8,3

Nome: Gabriel Jagá Monteiro
RGM: 43560

Professor: Osvaldo Jacques
Matéria: LFA

Q01: Examine as descrições formais de conjuntos abaixo de modo que você entenda quais membros eles contém. Escreva uma descrição informal breve em português de cada conjunto

a) $\{ \ldots, -4; -2; 0; 2; 4; \ldots \}$ Conjunto dos inteiros de módulo par C

b) $\{n \mid n = 2m$ para algum m em $N\}$ Conjunto dos pares C 1,0

c) $\{n \mid n = 2m$ para algum m em N, e $n = 3K$ para algum K em $N\}$ Conjunto dos pares múltiplos de 3 C

d) $\{w \mid w$ é uma cadeia de 0s e 1s e w é igual ao reverso de $w\}$ Conjunto dos palíndromos C

Q02: Escreva descrições formais dos seguintes conjuntos:

a) O conjunto contendo todos os inteiros que são maiores que 5. $\{n \mid n \in \mathbb{Z}$ e $n > 5\}$ C

b) O conjunto contendo a cadeia aba. $\{w \mid x, y \in \Sigma^*$ e $w = xabay\}$ C 0,6

c) O conjunto contendo a cadeia vazia. $\{w \mid w \in \cancel{\Sigma^*}\}$

Q03: Seja A o conjunto $\{x, y, z\}$ e B o conjunto $\{x, y\}$.

a) A é um subconjunto de B? A afirmação é falsa C

b) B é um subconjunto de A? A afirmação é verdadeira C

c) Quem é $A \cup B$? $\{x, y, z\}$

1,?

d) Quem é $A \times B$? $\{(x;x); (x;y); (y;x); (y;y); (z;x); (z;y)\}$

e) Quem é 2^B?

$2^B = \{\{\ \}; \{x\}; \{y\}; \{x; y\}\}$

Q04: Se A tem a elementos e B tem b elementos, quantos elementos estão em $A \times B$? Explique sua resposta

Um produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de pares $(x; y)$ onde $x \in A$ e $y \in B$. Ou seja, cada x de A estará associado a y de B. Portanto, se A tem a elementos e B tem b elementos teremos $a \times b$. $A \times B = \{(x_1; y_1), \dots (x_1; y_b); \dots (x_a; y_1); \dots (x_a; y_b)\}$. Para cada x_1 temos b pares, como temos a elementos x, teremos $a \times b$ pares totais

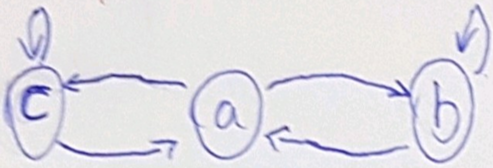
Q05: Se C é um conjunto com c elementos, quantos elementos estão no conjunto das partes de C? Explique sua resposta.

O conjunto das partes de C é representado por $P(C)$ ou 2^C. Somando todos os subconjuntos de C encontramos $2^{|C|}$. Ou seja, se tivermos um conjunto vazio $\#C = 0$ e temos 1 subconjunto $\{\{C\}\}$, $1 = 2^0$. Com um elemento a temos 2 elementos $\{\ \}$ e $\{a\} \subseteq C$, e $\#C = 1$ e $2 = 2^1$

Logo, por indução, temos: $n = 0$, $2^0 = 1$; $n = 1$, $2^1 = 2$; $n = 2$, $2^2 = 4$; $n = k-1$, 2^{k-1}; $n = k$, $2^k = 2 \cdot 2^{k-1}$

Q06: Para cada item, dê uma relação que satisfaz a condição

a) Reflexiva e simétrica mas não transitiva

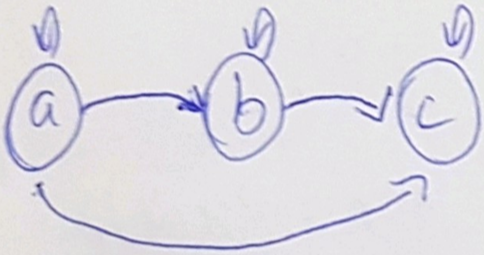


C

1p

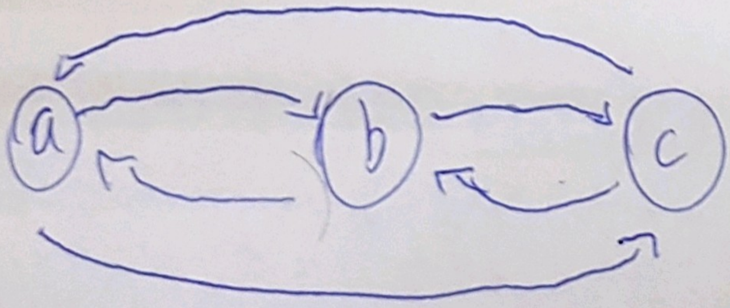
b) Reflexiva e transitiva mas não simétrica

C



C

c) Simétrica e transitiva mas não reflexiva



Q07: Prove por indução que:

1,0

a) $6 \mid n(n+1)(n+2), \forall n \in \mathbb{N}$

Passo 1: Demonstrar que a expressão vale para um n inicial $(n=0)$: $6 \mid 0$, o que é válido

