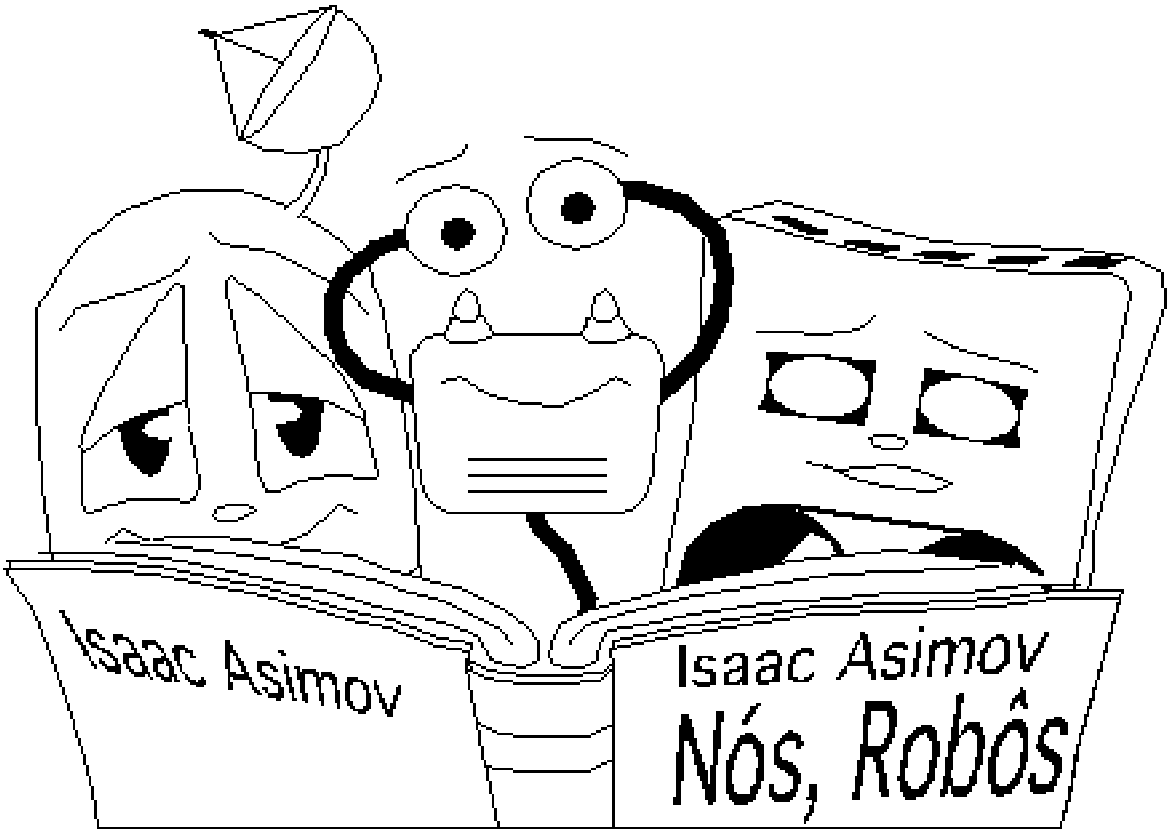
Linguagens Formais e Autômatos



1 Introdução e Conceitos Básicos

1 Introdução e Conceitos Básicos

1.1 Introdução

♦ Teoria das Linguagens Formais

- originariamente desenvolvida na década de 1950
- objetivo inicial
  - ∗ desenvolver teorias relacionadas com as linguagens naturais
- hoje
  - ∗ importante para o estudo de linguagens artificiais
  - ∗ em especial, para as linguagens originárias na Ciência da Computação

♦ Enfoques

- análise de linguagens de programação
  - léxica
  - sintática
- modelos de sistemas biológicos
- desenho de hardware
- relacionamentos com linguagens naturais

♦ Recentemente

- linguagens não-lineares
  - como planares
  - espaciais
  - n-dimensionais.

Sintaxe e Semântica

♦ Linguagens Formais

- problemas sintáticos das linguagens

♦ Historicamente

- o problema sintático foi reconhecido antes do problema semântico
- foi o primeiro a receber um tratamento adequado
- são de tratamento mais simples que os semânticos

♦ Conseqüência

- grande ênfase à sintaxe
- ao ponto de levar à idéia de que
  - questões das linguagens de programação resumiam-se às questões da sintaxe

♦ Atualmente

- teoria da sintaxe possui construções matemáticas bem definidas e universalmente reconhecidas como
- exemplo: Gramáticas de Chomsky.

♦ Linguagem de Programação (ou qq modelo matemático) pode ser vista

- livremente sem qualquer significado associado
- juntamente com uma interpretação do seu significado

♦ Sintaxe

- trata das propriedades livres da linguagem
  - "forma"
  - exemplo: verificação gramatical de programas

♦ Semântica

- fornece uma interpretação para a linguagem
- exemplo: um significado ou valor para um determinado programa

♦ Conseqüentemente

- sintaxe basicamente manipula símbolos
  - não considera os correspondentes significados
- mas, para resolver qq problema real
  - é necessário dar uma interpretação semântica aos símbolos
  - exemplo: "estes símbolos representam os inteiros"

♦ Sintaticamente "errado"

- não existe uma noção de programa "errado"
- neste caso, simplesmente não é um programa

♦ Sintaticamente "Correto"

- pode não ser o programa que o programador esperava escrever

♦ Programa "Correto" ou "Errado"

- deve considerar se modela adequadamente o comportamento desejado

♦ Limites entre Sintaxe e Semântica

- nem sempre são claros
- exemplo
  - ocorrência de um nome em um programa
  - pode ser tratado como um problema sintático ou semântico
- entretanto, para a maioria dos problemas relevantes
  - a distinção entre sintaxe e semântica em linguagens artificiais é, em geral, óbvia.

