



# ALGORITMO DE MINIMIZAÇÃO DE AFD

---

Prof Osvaldo Vargas Jaques  
ojacques@comp.uems.br

# MINIMIZAÇÃO DE AFD



---

- Pre-requisitos:

- a) Deve ser determinístico
- b) Não pode ter estados inacessíveis (não atingíveis a partir do estado inicial)
- c) A função programa deve ser total

Caso esses requisitos não sejam satisfeitos, transformar o autômato de modo que seja satisfeito. Elimine os estados inacessíveis, e adicione um estado **d** não final (poço sem fundo), para as transições não previstas.

# MINIMIZAÇÃO DE AFD

- Seja  $\delta$  uma função de transição TOTAL.
- A idéia é marcar pares de estados  $(p,q)$  que sejam não equivalentes.
- Ao final sobrarão os estados equivalentes não marcados. Estes permanecerão no AFD minimizado. Os equivalentes serão tratados e reduzidos.

$q_1$					
$q_2$					
...					
$q_n$					
<b>d</b>					
	$q_0$	$q_1$	...	$q_{n-1}$	$q_n$

- Construir uma tabela para relacionar todos os pares de estados
- Marcar estado trivialmente não equivalentes (final, não-final). **OBVIAMENTE**, finais não são equivalentes a não finais.

# MINIMIZAÇÃO DE AFD

- Seja  $\delta$  uma função de transição TOTAL.
- A idéia é marcar pares de estados  $(p,q)$  que sejam não equivalentes.
- Ao final sobrarão os estados equivalentes não marcados. Estes permanecerão no AFD minimizado. Os equivalentes serão tratados e reduzidos.

$q_1$	X				
$q_2$					
...					
$q_n$					
d					
	$q_0$	$q_1$	...	$q_{n-1}$	$q_n$

- a) Construir uma tabela para relacionar todos os pares de estados.
- b) Marcar estado trivialmente não equivalentes {final, não-final}. **OBVIAMENTE**, finais não são equivalentes a não finais.

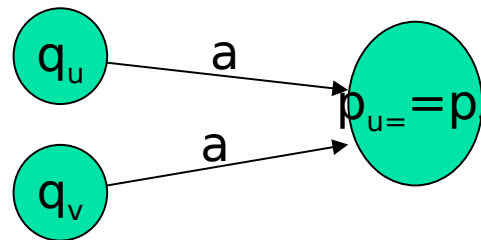
## Exemplo:

Se  $\{q_0, q_1\}$  fossem estados não equivalentes eu marcaria um "X" no cruzamento de  $q_0$  com  $q_1$ .

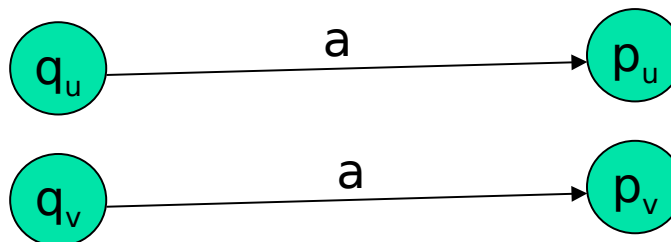
# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

c) **Marcar estados não equivalentes.** Para cada par  $\{q_u, q_v\}$  não marcado, suponha  $\delta(q_u, a) = p_u$  e  $\delta(q_v, a) = p_v$ .

- se  $p_u = p_v$  então  $q_u$  é **equivalente** a  $q_v$  e  $\{q_u, q_v\}$  **não** deve ser marcado.