Passo 2: Como é válido para n inicial, deve valer para $n = n+1$

Provar que: $6 \mid (n+1)(n+2)\underbrace{(n+3)}$

$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$

Pela hipótese $6 \mid n(n+1)(n+2)$

Agora na resta provar que $6 \mid 3(n+1)(n+2)$. $n = 2k$ ou $n = 2k+1$

Para $n = 2k$

$6 \mid 3(2k+1)(2k+2)$

$6 \mid 3(2k+1) \cdot 2(k+1)$

$6 \mid 6(2k+1)(k+1)$, o que é válido

Para $n = 2k+1$

$6 \mid 3(2k+1+1)(2k+1+2)$

$6 \mid 3(2k+2)(2k+3)$

$6 \mid 3 \cdot 2(k+1)(2k+3)$

$6 \mid 6(k+1)(2k+3)$, o que é válido

b) $3 \mid n^3 + 2n, \forall n \in \mathbb{N}$

Passo 1: Demonstrar que a expressão vale para um n inicial $(n=0)$: $3 \mid 0(0^2+2)$, o que é válido

Passo 2: Como é válido para n inicial, deve valer para $n = n+1$

Provar que $3 \mid (n+1)((n+1)^2+2) = (n+1)^3 + 2(n+1)$

$$\Rightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \Rightarrow n^3\, 2n + 3n^2 + 3n + 3 \Rightarrow \underbrace{n(n^2+2)} + 3(n^2+n+1)$$

por hipótese: $3 \mid n(n^2+2)$, o que é válido

c) $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{3}{3.4} + \dots + \frac{n}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Passo 1: Demonstrar que vale para um n inicial $(n=1)$: $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{(1+1)}$, o que é válido

Passo 2: Como é válido para n inicial, deve valer para $n = n+1$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \dots + \frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \frac{n(n+2)+(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1+1)+(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{n\cancel{(n+1)} + n + \cancel{(n+1)}}{(n+1)\cdot(n+2)} \Rightarrow \frac{(n+1)(n+1)+n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+2)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$, o que é falso.

Q08: Descreva, sucintamente, a diferença entre os seguintes pares de conceitos:

a) Produto Cartesiano e Concatenação

O produto cartesiano é definido como um conjunto construído pelos pares ordenados envolvendo os elementos de dois conjuntos (e.g.: A x B), já a concatenação é a operação binária definida sobre uma linguagem para unir o conteúdo de duas "strings". Logo, percebe-se que na concatenação não há distinção, e não há importância na ordem, diferentemente do produto Cartesiano

0,7

b) Produto Cartesiano e relação

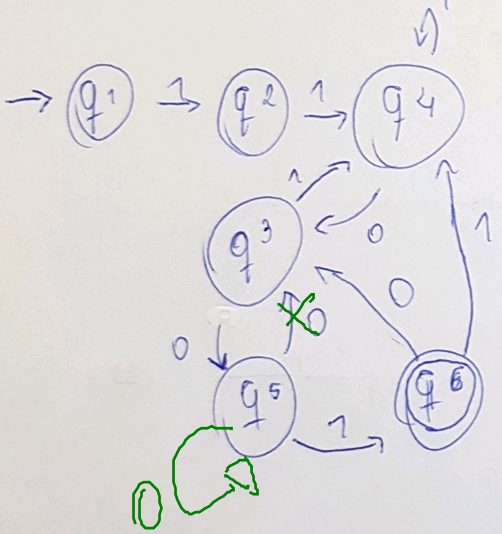
A relação representa somente uma seção do que é um produto cartesiano

c) Relação e função

A função é definida pela existência de dois conjuntos e alguma associação entre eles, que gere uma correspondência a todo elemento do primeiro conjunto em um único elemento do segundo, a relação pode estar contida em uma função.

4

Q09. Elabore um diagrama do AFD que aceite o conjunto de todas as palavras do alfabeto {0;1} que comece com 11 e termine 001. A seguir, dê a descrição formal desse AFD



$M_1 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0;1\},$

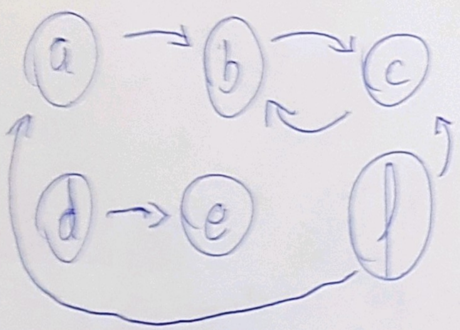
	0	1
q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	q_4
q_3	q_5	q_4
q_4	q_3	q_4
q_5	q_3	q_6
q_6	q_3	q_4

$, q_1, \{q_6\})$ //

4 0,7

Q10: Dado o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, seja a relação binária $R = \{(a;b); (b;c); (d;e); (c;b); (f;a); (f;c)\}$

a) Desenhe o diagrama representando R.



0,3

b) Dê o fecho transitivo e reflexivo do R.

Não existe fecho transitivo e reflexivo em R.

c) Dê o fecho simétrico do R

Fecho simétrico do R: $\{(b;c); (c;b)\}$