Abordagem

♦ Abordagem

- tratamento sintático de linguagens
  - ∗ lineares
  - ∗ abstratas
- com fácil associação às linguagens típicas da Ciência da Computação

♦ Tipos do Formalismos usados

- Operacional
- Axiomático
- Denotacional

Operacional

♦ Autômato ou máquina abstrata

- estados
- instruções primitivas
- como cada instrução modifica cada estado

♦ Máquina abstrata

- suficientemente simples
  - ∗ não deve permitir dúvidas sobre seu funcionamento
- também é dito um *Formalismo Reconhecedor*
  - ∗ análise de uma entrada para verificar se é *reconhecida* pela máquina

♦ Principais máquinas

- Autômato Finito
- Autômato com Pilha
- Máquina e Turing

Axiomático

- **Associam-se regras às componentes da linguagem**

- **Regras**
  - permitem afirmar o que será verdadeiro
  - após a ocorrência de cada cláusula
  - considerando o que era verdadeiro antes da ocorrência

- **Formalismos axiomáticos**
  - Gramáticas Regulares
  - Gramáticas Livre do Contexto
  - Gramáticas Sensíveis ao Contexto
  - Gramáticas Irrestritas

- **Gramática também é dita um *Formalismo Gerador***
  - * permite verificar se um determinado elemento da linguagem é *gerado*

Denotacional

♦ **Ou *Formalismo Funcional***

♦ **Domínio (sintático)**

- que permite a caracterização do conjunto de palavras admissíveis na linguagem
- tratam-se de funções, as quais são, em geral, composicionais (horizontalmente)
  - ∗ o valor denotado por uma construção é especificado em termos dos valores denotados por suas subcomponentes

♦ **Formalismo Denotacional**

- Expressões Regulares
  - ∗ é simples inferir (*gerar*) aos elementos da linguagem
  - ∗ assim, freqüentemente também é denominado (de forma não muito precisa) como um Formalismo Gerador

Estruturação e breve Introdução

Capítulo 1

♦ Demais tópicos deste capítulo

- introduzem conceitos básicos necessários

♦ Conjuntos, Relações, Funções e Técnicas de Demonstração

- revisão e normalização de notações
- supõem um conhecimento prévio
- não esgotam o assunto

Capítulo 2 - Linguagens Regulares

♦ Origem dos Formalismos Autômato Finito e Expressões Regulares

- estudos biológicos de redes de neurônios
- circuitos de chaveamentos

♦ Mais recentemente

- analisadores léxicos
  - parte de um compilador
  - identifica e codifica as unidades básicas de uma linguagens como variáveis, números, etc
  - caso particular e simples de análise sintática
- editores de textos
- sistemas de pesquisa e atualização em arquivos
  - em geral, do tipo busca e substituição de informações não complexas
- linguagens de comunicação homem-máquina
  - como interface do sistema operacional
- linguagens de comunicação máquina-máquina
  - como protocolos de comunicação

Capítulo 3 - Ling. Livre do Contexto

♦ Formalismos

- Gramáticas Livre do Contexto
- Autômato com Pilha

♦ Ênfase do estudo

- analisadores sintáticos
- historicamente
  - ∗ desenvolvimento de analisadores sintáticos era um problema complexo, de difícil depuração e com eficiência relativamente baixa
- hoje, considerando o conhecimento já adquirido relativo às Linguagens Livre do Contexto
  - ∗ desenvolvimento de um analisador sintático é simples (assim como a sua depuração)
  - ∗ somente uma pequena percentagem do tempo de processamento de um compilador é gasto em tal atividade

Capítulo 4 Linguagens Enumeráveis Recursivamente e Sensíveis ao Contexto

♦ Formalismos

- Máquina de Turing
  - ∗ e eventuais variações/restrições
- Gramáticas Irrestritas e Sensíveis ao Contexto