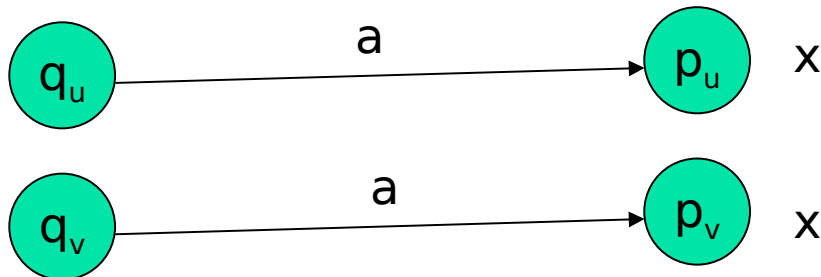


- se  $p_u \neq p_v$ , e o par  $\{p_u, p_v\}$  **não** está marcado, então  $\{q_u, q_v\}$  é incluído em uma lista para posterior análise;

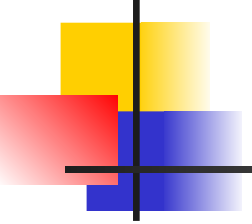


# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

- se  $p_u \neq p_v$ , e o par  $\{p_u, p_v\}$  **está** marcado, então:
  - $\{q_u, q_v\}$  não é equivalente e **deve** ser marcado;
  - se  $\{q_u, q_v\}$  encabeça uma lista de pares, então marcar todos os pares da lista (e, recursivamente, se algum par da lista encabeça outra lista);



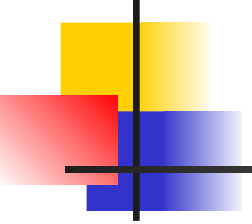
# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)



d) *Unificação dos estados equivalentes.* Os estados dos pares não marcados são equivalentes e podem ser unificados como segue:

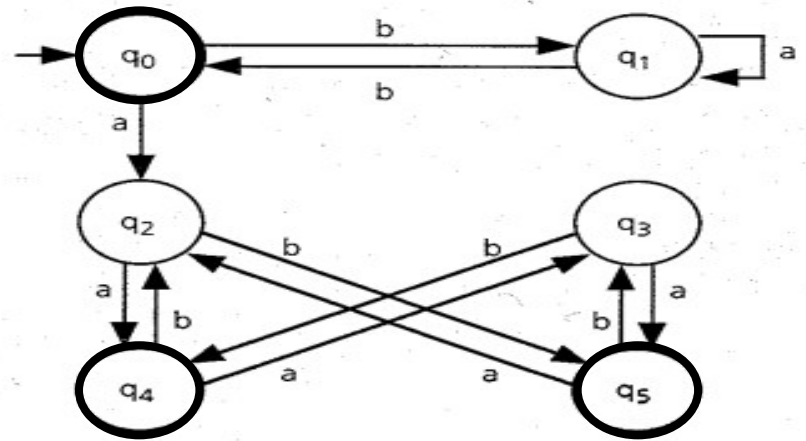
- a equivalência dos estados é transitiva;
- pares de estados não finais equivalentes podem ser unificados como um único estado não final;
- pares de estados finais equivalentes podem ser unificados como um único estado final;
- se algum dos estados equivalentes é inicial então o correspondente estado unificado é inicial;

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

- 
- 
- d) *Exclusão dos estados inúteis.* Por fim, os estados chamados inúteis devem ser excluídos. Um estado  $q$  é inútil se é não final e a partir de  $q$  não é possível atingir um estado final. Deve-se reparar que o estado **d** (se incluído) sempre é inútil.

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

- Seja o AFD cujo diagrama de estados é mostrado ao lado
- Passo 1)** Construção da tabela.
- Passo 2)** Marcação dos pares {final, não-final}
- Passo 3)** Análise dos estados não marcados. Os pares marcados nesta etapa são marcados como  $\otimes$



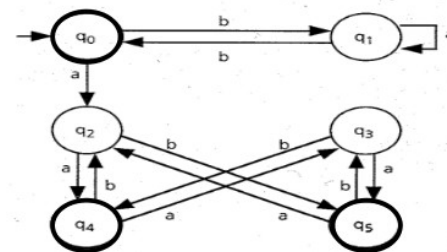
q1	×				
q2	×				
q3	×				
q4		×	×	×	
q5		×	×	×	
	q0	q1	q2	q3	q4

