Matrizes, dicas e truques

□

1 Transformação linear paralela

É possível implementar uma transformação linear (TL) de uma série de vetores em "paralelo".

Suponha que você queira implementar uma TL uma matriz de transformação A separadamente sobre M vetores $\vec{v}_i$, i.e, $\vec{q}_i = A\vec{v}_i$. Podemos fazer isso de uma vez só usando uma matriz auxiliar B, tendo nas colunas os vetores $\vec{v}_i$. As respectivas transformações $\vec{q}_i$ podem ser obtidas fazendo $C = AB$, onde cada coluna de C irá corresponder ao respectivo vetor $\vec{q}_i$. Considere o seguinte exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$, então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 6 \\ -6 & 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Implica que $\vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\vec{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{q}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ $\vec{q}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \end{bmatrix}$

2 Construindo matriz por colunas

Obter uma matriz NxM tendo todos os elementos zerados, exceto para um elemento $a_{ij} = r$, que pode ser um valor real ou complexo.

Sejam um vetor $\vec{v}$, de tamanho N igual a zero exceto o elemento $v_{i1} = r$ é diferente de zero e um vetor $\vec{q}$, igual a zero, exceto para $q_{ij} = 1$.

A matriz desejada pode ser obtida como $A = \vec{v}\vec{q}^T$.

Seja $N = 3$, $M = 4$ e $a_{23} = 4$

Temos então $\vec{v} = (0, 4, 0)$, $\vec{q} = (0, 0, 1, 0)$ de modo que

$$A = \vec{v}\vec{q}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mesma estratégia é usada para uma específica coluna j de A:

$$A = \vec{v}\vec{q}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quizermos repetir $\vec{v}$ mais de uma vez basta adicionarmos 1 onde queremos repetir.

$$A = \vec{v}\vec{q}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

No caso se quizermos multiplicar cópias de $\vec{v}$ em várias colunas de $j_1, j_2, \cdots, j_k$ de A pelos seus respectivos pesos $c_1, c_2, \cdots, c_k$, tudo que temos que fazer é colocar os pesos nas respectivas colunas de $\vec{q}^T$, conforme mostrado abaixo:

$$A = \vec{v}\vec{q}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

3 Construindo matriz por linhas

Seja o vetor $\vec{x} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]$, analogamente ao conceito da seção anterior, podemos repeti-lo em quantas linhas de uma matriz que desejarmos. Exemplo:

$$A = \vec{v}\vec{q}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Sistemas lineares

Usamos multiplicação de matrizes para resolver sistemas lineares. Vejamos o exemplo abaixo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Este é um sistema do tipo $A\vec{x} = \vec{b}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Para encontrar $\vec{x}$, basta multiplicar a igualdade $A\vec{x} = \vec{b}$ em ambos os lados por A^{-1}, ou seja pelo inverso da matriz A, desde que ela seja inversível (se não lembra, procure o que é isso).

A matriz A do lado esquerdo torna-se uma matriz identidade devido a multiplicação pela sua inversa, restando portanto:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = inv(A)\vec{b}$$

, deste modo encontramos $\vec{x}$.

5 Criando uma matriz de covariância sem utilizar muitas linhas de comando

Dada uma matriz de dados $A_{n\times d}$, sendo n o número de observações (linhas) e d a dimensão da matriz de dados, o número atributos (campos ou colunas). Podemos obter a média de cada coluna de A, através de algum software próprio para isso, como por exemplo o *matlab*, *scilab*, *octave* ou *python* com *numpy*. Seja $\vec{\mu}_a = [\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_d]$ o vetor linha de médias de cada coluna de A.

Para calcular os desvios a partir da média primeiro precisamos de uma matriz com n linhas do vetor de médias. Seja $\vec{b}$ um vetor com n termos igual a 1. Fazendo

$$M = \vec{b}\vec{\mu}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \begin{bmatrix} \mu_1\mu_2\cdots\mu_d \end{bmatrix}_{1\times d} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_d \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_d \end{bmatrix}_{n\times d}$$

teremos uma matriz M de n linhas de $\vec{\mu}_a$.

Assim, podemos ter a matriz de covariância C, fazendo

$$C = \frac{1}{n-1}(A-M)^T(A-M)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$$

"Ninguém, depois de acender uma candeia, a põe em lugar oculto, nem debaixo do alqueire, mas no velador, a fim de que os que entram vejam a luz." – Lucas 11:33
De nada vale o maior conhecimento que uma pessoa possa ter se ela não passá-lo adiante.