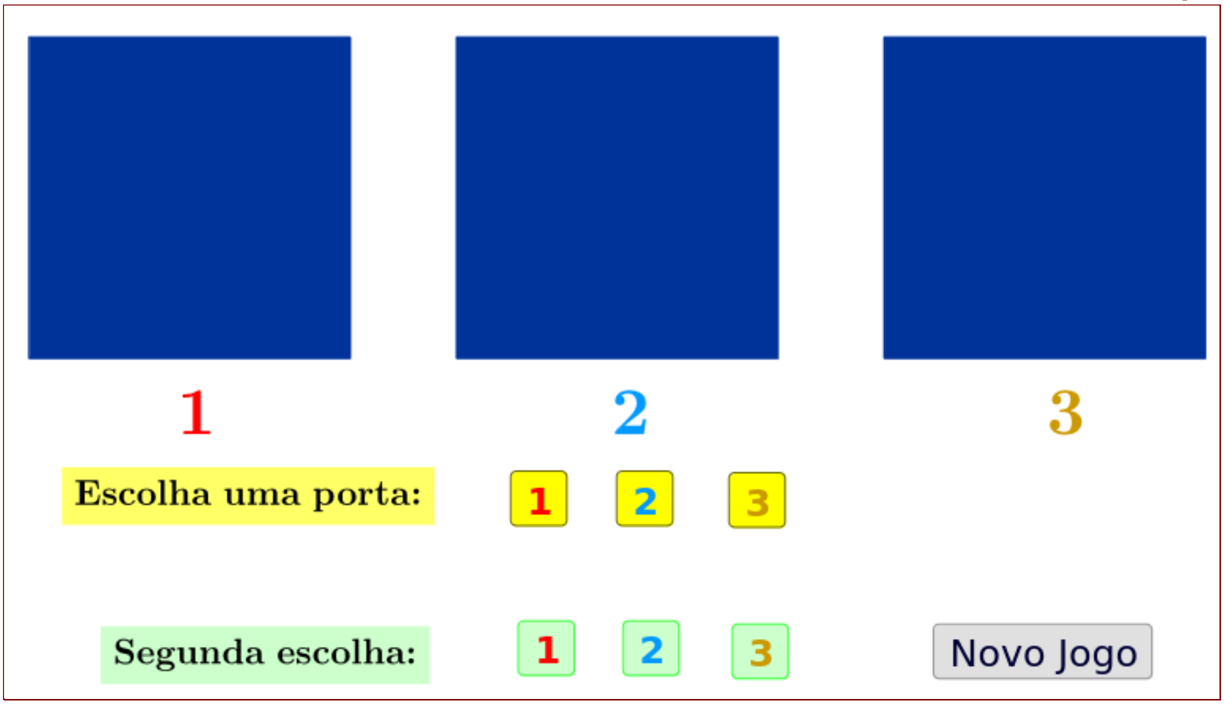
6) Anote o resultado.

7) Clique em **Novo Jogo**.

8) Repita os passos **3, 4, 5, 6** e **7** umas 50 vezes.

9) Faça as contas usando a razão:

$$\boxed{\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}}.$$



OBMEP_srg, criado com o GeoGebra (http://www.geogebra.org/)
Adaptado de Mixedmoss (https://www.geogebra.org/m/dcDe9ZAk)

Um vídeo para encerrar...

Quebrando a banca

Voltar para Sala sobre probabilidade condicional (http://clubes.obmep.org.br/blog/?p=175003)

Link permanente para este artigo: http://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/