Gramáticas

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS
Ciência da Computação
Linguagem Formais e Autômatos
Prf Dr Osvaldo Vargas Jaques
ojacques@comp.uems.br

Forma sentencial e sentença

Definição 12 *Uma cadeia* $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$ *é uma* **forma sentencial** *de* G *sse* $S \xrightarrow{*} \alpha$ *ou seja,* α *é um embrião para uma cadeia gerada pela gramática.*

No Ex.: 1 -

- aB, AB, S, ab são formas sentenciais;
- já $bA \in (V_N \cup V_T)^*$ mas não é forma sentencial.

Ex1:

$$P : \{ \quad 1)\ S \to AB \quad 2)\ A \to a \quad 3)\ B \to b\}$$

Definição 13 *Uma forma sentencial,* α*, é uma* **sentença** *de* G *sse* $\alpha \in V_T^*$

Portanto as cadeias geradas pela gramática são as sentenças de G*.*

Ex.: 4 - $G_1 = (\{A, B\}, \{a, b, c\}, P, A)$ onde

$$P = \{ \quad 1)\ A \to aB \quad 2)\ B \to bB \quad 3)\ B \to c\}$$

$x = abbbc$ é uma sentença de $G1$?

Exercício: Verifique se $x = ac$ e $y = aabc$ são sentenças de $G1$.

O conjunto de sentenças geradas por $G1$ pode ser expresso como $\{ab^n c, n \geq 0\}$?

Forma sentencial e sentença

$$P = \{ \quad 1)\ A \rightarrow aB \quad 2)\ B \rightarrow bB \quad 3)\ B \rightarrow c\}$$

- **Exercício:** Verifique se $x = ac$ e $y = aabc$ são sentenças de $G1$.

  O conjunto de sentenças geradas por $G1$ pode ser expresso como $\{ab^n c, n \geq 0\}$?

Equivalência

$P = \{ \quad 1)\ A \rightarrow aB$
$\qquad 2)\ B \rightarrow bB$
$\qquad 3)\ B \rightarrow c\}$

Definição 15 *Duas gramáticas $G1$ e $G2$ são equivalentes sse $L(G1) = L(G2)$*

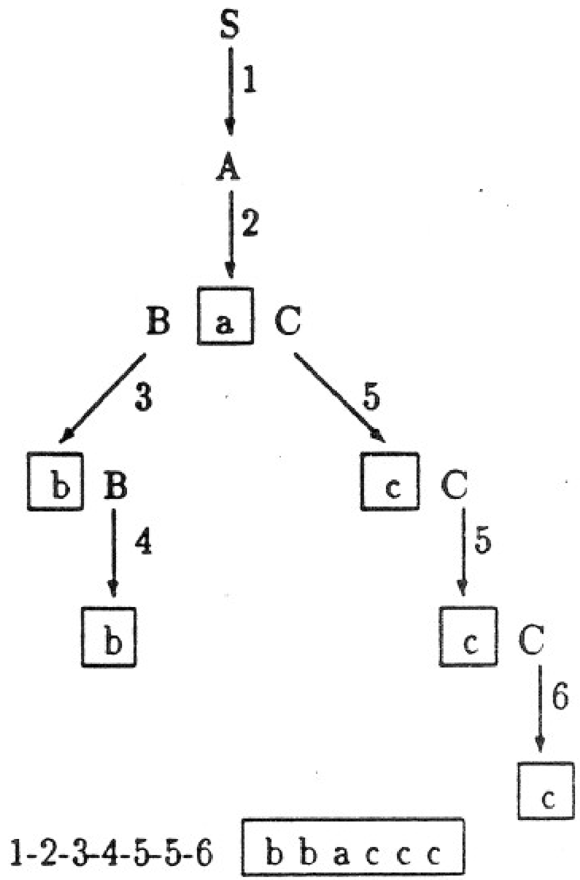
Ex.: 5 - $G2 = (\{S, A, B, C, \}, \{a, b, c\}, P, S)$

onde $P = \{$
1) $S \rightarrow A$
2) $A \rightarrow Bac$
3) $B \rightarrow bB$
4) $B \rightarrow b$
5) $C \rightarrow cc$
6) $C \rightarrow c\ \}$

Portanto a linguagem gerada por $G2$ é:

bac
$bbac$
$bacc$ $\Rightarrow$ ou seja,
$bbbaccc$ $\quad L(G2) = \{b^i a c^j | i, j \geq 1\}$
etc.