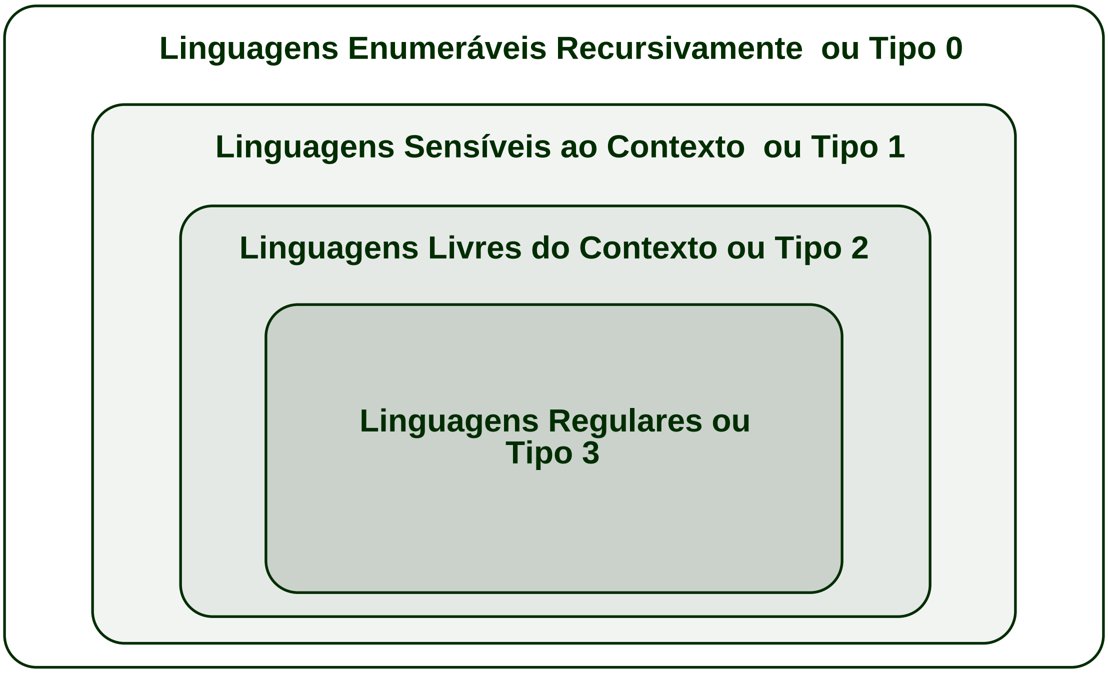
♦ Exploram

- limites da capacidade de desenvolvimento de reconhecedores ou geradores de linguagens
- ou seja
  - ∗ estuda a solucionabilidade do problema da existência de algum reconhecedor ou gerador para determinada linguagem.

Capítulo 5 - Hierarquia de Classes de Linguagens e Conclusões

♦ Hierarquia de Chomsky

- classifica as diversas classes de linguagens em uma ordem hierárquica
- inclusão própria entre as classes



♦ Apresenta

- conclusões gerais
- perspectivas futuras

1.2 Conjuntos, Relações e Funções

♦ Pré-requisitos

- conceitos básicos relativos à Teoria dos Conjuntos.

Conjuntos

♦ *Conjunto* e *Elemento*

- *Conjunto* é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, denominados *Elementos* do conjunto.

♦ Notações

- $a \in A$, $a \notin A$
- $A \subseteq B$ ou $B \supseteq A$
  - ∗ A *está contido* em B
  - ∗ A é *subconjunto* de B
  - ∗ B *contém* A
- $A \subset B$ ou $B \supset A$
  - ∗ A *está contido propriamente* em B
  - ∗ A é *subconjunto próprio* de B
  - ∗ B *contém propriamente* A
- $A = B$
  - ∗ $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

♦ Conjuntos

- número de elementos
  - finito
  - infinito

- conjunto finito
  - pode ser denotado por extensão
  - por exemplo, {a, b, c}

- conjunto vazio
  - sem elementos (ou seja, com zero elementos)
  - $\{\ \}$ ou $\varnothing$

- conjunto (finito ou infinito) denotado por compreensão

$$\{ a \mid a \in A \text{ e } p(a) \} \quad \text{ou}$$

$$\{ a \in A \mid p(a) \} \quad \text{ou}$$

$$\{ a \mid p(a) \}$$

♦ *Exemplo*

- $a \in \{b, a\}$ e $c \notin \{b, a\}$;
- $\{a, b\} = \{b, a\}$, $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$ e $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$;
- Os seguintes conjuntos são infinitos
  - $\mathbb{N}$ conjuntos dos números naturais
  - $\mathbb{Z}$ conjuntos dos números inteiros
  - $\mathbb{Q}$ conjuntos dos números racionais
  - $\mathbb{I}$ conjuntos dos números irracionais
  - $\mathbb{R}$ conjuntos dos números reais
- $\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ e } x < 4\}$
- $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$;
- conjunto dos números pares

$$\{y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$$

Operações sobre Conjuntos

♦ *União*

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

♦ *Intersecção*

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

♦ *Diferença*

- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

♦ *Complemento*

- definida em relação a um conjunto fixo $\mathbb{U}$ denominado *universo*
- $A' = \{x \mid x \in \mathbb{U} \text{ e } x \notin A\}$

♦ *Conjunto das Partes*

- $2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$

♦ *Produto Cartesiano*

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$
- notação usual de $A \times A$: A^2

♦ *Par ordenado*

- elemento de um produto cartesiano
- denotado na forma (a, b)
- não deve ser confundido com o conjunto $\{a, b\}$
  - ∗ a ordem é importante
  - ∗ as duas componentes são distinguidas
  - ∗ conceito é generalizado para n-upla ordenada, ou seja, com $n > 0$ componentes

♦ *Exemplo*

- universo $\mathbb{N}$, $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$
  - ∗ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$
  - ∗ $A \cap B = \{2\}$
  - ∗ $A - B = \{0, 1\}$
  - ∗ $A' = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$
  - ∗ $2^B = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
  - ∗ $A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

Algumas Propriedades

♦ **Suponha universo $\mathbb{U}$ e conjuntos A, B e C**

- *idempotência* da união e intersecção
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$
- *associatividade* da união e intersecção
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *comutatividade* da união e intersecção
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- *distributividade* da união e intersecção
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- relativamente ao *complemento*
  - $(A')' = A$
  - $A \cup A' = \mathbb{U}$
  - $A \cap A' = \varnothing$

- *leis de Morgan*
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
  - $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Relações

♦ *Relação*

- subconjunto de um produto cartesiano
- $R \subseteq A \times B$

♦ Notações

- A é denominado *domínio*
- B é denominado *contra-domínio* ou *codomínio*
- aRb denota $(a, b) \in R$
- relação *em* A: $R \subseteq A \times A$
  - ∗ domínio e o contra-domínio coincidem
  - ∗ normalmente denotada por (A, R)