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

- Análise do par  $\{q_0, q_4\}$**

$$\delta(q_0, a) = q_2 \quad \delta(q_0, b) = q_1$$

$$\delta(q_4, a) = q_3 \quad \delta(q_4, b) = q_2$$



Como  $\{q_1, q_2\}$  e  $\{q_2, q_3\}$  são não marcados, então  $\{q_0, q_4\}$  é incluído nas listas encabeçadas por  $\{q_1, q_2\}$  e  $\{q_2, q_3\}$

q1	X				
q2	X				
q3	X				
q4		X	X	X	
q5		X	X	X	
	q0	q1	q2	q3	q4

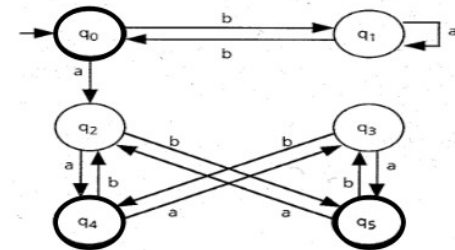
Arrows from the table point to the sets  $\{q_0, q_4\}$  for the pairs (q2, q4) and (q3, q4).

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

## Análise do par $\{q_0, q_4\}$

$$\delta(q_0, a) = q_2 \quad \delta(q_0, b) = q_1$$

$$\delta(q_4, a) = q_3 \quad \delta(q_4, b) = q_2$$

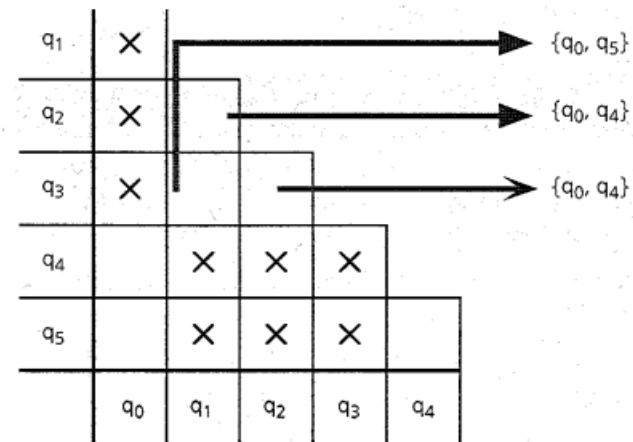


Como  $\{q_1, q_2\}$  e  $\{q_2, q_3\}$  são não marcados, então  $\{q_0, q_4\}$  é incluído nas listas encabeçadas por  $\{q_1, q_2\}$  e  $\{q_2, q_3\}$

## Análise do par $\{q_0, q_5\}$

$$\delta(q_0, a) = q_2 \quad \delta(q_0, b) = q_1$$

$$\delta(q_5, a) = q_2 \quad \delta(q_5, b) = q_3$$



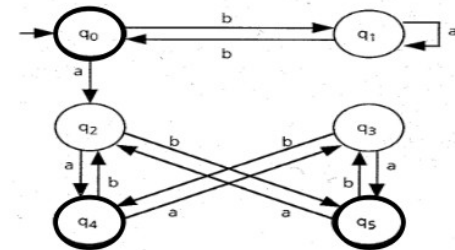
Como  $\{q_1, q_3\}$  é não marcado e  $\{q_2, q_2\}$  é trivialmente equivalente, então  $\{q_0, q_5\}$  é incluído nas listas encabeçadas por  $\{q_1, q_3\}$

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

## Análise do par $\{q_1, q_2\}$

$$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_0$$

$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$



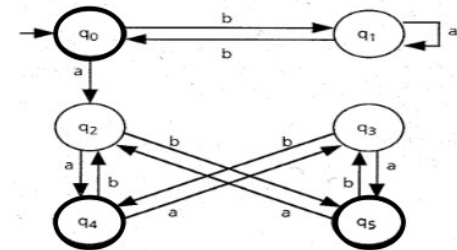
Como  $\{q_1, q_4\}$  é marcado  $\{q_1, q_2\}$  também é marcado.

Como  $\{q_1, q_2\}$  encabeça uma lista,  $\{q_0, q_4\}$  também é marcado.

q1	X					→ {q0, q5}
q2	X	⊗				→ {q0, q4}
q3	X	⊗				→ {q0, q4}
q4	⊗	X	X	X		
q5		X	X	X		
	q0	q1	q2	q3	q4	



# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)



## Análise do par $\{q_1, q_2\}$

$$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_0$$

$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$

Como  $\{q_1, q_4\}$  é marcado  $\{q_1, q_2\}$  também é marcado.