Árvore de derivação sintática para a cadeia bbaccc

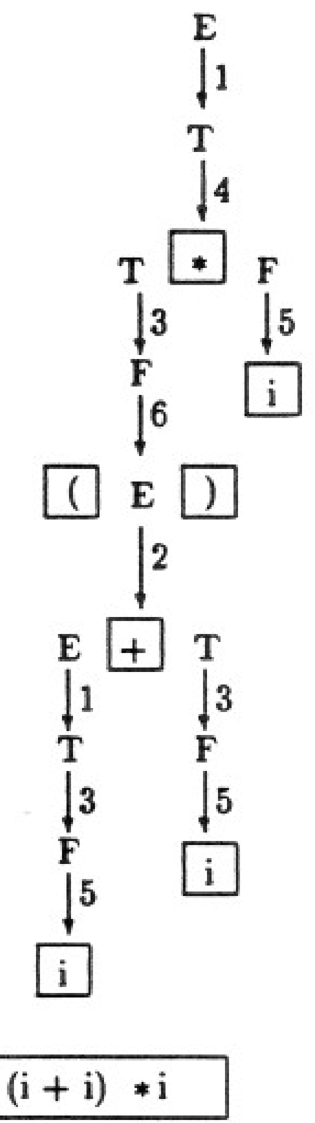


Equivalência

Ex.: 6 - $G3 = (\{E, T, F\}, \{+, *, (,), i\}, P, E)$

$$
\begin{aligned}
P = \{ \quad & E \to E + T \\
& E \to T \\
& T \to T * F \\
& T \to F \\
& F \to (E) \\
& F \to i\}
\end{aligned}
$$

Árvore de derivação sintática para a cadeia $(i + i) * i$:



Ambiguidade

Definição 16 Ambiguidade de Gramáticas

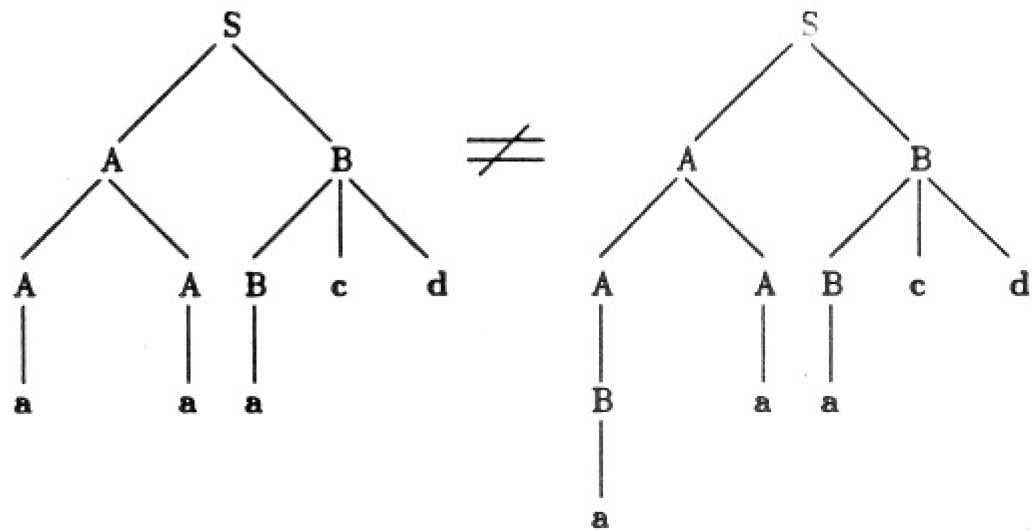
Uma **sentença** *é ambígua se ∃ duas ou mais árvores sintáticas que a definem.*

Uma **gramática** *é ambígua se possui alguma sentença ambígua.*

Ex.: 7 -

$S \to AB$
$A \to AA$
$A \to B$
$A \to a$
$B \to Bcd$
$B \to a$

Considere a cadeia $x = aaacd$



Ambiguidade

Quais as árvores sintáticas?