Propriedades das Relações

- **Sejam**
  - A um conjunto e R uma relação em A
- ***Reflexiva***
  - se, para todo $a \in A$, aRa
- ***Simétrica***
  - se aRb, então bRa
- ***Antissimétrica***
  - se aRb e bRa, então $a=b$
- ***Transitiva***
  - se aRb e bRc, então aRc
- **Importante**
  - uma relação pode *não* ser simétrica nem antissimétrica: não são noções complementares
  - uma relação pode *ser simultaneamente* simétrica e antissimétrica

♦ *Exemplo*

- conjunto não vazio A
- $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(2^A, \subseteq)$
  - ∗ reflexivas
  - ∗ antissimétricas
  - ∗ transitivas
- $(\mathbb{Z}, <)$ e $(2^A, \subset)$
  - ∗ transitivas
- $(\mathbb{Q}, =)$
  - ∗ reflexiva
  - ∗ simétrica
  - ∗ antissimétrica
  - ∗ transitiva

Relação de Ordem (R em A)

♦ *Relação de Ordem*

- se é transitiva

♦ *Relação de Ordem Parcial*

- se é reflexiva, antissimétrica e transitiva

♦ *Relação de Ordem Total*

- se é uma relação de ordem parcial e
- para todo $a, b \in A$, ou $a R b$ ou $b R a$

♦ Exemplo: considere um conjunto não vazio A

- relação de ordem
  - $(\mathbb{N}, \leq)$, $(2^A, \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(2^A, \subset)$ e $(\mathbb{Q}, =)$
- relação de ordem parcial
  - $(\mathbb{N}, \leq)$, $(2^A, \subseteq)$ e $(\mathbb{Q}, =)$
- relação de ordem total
  - $(\mathbb{N}, \leq)$

Relação de Equivalência (R em A)

♦ *Relação de Equivalência*

- se for reflexiva, simétrica e transitiva

♦ Importante resultado

- cada relação de equivalência induz um particionamento em *classes de equivalência*
  - ∗ particionamento do conjunto
  - ∗ em subconjuntos disjuntos e não vazios

♦ *Exemplo*

- $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ MOD } 2 = b \text{ MOD } 2\}$
- MOD: resto da divisão inteira
- R induz um particionamento de $\mathbb{N}$
  - ∗ subconjuntos dos pares (resto zero)
  - ∗ subconjuntos dos ímpares (resto um)

♦ Freqüentemente

- desejável estender uma relação de forma a satisfazer determinado conjunto de propriedades

♦ *Fecho de uma Relação*

- R uma relação e P um conjunto de propriedades
- *Fecho* de R em relação ao P
  - denotado por FECHO-P(R)
  - menor relação que contém R e que satisfaz às propriedades em P

♦ Dois fechos importantes

- Transitivo
- Transitivo e Reflexivo

♦ *Fecho Transitivo*

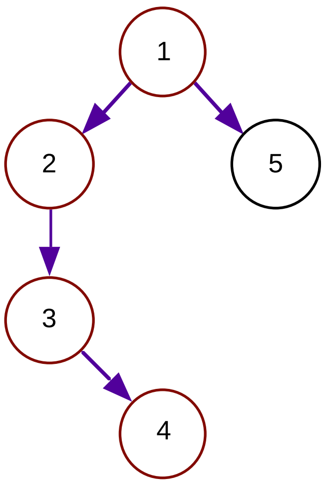
- P = {transitiva}
- denotado por R^+ = FECHO-P(R)
- definido como segue
  - se $(a, b) \in R$, então $(a, b) \in R^+$
  - se $(a, b) \in R^+$ e $(b, c) \in R^+$, então $(a, c) \in R^+$
  - os únicos elementos de R^+ são os construídos como acima

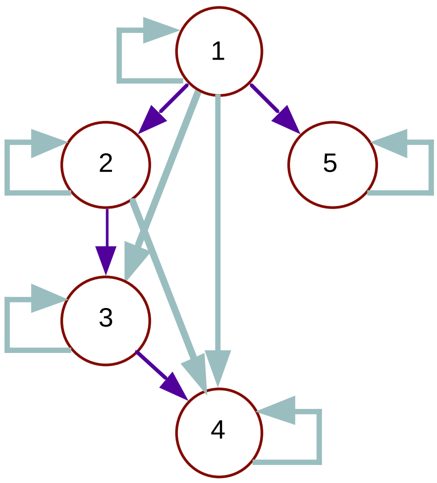
♦ *Fecho Transitivo e Reflexivo*

- P = {transitiva, reflexiva}
- denotado por R^*, é tal que:
  - $R^* = R^+ \cup \{(a, a) \mid a \in A\}$

♦ *Exemplo: Grafo (direto)*

- pode ser definido como uma
  - relação (binária) A (de arestas)
  - em um conjunto V (de vértices)
- A = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 5)}
  - é um grafo em V = {1, 2, 3, 4, 5}
- A* = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)}





Funções

♦ *Função Parcial*

- relação $f \subseteq A \times B$ tal que
  - se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, então $b = c$
  - cada elemento do domínio está relacionado com, no máximo, um elemento do contra-domínio
- notação $f: A \rightarrow B$
- $f(a) = b$ denota $(a, b) \in f$
  - f está definida para a
  - b é *imagem* de a
- $\{b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$
  - *conjunto imagem* de f
  - denotado por $f(A)$ ou $Img(f)$

