

2. Relações e Funções

□

Uma relação binária é uma correspondência (ou associação) entre elementos de dois conjuntos não vazios. Mais especificamente, seja R uma relação definida do conjunto A com o B . O conjunto A é denominado conjunto de partida e o conjunto B é denominado conjunto de chegada. A correspondência (ou relação) entre um dado elemento $a \in A$ com um elemento $b \in B$, quando definida, é denotada pelo par ordenado (a, b) , onde o primeiro elemento do par ordenado procede do conjunto de partida A e o segundo do conjunto de chegada B . Os conjuntos de partida e de chegada não tem necessariamente que ter uma estrutura. Entretanto, segundo o tipo de estrutura que é sobreposta a esses conjuntos e o tipo de restrição que se impõe à própria relação, tem-se tipos especiais de relações, cada qual com um nome específico.

Uma classe de relações especialmente importante é a classe das **funções**.

O **Produto Cartesiano** de dois conjuntos A e B , denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , $a \in A$ e $b \in B$.

Uma relação binária R sobre dois conjuntos A e B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subseteq A \times B$. Por exemplo:

$$\{(i, j) | i, j \in N \wedge i < j\}$$

Outro exemplo, digamos que uma pessoa recebe R\$ 3,00 por objeto que fabrica. Ela consegue produzir de 5 a 10 objetos por dia. O seu salário diário s está determinado pelo número n de objetos que faz:

n	5	6	7	8	9	10
s	15	18	21	24	27	30

Aqui teríamos uma relação $S = \{(5, 15), (6, 18), (7, 21), (8, 24), (9, 27), (10, 30)\}$, ou seja, um conjunto de 6 pares ordenados representando a quantidade de objetos e o quanto receberia, sempre nessa ordem. Verifique que se tivéssemos um produto cartesiano, teríamos 36 pares ordenados.

Poderíamos ainda representar essa relação em um gráfico, onde o eixo x seriam as peças produzidas e no eixo y o valor recebido. Os primeiros números dos pares ordenados são o DOMÍNIO (o eixo x), denotado por $D(S) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os segundos são a IMAGEM (o eixo y), denotado por $Im(S) = \{15, 18, 21, 24, 27, 30\}$.

Generalizando, seja n qualquer número natural. Então se a_1, a_2, \dots, a_n são quaisquer objetos, não necessariamente diferentes, (a_1, a_2, \dots, a_n) é uma n -tupla ordenada para cada $i = 1, \dots, n$, a_i é o i -ésimo componente da n -tupla (a_1, a_2, \dots, a_n) . Uma m -tupla ordenada (b_1, b_2, \dots, b_m) é igual a (a_1, a_2, \dots, a_n) se e somente se $m = n$ e $b_i = a_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Se A_1, A_2, \dots, A_n são quaisquer conjuntos então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é o conjunto de todas as n -tuplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) com $a_i \in A_i$ para $i = 1, \dots, n$. No caso de todo A_i ser igual a A , o produto cartesiano $A \times A \times \dots \times A$ de A com ele mesmo pode ser escrito como A^n .

Assim, uma relação n -ária sobre conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

FUNÇÃO

Intuitivamente, uma função é uma associação de cada objeto de uma espécie com um único objeto de uma outra espécie.

Uma função de A em B é uma relação binária sobre A e B com uma propriedade especial: para cada elemento $a \in A$, há exatamente um par ordenado em R , com o primeiro componente a .

Observemos os gráficos abaixo. Vamos supor que queremos representar a velocidade de um atleta a cada tempo em segundos.

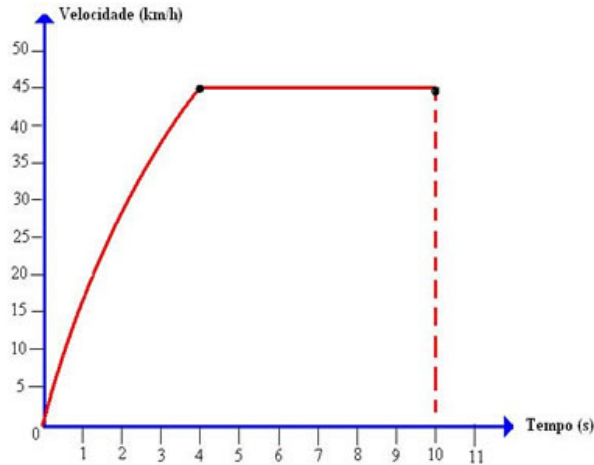


Figura 1: Função.

O gráfico da Figura 1 representa uma função.

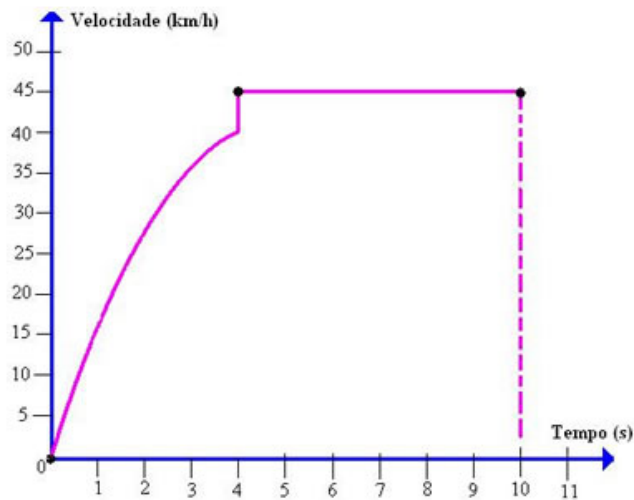


Figura 2: Relação.

Já o gráfico da Figura 2 não pode ser uma função pois no instante $t = 4$ teria diferentes velocidades.

Podemos pensar ainda no seguinte: se fossemos colocar em uma tabela o tempo e a velocidade, teríamos que repetir o mesmo valor 4 várias vezes para associarmos todas as velocidades. Se isso acontece, isto é, se o segundo termo tem valores diferentes para um mesmo primeiro termo, não é função.

Assim, se $A \times B$ é o produto cartesiano, R é uma relação desse produto cartesiano, então F seria uma função, onde $F \subseteq R \subseteq A \times B$. Exemplos de relações binárias que são funções.

Verifique que a recíproca não é sempre verdadeira.

$$\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$

$\{(x, y) | x, y \in \mathfrak{R} \wedge y = \text{sen}x\}$ A recíproca não é sempre verdadeira, porque existem

relações que não são funções.

$$\{(x, y) | x, y \in \mathfrak{R} \wedge x = y^2\}$$

$$\{(x, y) | x, y \in \mathfrak{R} \wedge x = \text{sen}y\}$$

Mais detalhes em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/relacao.htm>

"Ninguém, depois de acender uma candeia, a põe em lugar escondido, nem debaixo do alquire, mas no velador, a fim de que os que entram vejam a luz." Lucas 11:33
De nada vale o maior conhecimento que uma pessoa possa ter se ela não passá-lo adiante."