Ex.: 8 -

$$E \rightarrow E + E$$
$$E \rightarrow E * E$$
$$E \rightarrow (E)$$
$$E \rightarrow a$$

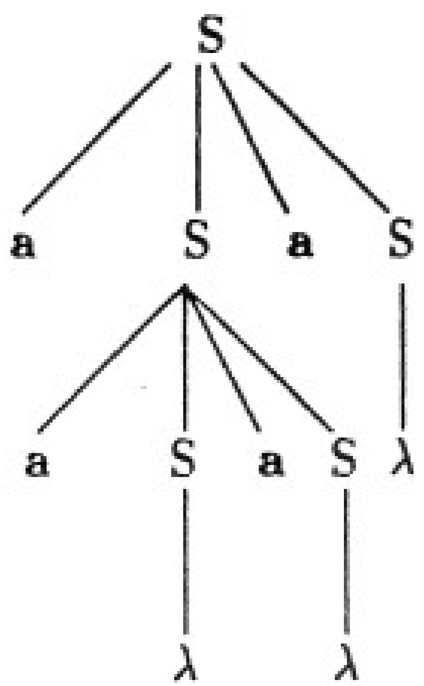
Considere a cadeia $x = a + a + a$

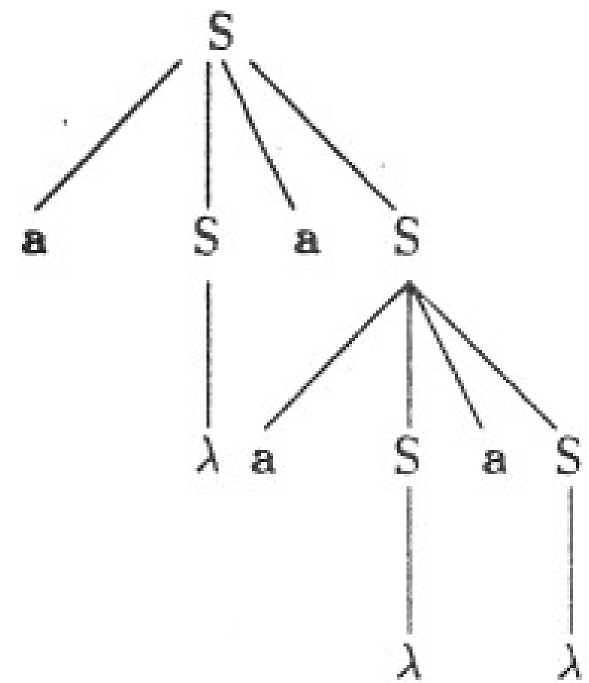
Ambiguidade

Ex.: 9 -

$$S \rightarrow aSaS$$
$$S \rightarrow \lambda$$

X = aaaa





Tipos de gramáticas

Vamos considerar agora 4 tipos de gramáticas, que constituem a chamada "hierarquia de Chomsky" (gramáticas gerativas).

3.1 Gramáticas com Estrutura de Frase — GEF

Gramáticas - tipo 0 -

As gramáticas com Estrutura de Frase ou Gramáticas não Restritivas são aquelas cujas produções P são do tipo:

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \text{onde} \quad \begin{array}{l} \beta \in (V_N \cup V_T)^* \\ \alpha \in (V_N \cup V_T)^+ \end{array}$$

Pode-se restringir P e obter as gramáticas dos tipos 1,2 e 3.