♦ *Função (Total)* ou *Aplicação*

- função parcial $f: A \to B$ onde
  - para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$
- ou seja:
  - função parcial
  - definida para todos os elementos do domínio

♦ *Exemplo*

- *Adição nos naturais*
  - $ad: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $ad(a, b) = a + b$
  - função (total)
- *Divisão nos inteiros*
  - $div: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tq $div(a, b) = a/b$
  - função parcial
  - não é definida para $(a, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

♦ *Composição de Funções*

- Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções
- $g \circ f: A \to C$ tal que
  - $(g \circ f)(a) = g(f(a))$
  - aplicação da função f ao elemento a e, na seqüência, da função g à imagem $f(a)$

♦ *Exemplo*

- $ad: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- $quadrado: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $quadrado(a) = a^2$
- $quadrado \circ ad: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
  - $(quadrado \circ ad)(3, 1) =$
  - $quadrado(ad(3, 1)) =$
  - $quadrado(4) =$
  - 16

Tipos de Funções

- **Uma função $f: A \to B$ é**

- ***Injetora***

  - se, para todo $b \in B$, existe no máximo um $a \in A$ tal que $f(a) = b$
  - se cada elemento do contra-domínio é imagem de, no máximo, um elemento do domínio

- ***Sobrejetora***

  - se, para todo $b \in B$, existe pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$
  - se todo elemento do contra-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio

- ***Bijetora***

  - se é injetora e sobrejetora
  - se todo elemento do contra-domínio é imagem de exatamente um elemento do domínio

♦ *Exemplo*

- inclusão: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tq inclusão(a) = a é injetora
- módulo: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tq módulo(a) = $|a|$ é sobrejetora
- f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tq
  - $f(a) = 2a$ se $a \geq 0$
  - $f(a) = |2a| - 1$ se $a < 0$
  - é bijetora

Cardinalidade de Conjuntos

♦ *Cardinalidade*

- de um conjunto
- é uma medida de seu tamanho
- definida usando funções bijetoras
- de um conjunto A, é representada por #A

♦ *Cardinalidade Finita*

- se existe uma bijeção de A com
  - $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
  - $\#A = n$
- ou seja
  - é possível representar por extensão

♦ *Cardinalidade* Infinita

- se existe uma bijeção entre A com
  - um subconjunto próprio de A
- ou seja
  - retirando elementos de A
  - pode-se estabelecer uma bijeção com A

♦ *Exemplo*

- f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que
  - $f(a) = 2a$ se $a \geq 0$
  - $f(a) = |2a| - 1$ se $a < 0$
  - é bijetora
- $\mathbb{N}$ é subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$
- então $\mathbb{Z}$ é infinito

♦ **Importante**

- nem todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade
- cardinal do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$
  - denotado por $\aleph_0$
  - $\aleph$ ("alef") é a primeira letra do alfabeto hebráico

♦ *Conjunto Contável* ou *Contavelmente Infinito*

- se existe uma bijeção
  - com um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$
  - denominada *Enumeração* de A
- um conjunto é contável
  - pode-se enumerar seus elementos
  - como uma seqüência na forma a_0, a_1, a_2, ...
- cardinal de qualquer conjunto contável
  - $\aleph_0$

♦ *Conjunto (Infinito) Não-Contável*

- caso contrário

♦ *Exemplo*

- $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são contáveis
- $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$
  - são não-contáveis
  - cardinal é $2^{\aleph_0}$

1.3 Lógica

♦ Lógica Booleana

- o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas

♦ *Proposição*

- sentença declarativa
- possui valor lógico
  - *verdadeiro*
  - *falso*
- usualmente denotados por V e F

♦ *Proposição Sobre* $\mathbb{U}$

- considere um conjunto universo $\mathbb{U}$
- proposição cujo valor lógico depende de $x \in \mathbb{U}$
- usualmente denotada por $p(x)$

♦ p sobre $\mathbb{U}$

- induz uma partição de $\mathbb{U}$ em duas classes de equivalências
  - ∗ $\{x \mid p(x) \text{ é verdadeira}\}$: *conjunto verdade* de p
  - ∗ $\{x \mid p(x) \text{ é falsa}\}$: *conjunto falsidade* de p

♦ *Tautologia*

- se $p(x)$ é V para qq $x \in \mathbb{U}$

♦ *Contradição*

- se $p(x)$ é F para qq $x \in \mathbb{U}$

♦ *Exemplo*

- $3 + 4 > 5$ é uma *proposição*
- para a proposição $n! < 10$ sobre $\mathbb{N}$
  - ∗ $\{0, 1, 2, 3\}$ é o *conjunto verdade*
  - ∗ $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\}$ é o *conjunto falsidade*
- $n + 1 > n$ sobre $\mathbb{N}$ é uma *tautologia*
- "2n é ímpar" sobre $\mathbb{N}$ é uma *contradição*

♦ *Operador*

- função da forma $op: A^n \to A$

♦ *Operador Lógico* ou *Conetivo*

- operador sobre o conjunto das proposições $\mathbb{P}$

♦ *Proposição Atômica* ou *Átomo*

- proposição que não contém conetivos

♦ *Tabela Verdade*

- descreve os valores lógicos de uma proposição
- em termos das possíveis combinações dos valores lógicos das proposições componentes

♦ Operadores Lógicos

- Operador $\neg$ *Negação*
- Operador $\wedge$ *E*
- Operador $\vee$ *Ou*
- Operador $\rightarrow$ *Se-Então*
- Operador $\leftrightarrow$ *Se-Somente-Se*

p	q	$\neg$p	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\rightarrow$ q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