Como  $\{q_1, q_2\}$  encabeça uma lista  $\{q_0, q_4\}$  também é marcado.

## Análise do par $\{q_1, q_3\}$

$$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_0$$

$$\delta(q_3, a) = q_5 \quad \delta(q_3, b) = q_4$$

Como  $\{q_1, q_5\}$  e  $\{q_0, q_4\}$  são marcados então  $\{q_1, q_3\}$  também é marcado.

Como encabeça uma lista,  $\{q_0, q_5\}$  é marcado.

q1	X									
q2	X	⊗								
q3	X	⊗								
q4	⊗	X	X	X						
q5	⊗	X	X	X						
	q0	q1	q2	q3	q4					

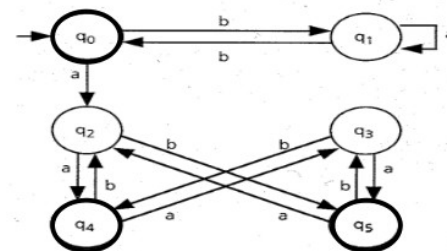
Arrows from the table indicate marked pairs:  $\{q_0, q_5\}$  (from q1),  $\{q_0, q_4\}$  (from q2), and  $\{q_0, q_4\}$  (from q3).

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

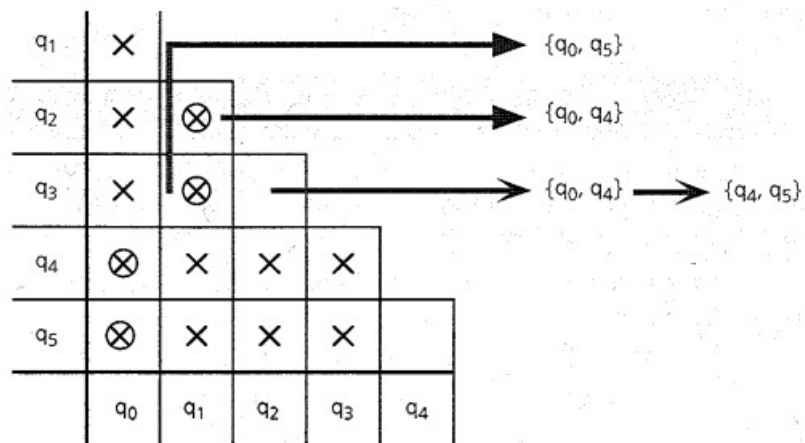
## Análise do par $\{q_2, q_3\}$

$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$

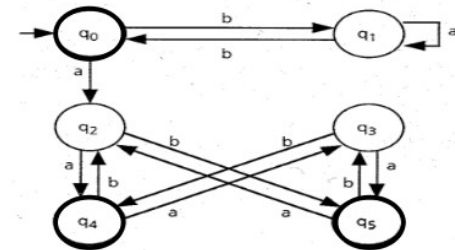
$$\delta(q_3, a) = q_5 \quad \delta(q_3, b) = q_4$$



Como  $\{q_2, q_3\}$  é não marcado,  $\{q_4, q_5\}$  é incluído na lista encabeçada por  $\{q_2, q_3\}$ .



# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)