3.2 Gramáticas Sensíveis ao Contexto — GSC

Gramáticas - tipo 1 -

Seja $G = (V_N, V_T, P, S)$ onde toda produção de P é da forma

$\alpha \rightarrow \beta$ tal que $|\beta| \geq |\alpha|$ exceção quando $\beta = \lambda$
onde:
$\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$
$\beta \in (V_N \cup V_T)^*$

Ex.:

$$\begin{array}{lcl} G & = & (V_N, V_T, P, S). \\ V_N & = & \{S, B, C\} \quad , \quad V_T = \{a, b, c\} \end{array}$$

$$P = \{ \begin{array}{ll} 1) & S \rightarrow aSBC \\ 2) & S \rightarrow aBC \\ 3) & CB \rightarrow BC \\ 4) & aB \rightarrow ab \\ 5) & bB \rightarrow bb \\ 6) & bC \rightarrow bc \\ 7) & cC \rightarrow cc\} \end{array}$$

Exercício: Mostrar que $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

Tipos de gramáticas

Obs.: Alguns autores colocam as produções de uma GSC (GDC) como:

$$\alpha 1 \quad A \quad \alpha 2 \quad \longrightarrow \quad \alpha 1 \quad \beta \quad \alpha 2$$

fixa o contexto
da troca

onde

- $\alpha 1,\ \alpha 2,\ \beta \in V^*$ e $\beta \neq \lambda$
- $A \in V_N$

para motivar o nome sensível ao contexto desde que a produção $\alpha 1\ A\ \alpha 2 \longrightarrow \alpha 1\ \beta\ \alpha 2$ permita que A seja trocado por β.

Gramática Livre de Contexto

3.3 Gramáticas Livres de Contexto — GLC

Gramática - tipo 2 -

Toda produção P, é da forma:

$A \rightarrow \beta$ onde:

$A \in V_N$ e $\beta \in (V_N \cup V_T)^*$

Ex.: 1 $G = (V_N, V_T, P, S)$ onde

$$V_N = \{S, A, B\}$$
$$V_T = \{a, b\}$$

$P = \{$

1) $S \rightarrow aB$
2) $S \rightarrow bA$
3) $A \rightarrow a$
4) $A \rightarrow aS$
5) $A \rightarrow bAA$
6) $B \rightarrow b$
7) $B \rightarrow bS$
8) $B \rightarrow aBB\}$

$L(G) = \{w \in \{a,b\}^+ \mid w$ contém números de a's igual ao número de b's $\}$

$$S \xrightarrow{1} B \xrightarrow{7} abs \xrightarrow{2} abbA \xrightarrow{3} abba$$
$$S \xrightarrow{1} aB \xrightarrow{8} aaBB \xrightarrow{6} aabb$$
$$S \xrightarrow{2} bA \xrightarrow{4} baS \xrightarrow{1} baaB \xrightarrow{6} baab$$
$$\xrightarrow{2} babA \xrightarrow{3} baba$$

Prove que:

$L(G)$ é o conjunto de todas as combinações de cadeias em V_T^+ com números de $a's$ = números de $b's$.

Prova: por indução sobre o comprimento de uma palavra (sentença).

Hipótese Indutiva (devemos provar para todo comprimento de W)

Para todo $W \in V_T^+$,

1) $S \xrightarrow{*} W$ sse W consiste de nº de $a's$ igual nº de $b's$.
2) $A \xrightarrow{*} W$ sse W tem um **a** a mais que b's.
3) $B \xrightarrow{*} W$ sse W tem um **b** a mais que a's

$\rightarrow$ se $|W| = 1$

temos que

2) $A \xrightarrow{*} a$,
3) $B \xrightarrow{*} b$ e
1) S não gera nenhuma sentença de terminais de comprimento = 1.