♦ Operadores $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ induzem

- Relação de Implicação
- Relação de Equivalência

♦ *Relação de Implicação*

- $\Rightarrow$
- $\{(p, q) \in \mathbb{P}^2 \mid p \rightarrow q$ é uma tautologia$\}$

♦ *Relação de Equivalência*

- $\Leftrightarrow$
- $\{(p, q) \in \mathbb{P}^2 \mid p \leftrightarrow q$ é uma tautologia$\}$

♦ $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$

- $\Rightarrow$ é relação de ordem
- $\Leftrightarrow$ é relação de equivalência

♦ *Exemplo*

- $p \Rightarrow p \lor q$
- $p \land q \Rightarrow p$

p	q	$p \lor q$	$p \rightarrow (p \lor q)$	$p \land q$	$(p \land q) \rightarrow p$
V	V	V	**V**	V	**V**
V	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	**V**	F	**V**
F	F	F	**V**	F	**V**

♦ *Exemplo*

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
F	F	V	V	**V**
F	V	F	F	**V**
V	F	V	V	**V**
V	V	V	V	**V**

♦ Exemplo

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow F$

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow F$
V	V	F	V	F	**V**
V	F	V	F	V	**V**
F	V	F	V	F	**V**
F	F	V	V	F	**V**

1.4 Técnicas de Demonstração

♦ *Teorema*

- proposição $p \rightarrow q$
  - ∗ prova-se ser uma tautologia
  - ∗ ou seja, $p \Rightarrow q$
- p: hipótese
- q: tese

♦ *Corolário*

- teorema que é uma conseqüência quase direta de um outro já demonstrado
- ou seja, cuja prova é trivial ou imediata

♦ *Lema*

- teorema auxiliar que possui um resultado importante para a prova de um outro

♦ Hipótese e Tese

- antes de iniciar uma demonstração deve-se identificar claramente
  - ∗ hipótese
  - ∗ tese

♦ *Exemplo*

- hipótese e tese?

$\cap$ *distribui-se sobre a* $\cup$, *ou seja*,
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- reescrita identificando a hipótese e a tese

se A, B *e* C *são conjuntos quaisquer*,
então $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

♦ **Teorema na forma $p \leftrightarrow q$**

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- demonstra-se
  - "ida" ($\rightarrow$)
  - "volta" ($\leftarrow$)

♦ *Exemplo*

A é contável sse
existe uma função bijetora entre A e o conjunto dos números pares

- "ida" e "volta"

se um conjunto A é contável,
então existe uma função bijetora entre A e o conjunto dos números pares

e

se existe uma função bijetora entre A e o conjunto dos números pares,
então A é contável

♦ Algumas técnicas para demonstrar um teorema $p \rightarrow q$

- direta
- contraposição
- redução ao absurdo
- indução

Prova Direta

♦ Técnica

- supor a hipótese é V
- a partir da hipótese provar que a tese é V

♦ *Exemplo*

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- lembre-se que
  - ∗ $X = Y$ sse $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$
  - ∗ $X \subseteq Y$ sse todos os elementos de X também são elementos de Y
- é fácil verificar que
  - ∗ $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Para provar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - ∗ $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - ∗ $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

♦ Prova Direta

- *Caso 1*: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - ∗ Suponha que $x \in A \cap (B \cup C)$

    $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow$

    $x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow$

    $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow$

    $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow$

    $x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Rightarrow$

    $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - ∗ Portanto, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- *Caso 2*: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
  - ∗ Suponha que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

    $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$

    $(x \in (A \cap B)) \vee (x \in A \cap C) \Rightarrow$

    $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow$

    $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow$

    $x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow$

    $x \in A \cap (B \cup C)$
  - ∗ Portanto, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

- Logo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Prova por Contraposição

- **Técnica**

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$$

- ***Exemplo***

$$n! > n + 1 \to n > 2$$

- pode-se, equivalentemente, demonstrar por contraposição que

$$n \leq 2 \to n! \leq n + 1$$

- prova de que $n \leq 2 \to n! \leq n$?
  * é suficiente testar para $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$

Prova por Redução ao Absurdo

♦ Técnica

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow F$$

- supor a hipótese p
- supor a negação da tese $\neg q$
- concluir uma contradição
  - em geral, $q \wedge \neg q$

♦ Prova por Contra-Exemplo

- em uma demonstração por absurdo
  - construção da contradição $q \wedge \neg q$
  - apresentação de um *contra-exemplo*

♦ *Exemplo*

0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

- reescrevendo na forma de $p \rightarrow q$

se 0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$, então 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

♦ Prova por Absurdo

- suponha que 0 é o neutro da adição em $\mathbb{N}$
- suponha que não é o único
- seja e um neutro da adição em $\mathbb{N}$ tq $e \neq 0$
- como 0 é neutro
  - para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $n = 0 + n$
  - em particular, para $n = e$, tem-se que $e = 0 + e$
- como e é elemento
  - para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = n + e$
  - em particular, para $n = 0$, tem-se que $0 = 0 + e$
- portanto
  - como $e = 0 + e$ e $0 = 0 + e$, tem-se que $e = 0$
  - contradição!!! pois foi suposto que $e \neq 0$
- Logo, é absurdo supor que o elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$ não é único

Prova por Indução

♦ Importante

- é usada com freqüência
- é usada em proposições que dependem de $\mathbb{N}$

♦ *Princípio da Indução Matemática*

- seja $p(n)$ uma proposição sobre $\mathbb{N}$
- $p(0)$ é V
- se, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $p(k) \rightarrow p(k + 1)$ então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é V