## Análise do par $\{q_2, q_3\}$

$$\delta(q_2, a) = q_4 \quad \delta(q_2, b) = q_5$$

$$\delta(q_3, a) = q_5 \quad \delta(q_3, b) = q_4$$

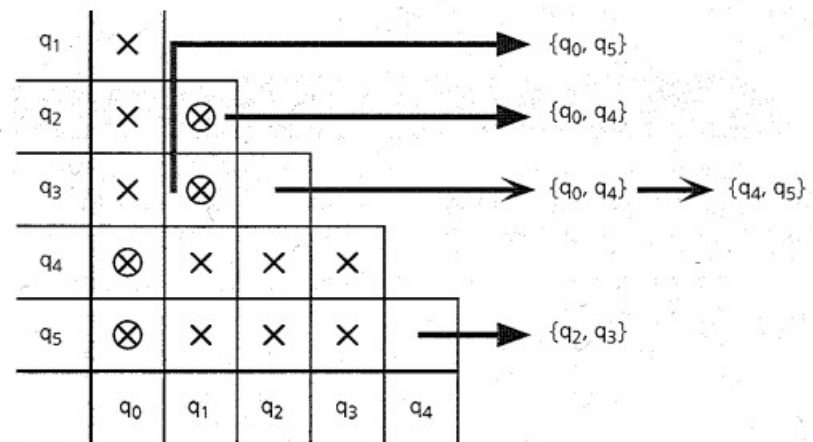
Como  $\{q_2, q_3\}$  é não marcado,  $\{q_4, q_5\}$  é incluído na lista encabeçada por  $\{q_2, q_3\}$

## Análise do par $\{q_4, q_5\}$

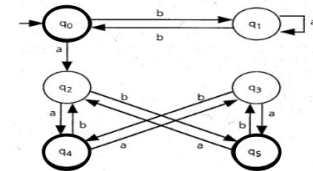
$$\delta(q_4, a) = q_3 \quad \delta(q_4, b) = q_2$$

$$\delta(q_5, a) = q_2 \quad \delta(q_5, b) = q_3$$

Como  $\{q_2, q_3\}$  é não marcado,  $\{q_4, q_5\}$  é incluído na lista encabeçada por  $\{q_2, q_3\}$ .



# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)



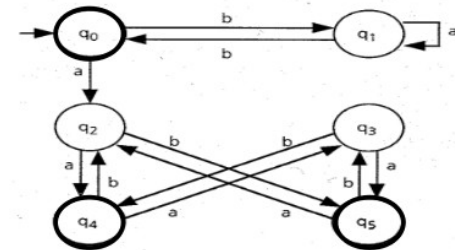
**Passo 4.** Como os pares  $\{q_2, q_3\}$  e  $\{q_4, q_5\}$  são não marcados, as seguintes unificações podem ser feitas:

- $q_{23}$  representa a união de  $q_2$  com  $q_3$
- $q_{45}$  representa a união de  $q_4$  com  $q_5$

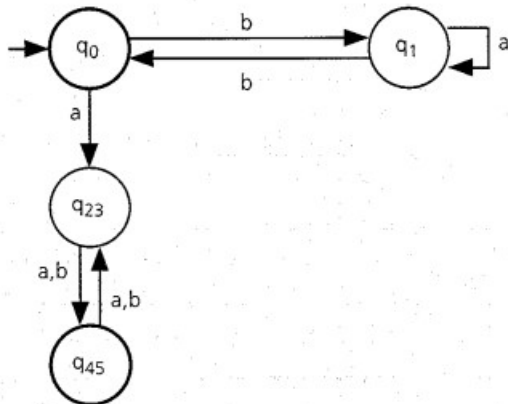
$q_1$	X									$\{q_0, q_5\}$
$q_2$	X	⊗								$\{q_0, q_4\}$
$q_3$	X	⊗								$\{q_0, q_4\} \rightarrow \{q_4, q_5\}$
$q_4$	⊗	X	X	X						
$q_5$	⊗	X	X	X						$\{q_2, q_3\}$
	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$					

# MINIMIZAÇÃO DE AFD (cont..)

- Passo 4.** Como os pares  $\{q_2, q_3\}$  e  $\{q_4, q_5\}$  são não marcados, as seguintes unificações podem ser feitas:
  - $q_{23}$  representa a união de  $q_2$  com  $q_3$
  - $q_{45}$  representa a união de  $q_4$  com  $q_5$



O autômato mínimo resultante.



q1	X					→ {q0, q5}
q2	X	⊗				→ {q0, q4}
q3	X	⊗				→ {q0, q4} → {q4, q5}
q4	⊗	X	X	X		
q5	⊗	X	X	X		→ {q2, q3}
	q0	q1	q2	q3	q4	