$\rightarrow$ Suponha que a hipótese seja verdadeira para todo $W \mid |W| < k$

Tipos de gramáticas

$\rightarrow$ Deve-se mostrar que é também válida para $|W| = k$

1) Se $S \xrightarrow{*} W$, então a derivação iniciou com $S \rightarrow aB$ ou $S \rightarrow bA$

(i) se $S \rightarrow aB, W$ é da forma aW_1 onde $|W_1| = k-1$ e $B \xrightarrow{*} W_1$. Pela hipótese, o nº de $b's$ em W_1 é 1+ nº de $a's$.

Portanto $aW_1 = W$ contém nº $a's =$ nº $b's$

(ii) se $S \rightarrow bA \Rightarrow$ análogo.

Deve-se mostrar a volta de 1), isto é, se $|W| = k$, e W contém o mesmo número de $a's$ e $b's$, então $S \xrightarrow{*} W$.

Neste caso, o 1º símbolo de W é **a** ou **b**.

Assuma que $W = aW_1$. Então $|W_1| = k-1$, e W_1 tem um b a mais que $a's$. Pela hipótese, $B \xrightarrow{*} W_1$. Mas, então:

$$S \rightarrow aB \xrightarrow{*} aW_1 = W$$

Portanto $S \xrightarrow{*} W$.

No caso de $W = bW_1 \Rightarrow$ análogo.

A prova ainda não está completa. Fica como exercício mostrar 2) e 3) para $|W| = k$.

Ex.: 2 - Podemos pensar num processo inverso, isto é, dada $L(G)$, determinar G, que gera $L(G)$.

$$L(G) = \{0^n\ 1^{2n}\ 0^m\},\ n \geq 0,\ m \geq 0$$
$$L(G) = \{\lambda, 0110, 01100, 0011110, \ldots\}$$

1) $S \rightarrow AB$
2) $A \rightarrow 0A11$
3) $A \rightarrow \lambda$
4) $B \rightarrow 0B$
5) $B \rightarrow \lambda$

$$S \xrightarrow{1} AB \xrightarrow{2} 0A11B \xrightarrow{2} 00A1111B \xrightarrow{3} 001111B \xrightarrow{4} 0011110B \xrightarrow{5} 0011110.$$

Ex.: 3:

$$L(G) = \{a^m\ b^n,\ m > 0,\ n > 0\}$$

$S \rightarrow AB$
$A \rightarrow aA$
$A \rightarrow a$
$B \rightarrow bB$
$B \rightarrow b$

Tipos de gramáticas

Ex.: 2 - Podemos pensar num processo inverso, isto é, dada $L(G)$, determinar G, que gera $L(G)$.

$$
\begin{aligned}
L(G) &= \{0^n\, 1^{2n}\, 0^m\}\ ,\ n \geq 0,\ m \geq 0 \\
L(G) &= \{\lambda, 0110, 01100, 0011110, \ldots\}
\end{aligned}
$$

1) $S \rightarrow AB$
2) $A \rightarrow 0A11$
3) $A \rightarrow \lambda$
4) $B \rightarrow 0B$
5) $B \rightarrow \lambda$

$$S \xrightarrow{1} AB \xrightarrow{2} 0A11B \xrightarrow{2} 00A1111B \xrightarrow{3} 001111B \xrightarrow{4} 0011110B \xrightarrow{5} 0011110.$$

Ex.: 3:

$$L(G) = \{a^m\, b^n\ ,\ m > 0,\ \ n > 0\}$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AB \\
A &\rightarrow aA \\
A &\rightarrow a \\
B &\rightarrow bB \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Tipos de Gramáticas

3.4 Gramáticas Regulares são produções do tipo:

$A \rightarrow aB$, $a \in T$, $B \in V$

ou

$A \rightarrow b \mid \varepsilon$, $b \in T$

Ex.: 1

$$S \rightarrow aS$$
$$S \rightarrow bA$$
$$A \rightarrow c$$

Qual é a LG?

Hierarquia de Chomsky e as Linguagens

Gramáticas geram linguagens do mesmo tipo.