♦ Nomenclatura

- $p(0)$: *base de indução.*
- $p(k)$: *hipótese de indução*
- $p(k) \rightarrow p(k + 1)$: *passo de indução*

♦ Técnica

- demonstrar a base de indução $p(0)$
- fixado um k, supor V a hipótese de indução $p(k)$
- demonstrar o passo de indução
- na realidade
  * o princípio da indução matemática pode ser aplicado a qualquer proposição que dependa de um conjunto para o qual exista uma bijeção com os naturais

♦ *Exemplo*

para qualquer $n \in N$ *tq* $n \geq 0$, *tem-se que*

$$1 + 2 + \ldots + n = (n^2 + n)/2$$

♦ Prova por Indução

- ***Base de Indução***

  Seja $n = 0$. Então:

  $$(0^2 + 0)/2 = (0 + 0)/2 = 0/2 = 0$$

  Portanto, $1 + 2 + ... + n = (n^2 + n)/2$ é V para $n = 0$

- ***Hipótese de Indução***

  Suponha que, para algum n fixo tq $n \geq 0$

  $$1 + 2 + ... + n = (n^2 + n)/2$$

- ***Passo de Indução***.

  Prova para $1 + 2 + ... + n + (n + 1)$

  $$1 + 2 + ... + n + (n + 1) =$$
  $$(1 + 2 + ... + n) + (n + 1) =$$
  $$(n^2 + n)/2 + (n + 1) =$$
  $$(n^2 + n)/2 + (2n + 2)/2 =$$
  $$(n^2 + n + 2n + 2)/2 =$$
  $$((n^2 + 2n + 1) + (n + 1))/2 =$$
  $$((n + 1)^2 + (n + 1))/2$$

  Portanto, $1 + 2 + ... + (n + 1) = ((n + 1)^2 + (n + 1))/2$

- Logo, para qq $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 0$, tem-se que

  $$1 + 2 + ... + n = (n^2 + n)/2$$

♦ Princípio da Indução Matemática × Definições

- o princípio da indução matemática pode ser usado para definições
- é dita *indutivamente definida*
- ou *recursivamente definida*
- exemplo
  - ∗ definição de Fecho

1.5 Alfabetos, Palavras, Linguagens e Gramáticas

♦ *Definição: Símbolo, Caractere*

- entidades abstratas básica
- não definida formalmente

♦ *Exemplo: Símbolo*

* letras
* dígitos

♦ *Definição: Alfabeto*

- conjunto *finito* de símbolos

♦ *Exemplo: Alfabeto*

- $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$
- $\Sigma_2 = \{0, 1, ..., 9\}$
- $\Sigma_3 = \{\ \}$

♦ *Definição: Palavra, Cadeia de Caracteres, Sentença*

- sobre um alfabeto
- seqüência finita de símbolos justapostos

♦ *Exemplo: Palavra*

- a, abcb são palavras sobre {a, b, c}
- ε
  * palavra vazia - sem símbolos
  * é palavra sobre qualquer alfabeto

♦ *Definição: Tamanho, Comprimento* de uma palavra

- número de símbolos que compõem a palavra
- representação
  * $|w|$
  * w denota uma palavra

♦ *Exemplo: Tamanho de uma palavra*

- $|abcb| = 4$
- $|\varepsilon| = 0$

♦ Conjuntos de Palavras sobre Σ

- Σ^*
  - conjunto de todas as palavras sobre Σ
- Σ^+
  - $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
- exemplo: para $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa,\ldots\}$
  - $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa,\ldots\}$

♦ *Definição: Prefixo, Sufixo, Subpalavra*

- prefixo (sufixo)
  - qq seqüência de símbolos inicial (final) de uma palavra
- subpalavra
  - qq seqüência de símbolos contígüa de uma palavra

♦ *Exemplo: para a palavra* abcb

- prefixos: ε, a, ab, abc, abcb
- sufixos: ε, b, cb, bcb, abcb
- prefixos e sufixos são subpalavras

♦ *Definição: Linguagem Formal*

- um conjunto de palavras sobre um alfabeto

♦ *Exemplo: Ling. Formal sobre* $\Sigma = \{a, b\}$

- conjunto vazio
- conjunto formado pela palavra vazia
  - note-se que $\{ \} \neq \{\varepsilon\}$
- conjunto das palíndromos
  - palavras que têm a mesma leitura da esquerda para a direita e vice-versa
  - linguagem infinita
  - ε, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, aaaa,... são palíndromos

♦ *Definição: Concatenação*

- operação binária, definida sobre uma linguagem
- palavra formada pela justaposição das palavras
- notação
  - justaposição dos símbolos que representam as palavras componentes
- satisfaz às seguintes propriedades:
  - associatividade: $v(wt) = (vw)t$
  - elemento neutro (esq/dir): $\varepsilon w = w = w\varepsilon$

♦ *Exemplo: Concatenação*

- para $v = ab$ e $w = cd$
  - $vw = abcd$

♦ *Definição: Concatenação Sucessiva*

- concatenação sucessiva de uma palavra com ela mesma
- indefinida para ε^0

♦ *Exemplo: Concatenação Sucessiva*

- $w^3 = www$
- $w^1 = w$
- $a^5 = aaaaa$
- $a^n = aaa...a$ (a repetido n vezes)
- $w^0 = \varepsilon$ para $w \neq \varepsilon$

♦ *Definição: Gramática*

$$G = (V, T, P, S):$$

- V
  - conjunto finito de símbolos
  - *variáveis* ou *não-terminais*
- T
  - conjunto finito de símbolos
  - *terminais*
  - disjunto de V
- P
  - conjunto finito de pares (α, β)
  - *regra de produção*
  - α é palavra de $(V \cup T)^+$
  - β é palavra de $(V \cup T)^*$
- S
  - elemento de V
  - *variável inicial*

♦ Notação de (α, β)

- $\alpha \to \beta$
- notação abreviada para $\alpha \to \beta_1, \ldots, \alpha \to \beta_n$
  - $\alpha \to \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n$

♦ *Definição: Derivação*

- $G = (V, T, P, S)$ uma gramática
- *Derivação* é um par da relação denotada por $\Rightarrow$
  - ∗ com domínio em $(V \cup T)^+$
  - ∗ contra-domínio em $(V \cup T)^*$
  - ∗ representação de forma infixada

$$\alpha \Rightarrow \beta$$

- $\Rightarrow$ é indutivamente definida
- para qq produção $S \rightarrow \beta$
  - ∗ S é o símbolo inicial

$$S \Rightarrow \beta$$

- para qq par $\alpha \Rightarrow \beta$
  - ∗ onde $\beta = \beta_u \beta_v \beta_w$
  - ∗ se $\beta_v \rightarrow \beta_t$ é regra de P então

$$\beta \Rightarrow \beta_u \beta_t \beta_w$$

♦ **Portanto, derivação**

- substituição de uma subpalavra de acordo com uma regra de produção

♦ Sucessivos Passos de Derivações

- $\Rightarrow^*$
  - fecho transitivo e reflexivo da relação $\Rightarrow$
  - zero ou mais passos de derivações sucessivos

- $\Rightarrow^+$
  - fecho transitivo da relação $\Rightarrow$
  - um ou mais passos de derivações sucessivos

- $\Rightarrow^i$
  - exatos i passos de derivações sucessivos
  - i é número natural

♦ Gramática é um formalismo

- Axiomático
- de Geração
  - ∗ permite derivar ("gerar") todas as palavras da linguagem que representa

♦ *Definição: Linguagem Gerada*

- $G = (V, T, P, S)$ uma gramática
- *Linguagem Gerada* por G'

$$L(G) \text{ ou } GERA(G)$$

- todas as palavras de símbolos terminais deriváveis a partir do símbolo inicial S

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^+ w\}$$

♦ *Exemplo: números naturais*

- $G = (V, T, P, S)$
  - $V = \{S, D\}$
  - $T = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
  - $P = \{S \rightarrow D, S \rightarrow DS, D \rightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9\}$
- uma derivação do número 243 (existe outra?)

$$S \Rightarrow DS \Rightarrow 2S \Rightarrow 2DS \Rightarrow 24S \Rightarrow 24D \Rightarrow 243$$

- portanto

$$S \Rightarrow^* 243$$

$$S \Rightarrow^+ 243$$

$$S \Rightarrow^6 243$$

- logo GERA(G)
  - o conjunto dos números naturais
  - sintaticamente (por quê?)

♦ *Definição: Equivalência de Gramáticas*

- G_1 e G_2 são equivalentes sse

$$GERA(G_1) = GERA(G_2)$$

♦ Convenções:

- A, B, C,..., S, T — símbolos variáveis
- a, b, c,..., s, t — símbolos terminais
- u, v, w, x, y, z — palavras de símbolos terminais
- α, ß,... — palavras de símbolos variáveis e/ou terminais

♦ *Exemplo: identificadores em Pascal*

- $G = (V, T, P, S)$
  - $V = \{S, C, L, D\}$
  - $T = \{a, b, ..., z, 0, 1, 2, ..., 9\}$
  - $P = \{\quad S \to LC \mid L,$
    $C \to LC \mid DC \mid L \mid D,$
    $L \to a \mid b \mid ... \mid z,$
    $D \to 0 \mid 1 \mid ... \mid 9\ \}$

♦ *Exemplo: texto com aspas balanceadas*

- $G = (V, T, P, S)$
  - $V = \{E\}$
  - $T = \{x, "\}$
  - $P = \{\quad S \to xS \mid \varepsilon,$
    $S \to "S"\ \}$

♦ *Exemplo:* ww

$$\{ww \mid w \text{ é palavra de } \{a, b\}^*\}$$

- $G = (\{S, X, Y, A, B, F\}, \{a, b\}, P, S)$
  - $P = \{ \quad S \rightarrow XY,$
    $X \rightarrow XaA \mid XbB, F$
    $Aa \rightarrow aA, \ Ab \rightarrow bA, \ AY \rightarrow Ya,$
    $Ba \rightarrow aB, \ Bb \rightarrow bB, \ BY \rightarrow Yb,$
    $Fa \rightarrow aF, \ Fb \rightarrow bF, \ FY \rightarrow \varepsilon \}$

- baba

$$\underline{S} \Rightarrow$$
$$\underline{X}Y \Rightarrow$$
$$Xa\underline{AY} \Rightarrow$$
$$\underline{X}aYa \Rightarrow$$
$$Xb\underline{Ba}Ya \Rightarrow$$
$$Xba\underline{BY}a \Rightarrow$$
$$\underline{X}baYba \Rightarrow$$
$$\underline{Fb}aYba \Rightarrow$$
$$b\underline{Fa}Yba \Rightarrow$$
$$ba\underline{FY}ba \Rightarrow$$
$$ba\varepsilon ba = baba$$